Die Prinzipien

der

Hydrostatik und Hydraulik.

Von

H. Scheffler.

Zweiter Band.

Mit über 200 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Braunschweig,

Verlag der Hofbuchhandlung von Eduard Leibrock.

1847.

Inhalt des zweiten Theiles.

Messung des Wassers in den Speise- und Vertheilungsbehältern der Wasserleitungen.

§. Seite
130. Gewöhnliches Verfahren bei der Messung des Wassers in den Speise- und Verheilungsbehältern 1
131. Bestimmung des Werthes des Wasserzolles 3

Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen.

132. Reibung einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit an den Wänden einer engen Röhre 5
133. Allgemeine Gleichungen für die beharrliche Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen, unter Berücksichtigung des Widerstandes der Reibung an den Röhrenwänden 9
134. Fall, wo der untere Behälter nicht vorhanden ist, und die Röhre mit voller Öffnung in die freie Luft ausmündet; und wo außerdem die Röhre sowenig, wie das obere Gefäß, plötzliche Querschnittsveränderungen enthält, auch bei der Einmündung in die Röhre keine Kontraktion stattfindet 16
135. Fall, wo unter den übrigen Voraussetzungen des vorhergehenden Paragraphs das Wasser mit Kontraktion in die Röhre tritt . . 21
136. Widerstand, welchen das Wasser bei dem Durchgange durch Scheidewände, plötzliche Erweiterungen und Verengungen in der Leitungsröhre erfährt 25
137. Widerstand, welchen das Wasser bei dem Durchgange durch Ventile und Hähne in der Leitungsröhre erleidet 31
138. Widerstand, welchen das Wasser bei dem Durchgange durch die in den Röhrenleitungen etwa vorkommenden Kniee erfährt . . . 39
139. Widerstand, welchen das Wasser bei dem Durchgange durch die in den Röhrenleitungen etwa vorkommenden Krümmungen erleidet 42
140. Fall, wo die Leitungsröhre durch ein Mundstück in die freie Luft ausmündet 44
141. Fall, wo die Leitungsröhre unter dem Spiegel eines unteren Behälters ausmündet 47
142. Höhe der springenden Strahlen, welche durch Röhrenleitungen gespeis't werden 48

Bewegung des Wassers in offenen Kanälen und Flußbetten.

143. Bestimmung der Flächen von gleichem Niveau und des hydraulischen Druckes in einem Wasserstrome, welcher mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einem Flußbette von konstantem Gefälle herabgleitet 51

§.		Seite
144.	Allgemeine Gleichung für die beharrliche Bewegung des Wassers in einem offenen Flußbette	58
145.	Beharrliche und in allen Punkten gleiche Bewegung eines Wasserstromes in einem Bette von konstantem Gefälle und konstantem Querprofile. — Natürlicher Zustand des Stromes	65
146.	Beharrliche, aber in den verschiedenen Querschnitten ungleiche Bewegung eines Wasserstromes in einem Bette von konstantem Gefälle	67
147.	Betrachtungen über die Figur des oberen Spiegels eines Wasserstromes, welche aus den Gleichungen des vorhergehenden Paragraphs folgen	71
148.	Anwendung der früheren Formeln auf ein ganz unregelmäßiges Flußbett	86
149.	Veränderungen der Geschwindigkeit der Wassertheilchen in den verschiedenen Punkten Ein und desselben Querschnittes	87

Wirkung der Stauwerke in einem Wasserstrome.

150.	Begriff und Ursache des Staues	91
151.	Stauhöhe unmittelbar vor der Öffnung eines Schützbrettes. — Erster Fall; wenn die Schützöffnung ganz vom Spiegel des Unterwassers bedeckt ist	92
152.	Zweiter Fall; wenn die Schützöffnung frei in die atmosphärische Luft ausmündet	96
153.	Dritter Fall; wenn ein Theil der Schützöffnung von dem Spiegel des Unterwassers bedeckt ist	97
154.	Stauhöhe unmittelbar vor einem Überfalle oder überhaupt vor einem verengten Querschnitte, welcher nach oben offen ist	99
155.	Fall, wo der Querschnitt des Stromes, wie bei Brückenöffnungen, nur von den Seiten eingeengt ist	101
156.	Fall, wo der Spiegel des Unterwassers tiefer liegt, als die Sohle des Überfalles	102

Vom Stoße eines isolirten Strahles einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit.

157.	Allgemeine Betrachtungen über den Stoß eines flüssigen Strahles gegen einen starren Körper	104
158.	Stoß eines flüssigen Strahles gegen eine bewegte Fläche, wenn derselbe bei dem Stoße seine ganze relative Geschwindigkeit in Beziehung zur Fläche verliert	111
159.	Stoß eines flüssigen Strahles gegen eine bewegte Fläche, durch welche derselbe in einer gewissen Richtung abgelenkt wird, an der Fläche hingleitet und mit seiner relativen Eintrittsgeschwindigkeit auch wieder austritt	113
160.	Gerader Stoß eines flüssigen Strahles gegen eine um die Axe des Strahles symmetrische Fläche, an welcher derselbe hingleitet und dann wieder abfließt	115
161.	Schiefer Stoß eines flüssigen Strahles gegen eine ebene Fläche, wenn derselbe gezwungen ist, in zwei direkt entgegengesetzten Richtungen abzufließen	117
162.	Schiefer Stoß eines flüssigen Strahles gegen eine ebene Fläche, wenn derselbe Freiheit hat, sich nach allen Seiten über die Fläche zu verbreiten und abzufließen	121

§. Seite

Vom Stoße und Widerstande einer unbestimmt begränzten unpreßbaren Flüssigkeit.

163. Allgemeine Bemerkungen über den Stoß und den Widerstand einer unpreßbaren Flüssigkeit 128
164. Richtung der Stromfäden um einen Körper, welcher dem Stoße oder Widerstande einer Flüssigkeit ausgesetzt ist 128
165. Bestimmung des Gesammtstoßes oder Gesammtwiderstandes einer unbestimmt begränzten Flüssigkeit gegen einen starren Körper . . 132
166. Gerader Stoß und Widerstand des unbegränzten Wassers gegen dünne ebene Flächen bei geradliniger und gleichförmiger Bewegung . 137
167. Gerader Stoß und Widerstand des unbegränzten Wassers gegen prismatische Körper 138
168. Schiefer Stoß des bewegten Wassers gegen eine dünne ebene Fläche 139
169. Widerstand des ruhenden Wassers gegen eine in schiefer Richtung geradlinig bewegte dünne ebene Fläche 140
170. Widerstand des unbegränzten ruhenden Wassers gegen einen geradlinig bewegten Körper, dessen Vordertheil durch eine krumme konvexe Oberfläche begränzt ist 141
171. Widerstand des ruhenden Wassers gegen eine geradlinig bewegte Kugel 145
172. Widerstand des ruhenden Wassers gegen einen in der Richtung seiner Axe bewegten Kegel 146
173. Widerstand des ruhenden Wassers gegen einen geraden Zylinder mit kreisförmiger Basis, welcher sich perpendikular zu seiner Axe bewegt 147
174. Widerstand des ruhenden Wassers gegen einen Keil, dessen Schärfe voranschreitet 148
175. Widerstand des ruhenden Wassers gegen einen geradlinig bewegten Körper, dessen Vordertheil durch eine konkave Umwälzungsfläche begränzt ist 149
176. Widerstand des ruhenden Wassers gegen einen im Kreise gleichförmig herumbewegten Körper 151
177. Widerstand des ruhenden Wassers gegen schwimmende Körper . . 156
178. Widerstand des ruhenden Wassers in einem engen Kanale gegen einen schwimmenden Körper 159

Messung der Ausflußmenge und der Geschwindigkeit des Wassers in offenen Flußbetten.

179. Direkte Messung der Ausflußmenge in einem offenen Flußbette . . 161
180. Geschwindigkeitsmessungen mittelst Schwimmer 168
181. Geschwindigkeitsmessungen mittelst Instrumente, an welchen die statische Wirkung des Stoßes der Flüssigkeit zur Anwendung gebracht wird 174
182. Geschwindigkeitsmessungen vermittelst Instrumente, an welchen die dynamische Wirkung des Stoßes der Flüssigkeit zur Anwendung gebracht wird 181

III. Die Bewegung der schweren elastischen Flüssigkeiten.

183. Transformation der allgemeinen Gleichungen (234) und (235) für den Fall, daß die in einer engen Röhre sich bewegende Flüssigkeit schwer und vollkommen elastisch sei 184

§. Seite

184. Allgemeine Gleichungen für die Bewegung einer elastischen Flüssigkeit im Beharrungszustande 189

Bewegung einer schweren elastischen Flüssigkeit aus einem Gefäße, welches keine plötzlichen Querschnittsveränderungen enthält, im Beharrungszustande.

185. Beharrlicher Ausfluß einer elastischen Flüssigkeit aus einer Röhre, welche keine plötzliche Erweiterungen oder Verengungen enthält . 193
186. Ausfluß einer elastischen Flüssigkeit aus einem Gasometer im Beharrungszustande 197
187. Kontraktion des flüssigen elastischen Strahles und Ausfluß aus Öffnungen in dünnen Wänden 199
188. Nähere Betrachtung des beharrlichen Ausflusses einer elastischen Flüssigkeit, wenn der äußere Druck p'' ungemein schwach oder gar gleich null ist 202

Bewegung einer unvollkommen elastischen Flüssigkeit im Beharrungszustande.

189. Gleichung für den beharrlichen Ausfluß einer unvollkommen elastischen Flüssigkeit 206
190. Beziehung zwischen der Ausflußgeschwindigkeit einer unvollkommen elastischen Flüssigkeit und der vertikalen Höhe eines Prismas dieser Flüssigkeit, welches von oben unter dem Drucke p'' erhalten wird 214
191. Muthmaßliche Werthe der Koeffizienten **K** und **c** für atmosphärische Luft 218

Erfahrungen und praktische Formeln für den Ausfluß elastischer Flüssigkeiten unter bedeutenden Pressungs-Differenzen.

192. Erfahrungen von Barré de Saint-Venant und Wantzel 224

Ausfluß einer schweren vollkommen elastischen Flüssigkeit aus einem Gefäße, welches sich allmählig leert.

193. Gleichungen für den Ausfluß einer elastischen Flüssigkeit durch eine sehr kleine Öffnung aus einem sich leerenden Gefäße 227
194. Ausfluß einer elastischen Flüssigkeit aus einem Gefäße, welches sich leert, in ein Gefäß, welches sich füllt 231

Bewegung einer schweren elastischen Flüssigkeit in einem Gefäße, dessen Querschnitt sich an einigen Stellen plötzlich ändert.

195. Beharrlicher Ausfluß aus einem Gefäße, dessen Querschnitt sich an gewissen Stellen plötzlich um eine endliche Größe ändert . . . 233
196. Beharrlicher Ausfluß einer elastischen Flüssigkeit aus einem Gefäße, an welchem die Ausflußöffnung mit einer zylindrischen Ansatzröhre versehen ist 237

Bewegung der elastischen Flüssigkeit in Röhrenleitungen.

197. Reibung einer elastischen Flüssigkeit an den Wänden einer engen Röhre 241
198. Gleichungen für die beharrliche Bewegung einer elastischen Flüssigkeit in einer Röhrenleitung 243
199. Beharrlicher Ausfluß einer elastischen Flüssigkeit aus einer Leitungsröhre, in welche die Flüssigkeit mit Kontraktion eintritt . . . 249

§. Seite

200. Beharrlicher Ausfluß einer elastischen Flüssigkeit aus einer Röhrenleitung, in welcher sich verschiedene Zwischenwände, Erweiterungen und Verengungen, Ventile und Hähne, Kniee und starke Krümmungen befinden 258
201 Geschwindigkeit des Stempels in der Triebröhre einer atmosphärischen Eisenbahn 266

Vibration einer elastischen Flüssigkeitssäule. — Fortpflanzung des Schalles in engen Röhren.

202. Allgemeine Gleichungen für die Geschwindigkeit und Dichtigkeit in den verschiedenen Punkten einer bewegten Luftsäule 271
203. Diskussion der allgemeinen Gleichungen des vorstehenden Paragraphs. — Fortpflanzung der Bewegung. — Koexistenz verschiedener Systeme von Bewegungen 277
204. Gleichungen für die Vibrationen einer Luftsäule 282
205. Diskussion der vorstehenden Gleichungen. — Schallbewegungen in der Luft 290

Vom Stoße und Widerstande einer unbestimmt begränzten elastischen Flüssigkeit.

206. Allgemeine Formeln für den Stoß und Widerstand einer elastischen Flüssigkeit gegen starre Körper 302

Von der Bewegung geworfener Körper in widerstehenden Mitteln.

207. Geradlinie Bewegung eines freien Körpers in einem widerstehenden Mittel 308
208. Horizontale Bewegung eines geworfenen Körpers in einem widerstehenden Mittel 310
209. Geradlinige Bewegung eines geworfenen Körpers in einem widerstehenden Mittel, wenn die stetig in denselben wirkende Kraft konstant ist 313
210. Krummlinige Bewegung eines in der Luft geworfenen schweren Körpers 319
211. Bewegung einer in der Luft geworfenen dünnen ebenen Scheibe . . 325
212. Vertikale Bewegung eines leichten kugelförmigen Körpers unter Berücksichtigung des Auftriebes der Flüssigkeit 335
213. Vertikale Bewegung eines Körpers in der atmosphärischen Luft unter Berücksichtigung der veränderlichen Dichtigkeit der Letzteren . . 340
214. Modifikation der vertikalen Bewegung eines Körpers in einem bewegten Medium 344

Anhang.

215. Werthe einiger wichtigen Zahlen und Größen, sowie Zusammenstellung der Maaßen und Gewichte verschiedener Länder 350

Druckfehler.

Ueberall, wo im gegenwärtigen Werke der Werth der Fallgeschwindigkeit am Ende der ersten Sekunde für Berlin zu $g = 31{,}2644$ Fuß rheinländisch angegeben ist, lies $g = 31{,}2649$ Fuß, welcher letztere Werth der von Bessel beobachteten Pendellänge von 994,2239 Millimeter genauer entspricht, als der erstere, der bona fide aus Schubarth's physikalischen Tabellen Nro. 24 entnommen ist. (Vergl. die Tabellen im Anhange dieses Werkes.)

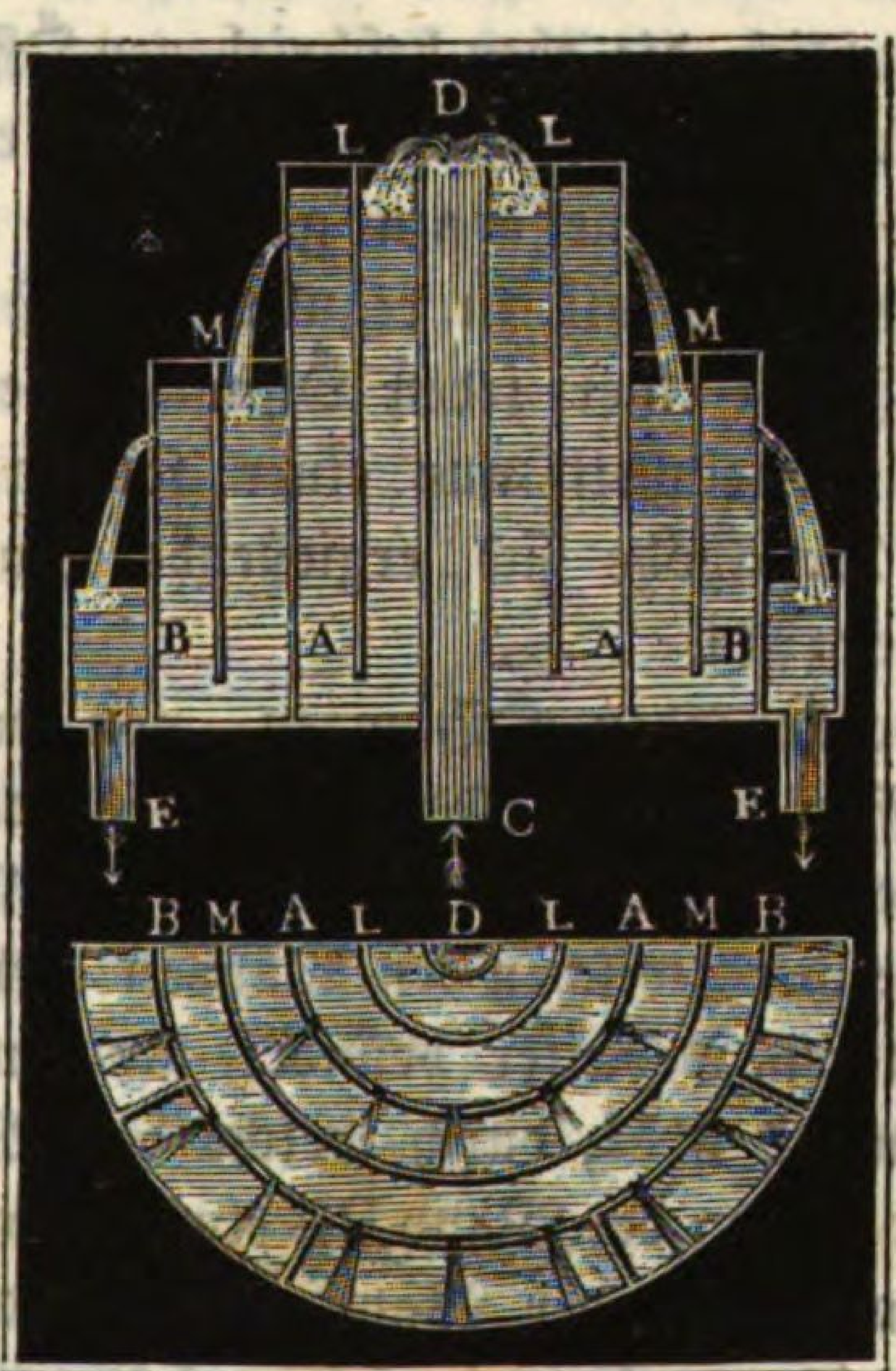
Seite 3,	Zeile 13	von oben	lies	daß statt wenn vielmehr.
» 31	» 10	»	»	oder statt 0 der.
» 32	» 16	»	»	Stellt statt dt stellt.
» 57	» 6	»	»	den Ufern und dem Boden statt den Ufern dem Boden.
» 67	» 12	»	»	$\frac{0{,}0000221}{V}$ statt $\frac{0{,}0000221}{v}$.
» 189	» 11	» unten	»	unverändert statt verändert.
» 191	» 9	»	»	$\frac{p'' \Omega V}{p_1 \omega_1}$ statt $\frac{p'' \Omega}{p_1 \omega_1}$.
» »	» 8	»	»	$\frac{p'' \Omega V}{p_2 \omega_2}$ statt $\frac{p'' \Omega}{p_2 \omega_2}$.
» 218	» 8	»	»	$\frac{w_1 p_2 - w_2 p_1}{w_2 - w_1}$ statt × $\frac{w_1 p_2 - w_2 p_1}{p_2 - p_1}$.
» 307	» 8	» oben	»	in Pfunden statt Pfunden.
» 311	» 8	» unten	»	$\frac{dv}{v^2}$ statt $\frac{dv}{dt}$.

In einigen Exemplaren steht die Figur auf Seite 70 auf dem Kopfe, und ist wie die gleiche Figur auf Seite 68 zu nehmen.

Messung des Wassers in den Speise- und Vertheilungsbehältern der Wasserleitungen.

§. 130. Gewöhnliches Verfahren bei der Messung des Wassers in den Speise- und Vertheilungsbehältern.

Bei den Anlagen, welche zum Zwecke haben, Wasser vermittelst Röhren von Einem Orte nach einem anderen zu leiten, kann man über eine gewisse Quantität Wasser verfügen, welche durch natürliche oder künstliche Zuleitung an den ersten Ort, von wo aus die Fortleitung beginnen soll, geführt wird. Es kommt nun zuvörderst darauf an, die in jedem Augenblicke disponibele Quantität des zu vertheilenden und fortzuleitenden Wassers, welche sich in der Regel mit der Zeit etwas ändert, genau zu bestimmen, und alsdann auch diese Wassermasse stets nach gewissen festgesetzten Verhältnissen unter beliebige Interessenten der Leitung zu vertheilen. Dies geschieht in der Regel auf folgende Weise.



Man läßt das disponibele Wasser, welches etwa durch eine Steigeröhre CD auf die Höhe bei D gehoben werde, in einen sogenannten Speisebehälter treten, welcher innerhalb der Wand AA liegt. In diesem Behälter befindet sich eine Scheidewand LL, welche entweder nicht ganz bis auf den Boden reicht, oder doch nahe am Boden Durchflußöffnungen besitzt. Das aus der Röhre bei D mit lebhafter Geschwindigkeit sich vor die Wand LL ergießende Wasser verliert bei dem Durchgange durch diese Wand seine Geschwindigkeit zum größten Theil und bildet vor der Wand AA einen ziemlich ruhigen horizontalen Spiegel. In der Wand AA sind eine große Anzahl gleicher Öffnungen in derselben Höhe angebracht, welche beliebig geöffnet oder verschlossen werden können. Von diesen Öffnungen öffnet man gerade so viele, daß der Wasserspiegel vor der Wand AA eine vorher genau bestimmte Höhe annimmt. Ist Dies geschehen; so ergießt sich aus einer jeden der in Thätigkeit gesetzten Öffnungen in derselben Zeit dieselbe genau bekannte Menge Wasser, welche wir mit Q bezeichnen wollen, und man ist im Stande, zu jeder Zeit aus der Anzahl n der in Thätigkeit begriffenen Ausflußöffnungen auf die Ergiebigkeit der Speiseröhre CD, welche $= n$Q sein wird, zu schließen.

Es ist gebräuchlich, die eben beschriebenen Öffnungen in dünnen vertikalen Platten anzubringen, denselben eine kreisförmige Gestalt von 1 Zoll Durchmesser zu geben, und den Wasserstand vor der Wand AA dergestalt zu reguliren, daß der Wasserspiegel den höchsten Punkt einer jeden Öffnung eben berührt. Die in einer gewissen Zeiteinheit aus einer solchen Öffnung unter einer gegebenen Druckhöhe sich ergießende Wassermenge nennt man einen Wasserzoll.

Durch die vorstehenden Öffnungen, von denen bald mehr, bald weniger geöffnet werden, sodaß die Höhe des Spiegels vor der Wand AA stets konstant bleibt, fällt das Wasser aus dem Speisebehälter, welcher zwischen den Wänden AA und BB liegt. Auch in dem letzteren Behälter befindet sich eine der LL ganz ähnliche Zwischenwand MM, durch welche das Wasser am Boden heraustritt, damit es vor der Wand BB einen ruhigen horizontalen Spiegel bilden kann. In der Wand BB befinden sich eine bestimmte Anzahl gleicher und in derselben Höhe liegender Öffnun-

gen, welche stets sämmtlich geöffnet bleiben. Aus einer jeden dieser Öffnungen ergießt sich alsdann immer derselbe aliquote Theil der ganzen zu vertheilenden Wassermasse, wenn auch dieser Theil mit der Höhe des Spiegels vor der Wand **BB** von Zeit zu Zeit variirt.

Die letzteren Öffnungen führen das Wasser endlich in einen Nebenbehälter, in welchem sich für die verschiedenen Interessenten der Leitung die entsprechenden Abtheilungen befinden, aus denen das Wasser in die für diese Interessenten bestimmten Abfallröhren **E, E** sich ergießt.

Es versteht sich von selbst, wenn das disponibele Wasser nicht nach gewissen geometrischen Verhältnissen unter die Interessenten, sondern dergestalt vertheilt werden soll, wenn vielmehr ein jeder Interessent stets dieselbe Ein für alle Mal bestimmte Quantität Wasser erhalten soll, während das übrige Quantum, welches sich mit der Zeit mehr oder weniger ändert, zu einem besonderen Zwecke abgeführt wird, daß sich alsdann in der Wand **BB** unmittelbar über der zu dem letzteren Zwecke angelegten Abfallröhre mehrere Ausflußöffnungen befinden müssen, welche geöffnet und verschlossen werden können, damit man vermittelst dieser Öffnungen den Wasserstand auch in dem Vertheilungsbehälter dergestalt reguliren kann, daß derselbe über den Öffnungen der Wand **BB** stets dieselbe Höhe behält.

Sollte das durch die Steigeröhre **CD** gehobene Wasser bloß gemessen und weitergeleitet, nicht aber nach gewissen Verhältnissen vertheilt werden; so leuchtet ein, daß der eigentliche Vertheilungsbehälter zwischen den Wänden **AA** und **BB** hinwegfällt.

§. 131. Bestimmung des Werthes des Wasserzolles.

Um möglichst genau die Ausflußmenge Q zu bestimmen, welche sich in Einer Sekunde aus einer kreisförmigen, in einer dünnen vertikalen Wand befindlichen Öffnung von Einem Zoll Durchmesser ergießt, wenn der davor stehende Wasserspiegel eben den höchsten Punkt der Öffnung berührt, muß man in der Formel

$$Q = m\Omega V,$$

worin Ω die Größe der Öffnung, V die Ausflußgeschwindigkeit

und m den entsprechenden Kontraktionskoeffizienten bezeichnet, für V den aus Gl. (329) sich ergebenden Werth der mittleren Ausflußgeschwindigkeit substituiren, indem der Näherungswerth von $V = \sqrt{2gh}$, worin h die Druckhöhe über der Mitte der Öffnung bezeichnet, in dem vorliegenden Falle sich schon merklich von der Wahrheit entfernen möchte. Außerdem hat man zu beachten, daß bei einer so geringen Druckhöhe die Senkung nicht vernachlässigt werden darf, welche der Wasserspiegel vor der Öffnung erleidet. Da diese Senkung ziemlich nahe 1 Linie beträgt; so leuchtet ein, daß man in der Formel (329), wonach

$$V = \sqrt{2gh}\left[1 - \frac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \frac{5}{1024}\left(\frac{r}{h}\right)^4 - \text{etc.}\right]$$

ist, $r = 6$ Linien, $h = 7$ Linien, also $\frac{r}{h} = \frac{6}{7}$ anzunehmen hat. Substituirt man diesen Werth $\frac{6}{7}$ für den Quotienten $\left(\frac{r}{h}\right)$, setzt darauf aber, um die Geschwindigkeit V pro Sekunde in Fußen auszudrücken $h = \frac{7}{144}$ Fuß und $g = 31{,}2644$ Fuß; so kommt

$$V = \sqrt{2.31{,}2644.\frac{7}{144}}\left[1 - \frac{1}{32}\left(\frac{6}{7}\right)^2 - \frac{5}{1024}\left(\frac{6}{7}\right)^4 - \text{etc.}\right]$$

$$= 1{,}7434\,(1 - 0{,}02296 - 0{,}00264 - \text{ etc.})$$

$$= 1{,}7434 \,.\, 0{,}9744 = 1{,}6987 \text{ Fuß.}$$

Da nun $\Omega = \left(\frac{1}{24}\right)^2 \pi = 0{,}005454$ Quadratfuß ist; so erhält man für den Werth des Wasserzolles pro Sekunde, wenn man den Kontraktionskoeffizienten m, wie Dies im gegenwärtigen Falle in Frankreich jetzt fast allgemein geschieht, $= 0{,}7$ setzt,

$$Q = 0{,}7 \,.\, 0{,}005454 \,.\, 1{,}6987 = 0{,}006486 \text{ Kubikfuß.}$$

In der Minute würde die fragliche Öffnung 0,38916 Kubikfuß, in der Stunde 23,3496 = nahezu 23⅓ Kubikfuß, und demnach in 24 Stunden 560,39 oder nahezu 560 Kubikfuß Wasser liefern.

Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen.

§. 132. Reibung einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit an den Wänden einer engen Röhre.

Das Wesentliche einer Röhrenleitung besteht darin, daß das in einem oberen Behälter, dem Speise- oder Sammelbehälter, befindliche Wasser in eine Röhre tritt, deren Querschnitt im Vergleich zu ihrer Länge sehr klein ist, daß das Wasser vermittelst dieser Röhre nach einem mehr oder weniger entlegenen Orte geleitet wird und sich alsdann entweder in die freie Luft oder in einen zweiten Behälter ergießt.

Man sieht hieraus, daß die gesammte Anordnung einer Röhrenleitung mit den zugehörigen Behältern hinsichtlich der äußeren Form durchaus Nichts darbietet, was nicht unter der allgemeinsten Gestalt der in den §§. 71 bis 74, 101, 106 und 110 betrachteten Gefäße von beliebiger Form verstanden wäre, daß man also auch die Resultate jener Paragraphe, welche sich vorzugsweise auf die beharrliche Bewegung der Flüssigkeit beziehen, auch ohne Weiteres auf irgend eine Röhrenleitung würde in Anwendung bringen können, wenn man von dem Reibungswiderstande abstrahiren wollte, welchen das Wasser bei dem Durchgange durch die Leitungsröhre erleidet.

Ferner erkennt man, daß wenn die beiden oben erwähnten Behälter nahezu Gefäße mit einer vertikalen Axe sind, durch welche sich das Wasser in parallelen Schichten bewegt, wie es in der Praxis fast immer der Fall ist, man unter derselben Voraussetzung, wie vorhin, auf die ganze Leitung die Formeln des §s 58 und alle hieraus gezogenen Resultate anwenden könnte, wenn man darin die der Gestalt dieser Leitung mit Einschluß der Behälter entsprechenden Substitutionen machte.

Da jedoch hier, bei der bedeutenden Länge der Leitungsröhre der Widerstand der Röhrenwände gegen die Flüssigkeit so bedeutend wird, daß er nicht ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden darf; so sieht man sich genöthigt, zu den allgemeineren Formeln des §s 57 zurückzukehren, in welchen das dem eben erwähnten Widerstande entsprechende Glied ebenfalls mit berücksichtigt ist.

Man hat diesem Widerstande, welchen die Flüssigkeit bei ihrer Bewegung in einer Röhre erleidet, den Namen Reibung

gegeben; jedoch darf man hierbei nicht an das Phänomen der Reibung zwischen starren Körpern denken. Das letztere, welches daraus entsteht, daß sich die unebenen Oberflächen zwier Körper mit ihren Erhabenheiten gegeneinander stemmen und so der Fortbewegung des Einen auf dem anderen ein Hinderniß entgegensetzen, wirkt auch, wenn beide Körper in Ruhe sind und durch eine Kraft in Bewegung gesetzt werden sollen. Ehe diese Kraft einen gewissen Betrag erreicht hat, bleiben beide Körper in der anfänglichen Lage in Ruhe, und die Bewegung erfolgt erst, wenn die bewegende Kraft die fragliche Gränze überschreitet. Eine solche Erscheinung findet bei der Bewegung einer Flüssigkeit in einem röhrenförmigen Gefäße in irgend einem erheblichen Grade nicht statt. Denn sonst müßte, wenn man sich eine umgebogene Röhre mit zwei vertikalen Schenkeln denkt, in denen die Flüssigkeit gleich hoch steht, in den Einen Schenkel eine bestimmte Quantität der Flüssigkeit hinzugegossen werden können, ehe sich der Spiegel in dem anderen Schenkel höbe, auch müßte diese hinzuzugießende Quantität mit der Länge der Schenkel oder der zu bewegenden Masse zunehmen, was Beides nicht der Fall ist, indem die geringste Erhöhung des Einen Spiegels auch eine Erhebung des anderen Spiegels zur Folge hat, wie hoch auch beide Schenkel sein mögen.

Inzwischen bemerkt man bei diesem Experimente, daß bei einer sehr geringen Erhöhung des Einen Spiegels sich zuvörderst die Mitte des anderen Spiegels hebt, und dieser Spiegel eine gewölbte Form annimmt, indem die an der Röhrenwand liegenden Theilchen an derselben zu haften streben. In einer ähnlichen Lage befinden sich sämmtliche horizontalen Querschichten, in welche man sich die Flüssigkeit zerlegt denken kann. Diese Erscheinung rührt von der Adhäsion her, welche die Flüssigkeit gegen die Substanz der Röhrenwände besitzt.

Soll nun eine kontinuirliche Bewegung der Flüssigkeit eintreten; so müssen die vermöge der Adhäsion an den Wänden haftenden Theilchen auf die ganze Länge der Röhre stets von der Stelle der starren Wand, an welcher sie sich eben befinden, losgerissen werden, wozu ein gewisser Kraftaufwand erforderlich ist, der umso mehr wächst, je größer die Geschwindigkeit wird, mit welcher Dies geschehen soll.

Vermöge der Kohäsion, welche die Flüssigkeit besitzt, werden sich nun die Theilchen, welche den an die Röhrenwand gränzenden zunächst liegen, ebenfalls nur unter der Wirkung einer gewissen bewegenden Kraft von den Letzteren losmachen und sich mit größerer Geschwindigkeit weiterbewegen, als diese, wozu sie doch wiederum durch die Anhänglichkeit an die der Röhrenaxe zunächst liegenden Theilchen, welche den geringsten Widerstand erfahren, getrieben werden.

Adhäsion an die Röhrenwände und Kohäsion der flüssigen Theilchen unter sich sind also die Hauptursachen, welche den Widerstand bedingen, der sich bei der Bewegung einer Flüssigkeit durch ein röhrenförmiges Gefäß äußert. Hierzu kommen übrigens noch, vielleicht als ein nicht unwichtiger Theil jenes Widerstandes, die Verluste an lebender Kraft, welche die in Bewegung begriffene Flüssigkeit durch die kleinen Störungen erleidet, die sich in Folge der Unebenheiten der Röhrenwände bei den diesen Wänden nahe liegenden Theilchen einstellen.

Es kommt jetzt darauf an, den Einfluß zu bestimmen, welchen die eben beschriebene Reibung der Flüssigkeit an den Röhrenwänden auf die Bewegung ausübt. Diese Frage, welche nur durch Versuche entschieden werden kann, ist nur für solche Fälle einer genaueren Untersuchung unterworfen, wo die Röhre überall einen konstanten Querschnitt besitzt. Man hat gefunden, daß die Wirkung der Reibung auf das gesammte in einer engen Röhre befindliche Wasser bei gleicher Durchflußgeschwindigkeit im geraden Verhältnisse mit der Länge, ferner im umgekehrten Verhältnisse mit der Größe des Querschnittes und im geraden Verhältnisse mit dem inneren Umfange der Röhre variirt. Auf eine jede elementare Schicht der Flüssigkeit von derselben Länge ds in der Röhre wirkt also die Reibung mit einer Kraft, welche umgekehrt, wie der Querschnitt, und direkt, wie der Umfang des Letzteren variirt, was bei Röhren mit kreisförmigem Querschnitte, wo die Fläche des Letzteren ein Produkt aus der zweiten Potenz des Umfanges in eine konstante Zahl ist, einfach auf eine Variation im umgekehrten Verhältnisse mit dem Umfange oder Durchmesser der Röhre hinausläuft. Ändert sich die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre; so variirt die Wirkung der fraglichen Reibung zuvörderst wie das Quadrat jener Geschwindigkeit, jedoch nicht genau, und

man muß noch ein Glied hinzufügen, welches ebenfalls von dieser Geschwindigkeit abhängig, aber von verschiedenen Schriftstellern verschieden angenommen ist. Die Kenntniß dieser von einzelnen Schriftstellern aufgestellten Formeln ist darum von Interesse, weil man, wenn es nicht auf eine mathematische Genauigkeit der Rechnung ankommt, die ja doch bei solchen Aufgaben der Praxis nicht erreicht werden kann, sich bald der Einen, bald der anderen bedienen kann, jenachdem die Komposition der Aufgabe diese oder jene als die bequemere erscheinen läßt.

In §. 55 und 57 tritt die Reibung als eine Kraft auf, deren Wirkung auf die Masseneinheit der Flüssigkeit gleich F ist, sodaß F auch die Geschwindigkeit darstellt, welche jene Kraft der Materie in der Zeiteinheit mitzutheilen oder zu entziehen fähig ist. Im Allgemeinen kann man nach dem Vorstehenden also setzen

$$F = \varkappa \frac{V^2}{2D} \quad \ldots\ldots (564)$$

Hierin bezeichnet

V die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in der Röhre,

D den Durchmesser der Röhre, wobei vorausgesetzt ist, daß der Querschnitt Ω der Röhre kreisförmig sei. Ist Dies nicht der Fall, und stellt Ψ den inneren Umfang der Röhre dar; so hat man

$$D = \frac{4\Omega}{\Psi} \quad \ldots\ldots (564^a)$$

zu setzen, wodurch

$$F = \varkappa \frac{\Psi}{8\Omega} V^2 \quad \ldots\ldots (564^b)$$

werden würde. Endlich ist

$\varkappa$ ein Koeffizient, welcher aus einem konstanten und einem von V abhängigen Gliede besteht.

Als ersten Näherungswerth für den Koeffizienten $\varkappa$ erhält man nach Eytelwein für rheinländisches Maaß und wenn die Flüssigkeit aus Wasser und die Röhre aus Metall besteht,

$$\varkappa = 0{,}031, \quad \ldots\ldots (565)$$

welcher bei Geschwindigkeiten zwischen $\frac{1}{2}$ und 2 Fuß in der Sekunde mit ziemlicher Sicherheit zu gebrauchen ist.

Genauere Resultate erhält man übrigens, wenn man nach Eytelwein

$$\varkappa = \alpha + \frac{\beta}{V} = 0{,}022 + \frac{0{,}0056}{V} \quad \ldots . (566)$$

setzt, eine Formel, welche aus den Versuchen von Dubuat, Bossut und Couplet abgeleitet ist und bis zu Geschwindigkeiten von 8 Fuß in der Sekunde unbedenklich angewandt werden kann.

Nach Weisbach, welcher diese Versuche ebenfalls, außerdem aber noch seine eigenen bei viel größeren Geschwindigkeiten angestellten Versuche zu Grunde gelegt hat, kommt folgender Ausdruck

$$\varkappa = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{V}} = 0{,}0144 + \frac{0{,}0169}{\sqrt{V}} \quad \ldots . (567)$$

der Wahrheit am nächsten. Man wird sich desselben bei Geschwindigkeiten bis zu 20 Fuß in der Sekunde noch mit großer Sicherheit bedienen können.

Um der Berechnung dieses Koeffizienten für verschiedene Werthe von V überhoben zu sein, hat Weisbach folgende kurze Tabelle mitgetheilt

Werthe von V in Fußen	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Werthe von $\varkappa$	0,0679	0,0522	0,0453	0,0411	0,0383	0,0362	0,0346	0,0333	0,0322

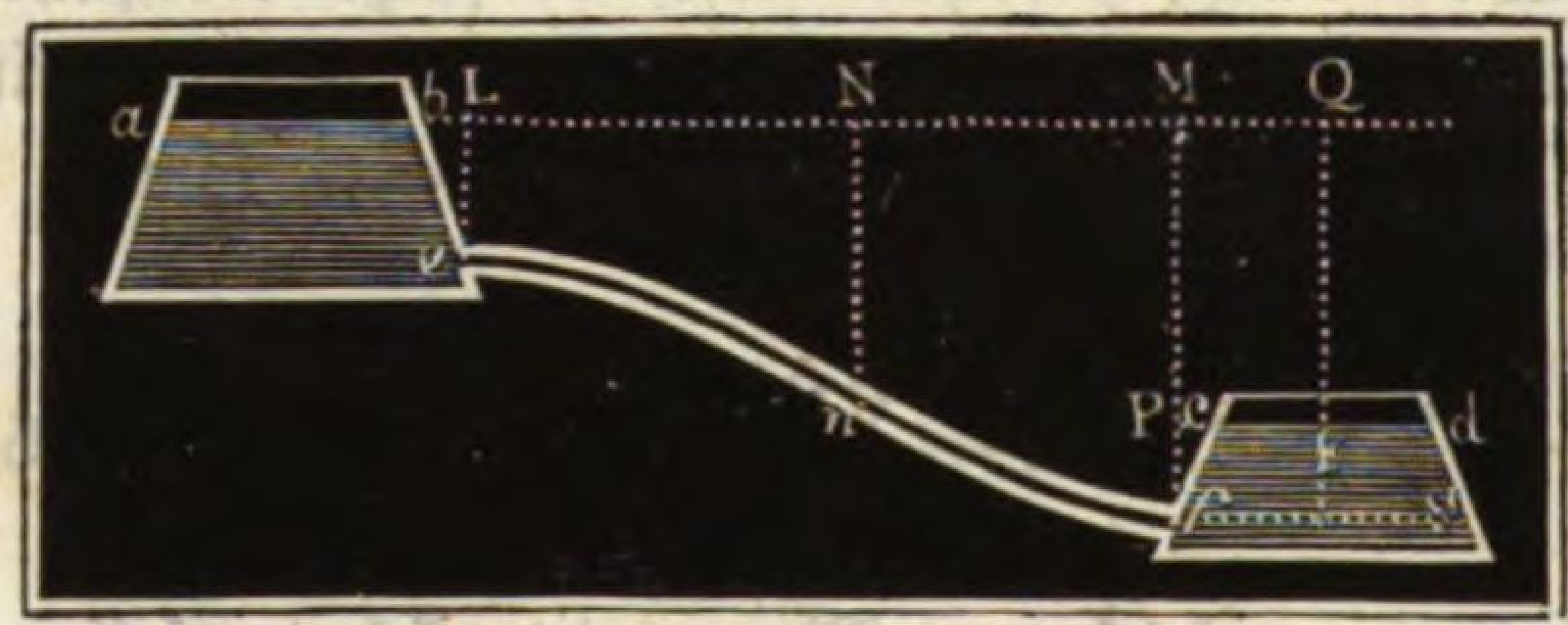
V	1	1,25	1,5	2	3	4	6	8	12	20
$\varkappa$	0,0313	0,0296	0,0282	0,0263	0,0242	0,0229	0,0213	0,0204	0,0192	0,0182

Die vorstehenden Werthe von $\varkappa$ beziehen sich, wie schon erwähnt, auf die Bewegung des Wassers durch metallene Röhren von der gewöhnlichen Qualität. Bei hölzernen Röhren hat man nach Weisbach diese Werthe von $\varkappa$ mit 1,75 zu multipliziren.

§. 133. Allgemeine Gleichungen für die beharrliche Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen, un-

ter Berücksichtigung des Widerstandes der Reibung an den Röhrenwänden.

In dem oberen Behälter wird das Wasser auf der konstanten Höhe *ab* erhalten. Dasselbe ergießt sich aus diesem Behälter durch die Röhre *enf*, welche im Allgemeinen denselben Querschnitt, jedoch auch einige Stellen besitzt, wo das Wasser gezwungen wird, aus einem kleineren Querschnitte plötzlich in einen größeren überzugehen, und welche außerdem nur sehr sanfte Krümmungen besitzt, in den unteren Behälter, in welchem sich



ebenfalls ein konstanter Spiegel *cd* gebildet hat, sodaß die Bewegung des Wassers in allen Theilen der Leitung beharrlich geworden ist.

Es sei

ω die Fläche irgend eines normalen Querschnittes der beiden Gefäße oder der Röhre *ef*,

O′, O″ resp. die Fläche des oberen und unteren Spiegels *ab* und *cd*,

Ω der konstante Querschnitt der Röhre *ef*,

ω_1, ω_2 irgend zwei unmittelbar aufeinander folgende Querschnitte der Gefäße oder der Röhre, welche sich plötzlich um endliche Größen ändern, sodaß $\omega_2 > \omega_1$ ist,

z der vertikale Abstand N*n* des Mittelpunktes irgend eines Querschnittes ω von dem oberen Spiegel *ab*,

Z der konstante Höhenunterschied QF der beiden Spiegel *ab* und *cd*. Wenn die Röhre *ef* nicht in einen unteren Behälter, sondern in die freie Luft ausmündet; so stellt Z die Höhe des Spiegels *ab* über dem Mittelpunkte *f* der Ausflußöffnung oder erforderlichenfalls, wenn Z im Vergleich zu der vertikalen Dimension dieser Öffnung sehr klein ist, die mittlere Druckhöhe über der Ausflußöffnung *f* dar (vergl. §. 75),

V die konstante Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre ef, d. h. in dem Theile dieser Röhre, wo der Querschnitt konstant $= \Omega$ ist,

l die Länge des Theiles en der Röhre von der oberen Einmündung bis zu irgend einem Querschnitte n,

L die ganze Länge ef der Röhre,

Ψ der Umfang des konstanten Querschnittes Ω dieser Röhre,

$D = \frac{4\Omega}{\Psi}$ der mittlere Durchmesser der Röhre, dieselbe mag nun einen kreisförmigen oder sonstig geformten Querschnitt haben,

$w = \mu g$ das Gewicht der Volumeinheit der Flüssigkeit, wenn μ deren Dichtigkeit bezeichnet und $g = 31{,}2644$ Fuß pro Sekunde ist; man hat für das Gewicht eines Kubikfußes Wasser $w = 66$ Pfund,

$p' = p''$ der atmosphärische Druck auf die Flächeneinheit der beiden Spiegel ab und cd; man hat im Mittel $p' = 2090$ Pfund pro Quadratfuß,

p der hydraulische Druck in irgend einem Querschnitte ω der Behälter oder der Röhre,

Q das Volum der Flüssigkeit, welches sich in der Zeiteinheit durch die Röhre ergießt,

$\varkappa$ der im vorhergehenden Paragraph näher bestimmte, auf die Reibung des Wassers an den Wänden der Röhre ef Bezug habende Koeffizient.

Das in Gleichung (241) enthaltene Glied $\frac{w}{g}\int F\,ds$ oder $\frac{w}{g}\int F\,dl$, wenn man l an die Stelle von s setzt, welches den Widerstand der Reibung der ganzen in der Röhre ef enthaltenen Flüssigkeit darstellt, wird hier, wenn man das Integral für die ganze Länge L der Röhre nimmt, und dabei beachtet, daß der Werth von F, nämlich die Wirkung der Reibung auf die Masseneinheit der bei n befindlichen Flüssigkeit, von dem Orte dieses Punktes n oder von $en = s = l$ ganz unabhängig ist,

$$\frac{w}{g}\int_0^L F\,dl = \frac{w}{g} F \int_0^L dl = \frac{w}{g} L F,$$

und wenn man für F seinen Werth aus Gl. (564) substituirt,

$$= \varkappa \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} w.$$

Substituirt man diesen Werth in die Gl. (241), indem man gleichzeitig $p' = p''$, $R = o$, $z'' - z' = Z$, $\frac{dV}{dt} = o$ setzt und durch w dividirt; so kommt

$$Z = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{\Omega^2}{O''^2} - \frac{\Omega^2}{O'^2}\right) + \frac{V^2}{2g}\Sigma\left(\frac{\Omega}{\omega_1} - \frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2 + \varkappa \frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

oder

$$Z = \frac{V^2}{2g}\left[\left(\frac{\Omega^2}{O''^2} - \frac{\Omega^2}{O'^2}\right) + \Sigma\left(\frac{\Omega}{\omega_1} - \frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2 + \varkappa\frac{L}{D}\right] \dots . (568)$$

Hieraus folgt

$$V = \sqrt{\frac{2gZ}{\left(\frac{\Omega^2}{O''^2} - \frac{\Omega^2}{O'^2}\right) + \Sigma\left(\frac{\Omega}{\omega_1} - \frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2 + \varkappa\frac{L}{D}}} \dots . (569)$$

Der Ausdruck $\frac{V^2}{2g}$ stellt offenbar die Höhe dar, von welcher ein Körper frei herabfallen muß, um die Geschwindigkeit V zu erlangen, welche das Wasser in der Röhre besitzt. Bezeichnen wir dieselbe mit H; so ist

$$H = \frac{V^2}{2g}.$$

Analogisch seien

$$H' = \frac{V^2}{2g}\frac{\Omega^2}{O'^2} \text{ und } H'' = \frac{V^2}{2g}\frac{\Omega^2}{O''^2},$$

d. i., wenn man die Koeffizienten

$$\frac{\Omega^2}{O'^2} = K' \text{ und } \frac{\Omega^2}{O''^2} = K''$$

setzt,

$$H' = K'H,\ H'' = K''H,$$

die Fallhöhen, welche ein Körper durchlaufen muß, um resp. die

Geschwindigkeit $\frac{V\Omega}{O'}$ oder $\frac{V\Omega}{O''}$ zu erlangen, die das Wasser im oberen Spiegel O′ und im unteren Spiegel O″ besitzt.

Setzt man ferner einen Koeffizienten von der Form

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2=k_1;$$

so sei

$$h_1=\frac{V^2}{2g}\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2=k_1 H.$$

Endlich sei

$$h=\varkappa\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}=\varkappa\frac{L}{D}H.$$

Eine Substitution dieser Ausdrücke in die Gl. (568) ergibt

$$\left.\begin{aligned} Z&=\left(K''-K'+\Sigma k_1+\varkappa\frac{L}{D}\right)\frac{V^2}{2g} \\ &=\left(K''-K'+\Sigma k_1+\varkappa\frac{L}{D}\right)H \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (569^a)$$

d. i.

$$Z=H''-H'+\Sigma h_1+h$$

oder auch

$$Z+H'=H''+\Sigma h_1+h.$$

Hieraus ersieht man, daß die Summe aus der **Druckhöhe** $Z=OF$ und der **Geschwindigkeitshöhe** H′ der bei ab in das obere Gefäß eintretenden Schichten gleich ist der Summe 1) aus der **Geschwindigkeitshöhe** H″ der bei cd austretenden Schichten, 2) aus sämmtlichen **Widerstandshöhen** h_1 und h, welche sowol dem Durchgange des Wassers durch plötzliche Erweiterungen oder Verengungen, wie auch der Reibung des Wassers an den Röhrenwänden entsprechen.

Da die Ausflußgeschwindigkeit, d. h. die Geschwindigkeit $\frac{V\Omega}{O''}$, welche das Wasser bei dem Austritte aus dem unteren Spiegel cd besitzt, nach den vorstehenden Bezeichnungen

$$\frac{V\Omega}{O''}=\sqrt{2gH''}=\sqrt{2g(Z+H'-\Sigma h_1-h)}$$

ist; so folgt, daß diese Ausflußgeschwindigkeit einer Fallgeschwindigkeit entspricht, deren Höhe gleich der Druckhöhe Z, plus der Geschwindigkeitshöhe H′ für die bei *ab* eintretenden Schichten, minus sämmtlicher durch Verengungen, Erweiterungen und Reibungen hervorgebrachten Widerstandshöhen, wie h_1 und h, ist.

Aus der letzteren Betrachtung läßt es sich besonders klar überblicken, in welcher Weise Verengungen, Erweiterungen und Reibungen bei Röhrenleitungen die Ausflußgeschwindigkeit verzögern, und wie die Einführung von dergleichen schädlichen Widerständen einer direkten Verminderung der Druckhöhe oder des Gefälles Z gleichkommt.

Bestände die Röhre *ef* aus mehreren Stücken resp. von den Längen L′, L″ etc., welche resp. die konstanten Querschnitte Ω', Ω'' oder die konstanten Durchmesser D′, D″ etc. besäßen, in denen sich das Wasser resp. mit den Geschwindigkeiten

$$V' = \frac{\Omega}{\Omega'} V = \frac{D^2}{D'^2} V$$

$$V'' = \frac{\Omega}{\Omega''} V = \frac{D^2}{D''^2} V$$

etc.

bewegte, und welchen die Koeffizienten $\varkappa'$, $\varkappa''$ etc. entsprächen; so leuchtet nach Gl. (564) ein, daß man in sämmtlichen Formeln des gegenwärtigen Paragraphs die Summe

$$\varkappa \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} + \varkappa' \frac{L'}{D'} \frac{V'^2}{2g} + \varkappa'' \frac{L''}{D''} \frac{V''^2}{2g} + \text{etc.}$$

d. i.

$$\left(\varkappa \frac{L}{D} + \varkappa' \frac{L'}{D'} \frac{D^4}{D'^4} + \varkappa'' \frac{L''}{D''} \frac{D^4}{D''^4} + \text{etc.}\right) \frac{V^2}{2g}$$

an die Stelle von $\varkappa \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$

oder

$$\varkappa \frac{L}{D} + \varkappa' \frac{L'}{D'} \frac{D^4}{D'^4} + \varkappa'' \frac{L''}{D''} \frac{D^4}{D''^4} + \text{etc.}$$ an die Stille von $\varkappa \frac{L}{D}$

zu setzen habe.

Was übrigens die Werthe der Koeffizienten $\varkappa'$, $\varkappa''$ etc. betrifft; so erkennt man, daß dieselben entweder nach Gl. (565) sämmtlich konstant sind, oder aus den Gleichungen (566) oder

(567) erhalten werden, indem man darin resp. $\frac{D^2}{D'^2} V$ und $\frac{D^2}{D''^2} V$ für V substituirt.

Um jetzt den in irgend einem Querschnitte ω der Gefäße oder der Röhre stattfindenden hydraulischen Druck p zu bestimmen; so hat man für denselben, wenn ω oberhalb der Röhrenmündung e, also im Speisebehälter, aber auch oberhalb der in diesem Behälter etwa vorkommenden Scheidewände oder plötzlichen Erweiterungen des Querschnittes liegt, nach den Prinzipien des §s 97 und speziell nach Gl. (371)

$$p = p' + wz - w\frac{V^2}{2g}\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{O'^2}\right) \quad \ldots . (570)$$

Wenn der Querschnitt ω in der Röhre ef bei n liegt, für welchen Punkt $en = l$ ist, und es befinden sich oberhalb dieses Punktes eine gewisse Anzahl von plötzlichen Querschnittsveränderungen, welche die Summe $\Sigma'\left(\frac{\Omega}{\omega_1} - \frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2$ liefern; so findet man leicht, daß nach Gl. (241)

$$p' - p + wz - \varkappa\frac{l}{D}\frac{V^2}{2g}w = w\frac{V^2}{2g}\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{O'^2}\right) + w\frac{V^2}{2g}\Sigma'\left(\frac{\Omega}{\omega_1} - \frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2,$$

sein müsse, daß also

$$p = p' + wz - w\frac{V^2}{2g}\left[\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{O'^2}\right) + \Sigma'\left(\frac{\Omega}{\omega_1} - \frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2 + \varkappa\frac{l}{D}\right] \ldots . (571)$$

ist.

Läge der Querschnitt ω im unteren Behälter, und gingen demselben eine Anzahl von plötzlichen Querschnittsveränderungen vorher, welche die Summe $\Sigma''\left(\frac{\Omega}{\omega_1} - \frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2$ lieferten; so würde

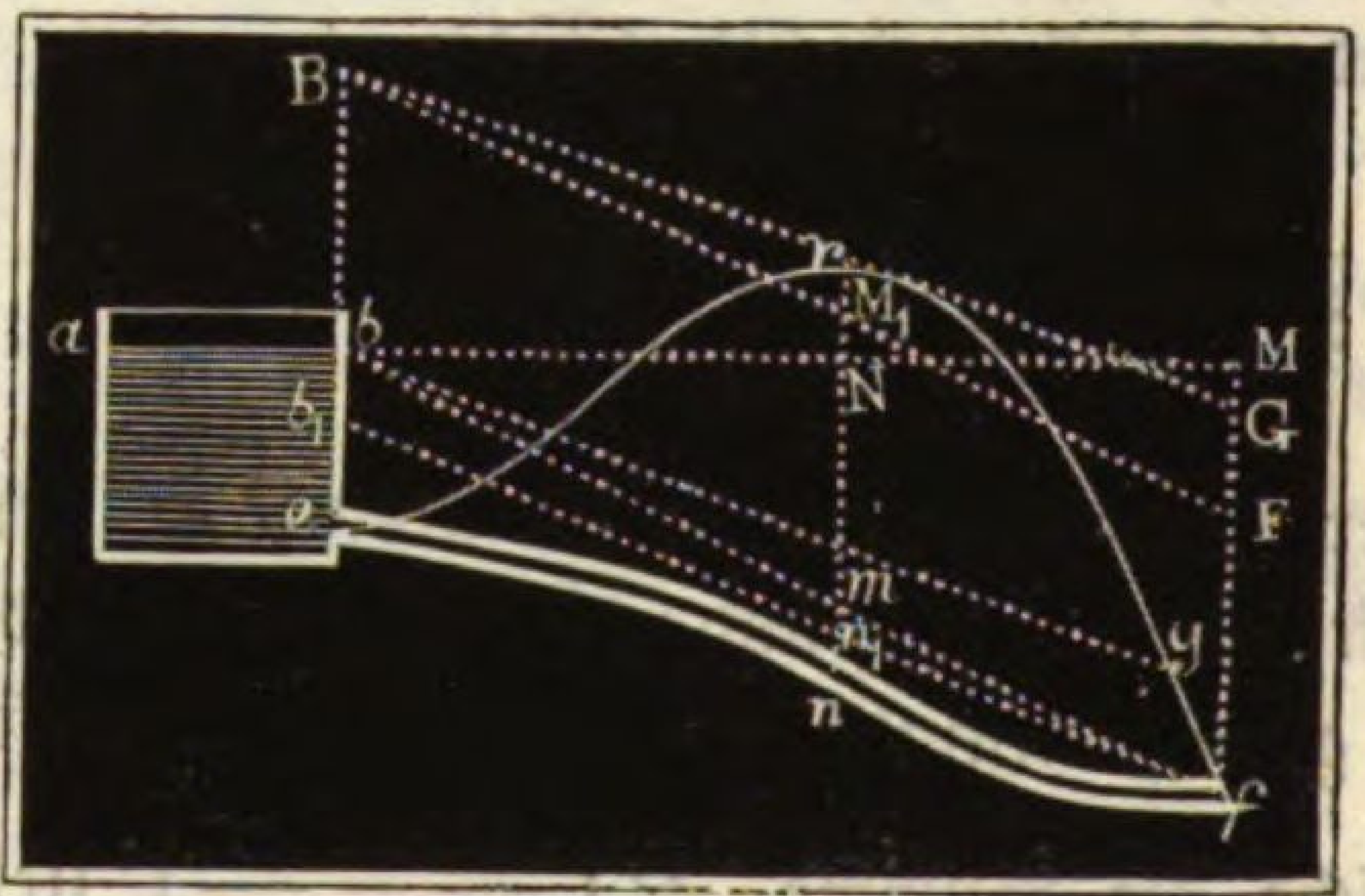
$$p = p' + wz - w\frac{V^2}{2g}\left[\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{O'^2}\right) + \Sigma''\left(\frac{\Omega}{\omega_1} - \frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2 + \varkappa\frac{L}{D}\right] \ldots . (572)$$

sein.

In den vorstehenden Gleichungen (570) bis (572) ist für V der Werth aus Gl. (569) zu substituiren.

§. 134. Fall, wo der untere Behälter nicht vorhanden ist, und die Röhre mit voller Öffnung in die freie Luft ausmündet; und wo außerdem die Röhre sowenig, wie das obere Gefäß, plötzliche Querschnittsveränderungen enthält, auch bei der Einmündung in die Röhre keine Kontraktion stattfindet.

Wenn in diesem Falle die Röhrenmündung bei *e* dergestalt nach vorn erweitert ist, daß daselbst beim Eintritte des Wassers



keine Kontraktion stattfindet; so fallen die hinter dem Zeichen Σ stehenden Glieder aus den Gleichungen im vorstehenden Paragraphe ganz hinweg; man hat ferner $O''=\Omega$ zu setzen, und unter der Voraussetzung, daß der Querschnitt der Röhre im Vergleich zu der Fläche O' des oberen Spiegels sehr klein sei, das Glied $\frac{\Omega^2}{O'^2}$ zu vernachlässigen, was damit übereinstimmt, daß man die Wasserschichten im oberen Spiegel als ruhend ansieht. Hiernach ergibt Gl. (568)

$$Z=\left(1+\varkappa\frac{L}{D}\right)\frac{V^2}{2g} \quad \ldots . (573)$$

Daraus folgt

$$V=\sqrt{\frac{2gZ}{1+\varkappa\frac{L}{D}}}, \quad \ldots . (574)$$

und man würde sich dieses Ausdruckes zur Berechnung von V unmittelbar bedienen können, wenn man für den Koeffizienten $\varkappa$ den konstanten Näherungswerth (565) annähme.

Unter dieser Voraussetzung würde denn auch der Druck in irgend einem Punkte des Gefäßes nach Gl. (570)

$$p = p' + wz \qquad \ldots . (575)$$

sein, wobei angenommen ist, daß ein jeder Querschnitt ω dieses Gefäßes gegen den Querschnitt Ω der Röhre ungemein groß wäre.

Für den Druck in irgend einem Querschnitte der Röhre, z. B. bei n, hat man nach Gl. (571)

$$p = p' + wz - w\frac{V^2}{2g}\left(1 + \varkappa\frac{l}{D}\right)$$

oder wenn man für V seinen Werth aus Gl. (574) substituirt,

$$p = p' + w\left(z - \frac{1 + \varkappa\frac{l}{D}}{1 + \varkappa\frac{L}{D}} . Z\right) \qquad \ldots . (576)$$

Der Faktor $\dfrac{1 + \varkappa\frac{l}{D}}{1 + \varkappa\frac{L}{D}}$ ist in den meisten Fällen, besonders wenn l von L nicht sehr verschieden ist, also für die unteren Punkte der Leitungsröhre, nahe $= \dfrac{l}{L}$. Unter dieser Vereinfachung erhält man

$$p = p' + w\left(z - \frac{l}{L}Z\right) \qquad \ldots . (577)$$

Wenn b der Punkt des oberen Spiegels ist, welcher vertikal über der Einmündung e der Röhre liegt, und man zieht von b nach der Ausmündung f der Röhre die gerade Linie bf; so werden in der Regel die Längen von bm und bf sehr nahe gleich den Längen en und ef, d. i. gleich l und L sein, und man wird haben $\dfrac{l}{L} = \dfrac{bm}{bf}$, folglich auch $Nm = Mf . \dfrac{bm}{bf} = Z\dfrac{l}{L}$. Da nun $Nn = z$ ist; so wird sehr nahe

$$nm = z - \frac{l}{L} Z$$

sein, und der im Punkte n herrschende Druck wird nach Gl. (577) dem hydrostatischen Drucke entsprechen, welcher in der Basis einer Wassersäule von der Höhe nm stattfindet, auf deren obere Fläche der atmosphärische Druck wirkt.

Denkt man sich in irgend einem Punkte n der Leitungsröhre ef eine feine Öffnung angebracht, und auf diese Öffnung ein ebenso feines Röhrchen nN gesetzt; so wird das Wasser in dem letzteren Röhrchen bis zur Höhe m steigen.

Macht man die Vertikale bB über dem Punkte b gleich $\frac{p'}{w}$, d. h. gleich der Höhe einer Wassersäule von etwa 31,7 Fuß, welche durch den atmosphärischen Druck im Gleichgewichte erhalten wird, und zieht BF parallel zu bf; so wird der in n herrschende Druck, inkl. des atmosphärischen, gleich dem Gewichte einer Wassersäule von der Höhe nM_1 sein. Solange nun die Linie nM_1 oberhalb des Punktes n liegt, wird jener Druck p positiv sein. Läge jedoch die fragliche Linie unterhalb des entsprechenden Punktes der Röhre, wie Dies z. B. der Fall wäre, wenn die Axe der Röhre die Form erf hätte, wobei sie die Linie BF irgendwo schneidet; so würde der Druck p negativ werden, indem man alsdann in Gl. (577)

$$w \frac{l}{L} Z > p + wz \text{ oder}$$

$$Z > \frac{L}{l} \frac{p}{w} + \frac{L}{l} z$$

hat. Da Dies eine Unmöglichkeit in sich schließen würde; so folgt, daß unter solchen Umständen das Wasser die Röhre nicht mehr ganz füllen und sich in dem unteren Theile der Röhre von den Wänden derselben losreißen würde. Um den Punkt g näherungsweise zu bestimmen, in welchem dieses Losreißen erfolgen würde, braucht man offenbar von B aus nur eine Tangente BG an die Axe erf der Röhre zu legen, und mit dieser Axe durch b die Parallele bg zu ziehen, welche die Axe der Röhre in dem gesuchten Punkte g schneiden wird. Unter diesen Umständen wird

man denn die Tiefe des Punktes *g* unter dem Spiegel *ab* als gesammte Druckhöhe Z in die früheren Formeln zu substituiren haben.

Solange die Axe *ef* der Röhre ganz unterhalb der Linie **BF** liegt, wird es nicht zu befürchten sein, daß das Wasser die Ausmündung bei *f* nicht ganz ausfüllte und ein Theil der Druckhöhe $Mf = Z$ nutzlos verloren ginge. Daß aber die Röhre *ef* ganz und gar unter der Linie **BF** liegt, hängt nicht von der Tiefe des Punktes *f* unter dem Spiegel *ab* oder von der Druckhöhe Z, sondern von der besonderen Form der Kurve *enf* ab, und man wird unter den gemachten Voraussetzungen, auf welche sich die Formel (577) gründet, immer im Stande sein, eine Röhrenleitung in jeder Tiefe mit vollem Strome ausmünden zu lassen, was, wie wir in §. 66 gesehen haben, nicht möglich ist, sobald die Flüssigkeit keinen Reibungswiderstand bei dem Durchgange durch die Röhre zu ertragen hat, welcher proportional mit der Länge dieser Röhre wächst.

Wenn man für den Koeffizienten $\varkappa$ die genauere Form (566)

$$\varkappa = \alpha + \frac{\beta}{V}$$

annimmt; so erhält man statt der Gl. (573) die folgende

$$Z = \frac{V^2}{2g} + \left(\alpha + \frac{\beta}{V}\right)\frac{L}{D}\,\frac{V^2}{2g}$$

oder

$$2gZ = \left(1 + \alpha\frac{L}{D}\right)V^2 + \beta\frac{L}{D}V, \quad \ldots . \; (578)$$

und hieraus ergibt sich

$$V = \frac{-\beta L + \sqrt{(\beta L)^2 + 8gZ(D + \alpha L)D}}{2(D + \alpha L)} \quad \ldots . \; (579)$$

Der Druck in irgend einem Punkte des Gefäßes bleibt nach Gl. (575)

$$p = p' + wz.$$

In irgend einem Querschnitte der Röhre *ef* ist der Druck nach der früheren Gleichung

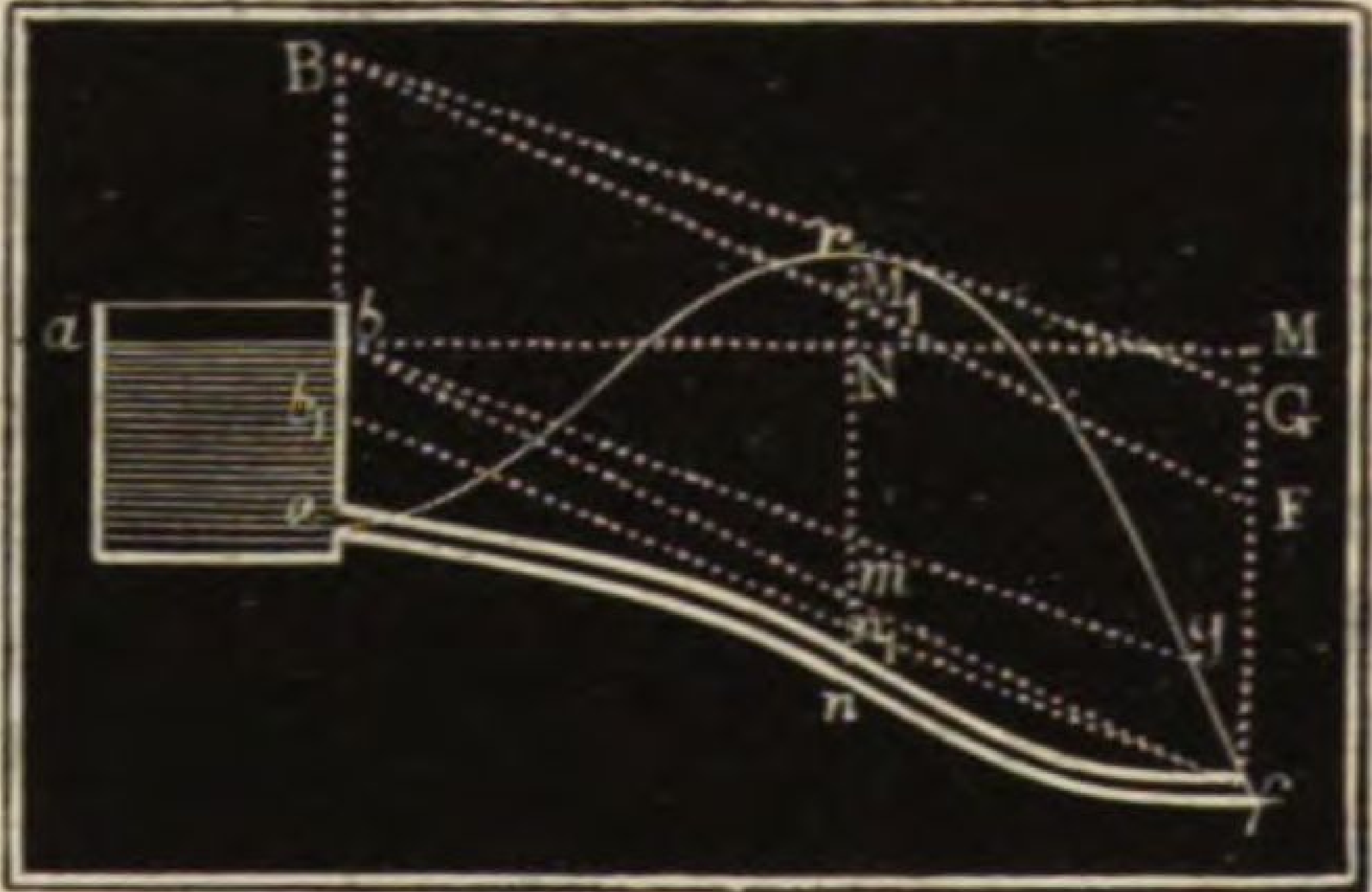
$$p = p' + wz - w\frac{V^2}{2g}\left[1 + \left(\alpha + \frac{\beta}{V}\right)\frac{l}{D}\right],$$

eine Gleichung, welche sich unter Berücksichtigung der Gl. (578) vorläufig auf

$$p = p' + w\left(z - \frac{l}{L}Z\right) - w\frac{V^2}{2g}\left(1 - \frac{l}{L}\right) \quad \ldots\ldots (580)$$

reduzirt.

In dieser Gleichung ist für V sein Werth aus Gl. (579) zu substituiren. Wenn man durch die vertikale Tiefe bb_1 die



der Geschwindigkeit V des Wassers in der Röhre zukommende Fallhöhe darstellt, sodaß

$$bb_1 = \frac{V^2}{2g}$$

ist, und man zieht die gerade Linie $b_1 f$; so wird sehr nahe

$$mm_1 = bb_1\left(1 - \frac{l}{L}\right) = \frac{V^2}{2g}\left(1 - \frac{l}{L}\right)$$

sein, vorausgesetzt, daß man sehr nahe $\frac{l}{L} = \frac{bm}{bf}$ habe. Es ist also auch

$$nm_1 = nm - mm_1 = z - \frac{l}{L}Z - \frac{V^2}{2g}\left(1 - \frac{l}{L}\right),$$

und es folgt, daß der im Punkte n herrschende Druck nach der Formel (580) gleich dem hydrostatischen Drucke ist, welcher einer Druckhöhe nm_1 entsprechen würde, plus dem atmosphärischen Drucke.

Setzt man für den Koeffizienten $\varkappa$ den Ausdruck (567) von der Form

$$\varkappa = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{V}};$$

so ergibt sich statt Gl. (573)

$$Z = \frac{V^2}{2g} + \left(\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{V}}\right)\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

oder

$$2gZ = \left(1 + \alpha\frac{L}{D}\right)V^2 + \beta\frac{L}{D}V^{\frac{3}{2}} \quad \ldots . (581)$$

Eine direkte Auflösung dieser Formel für V würde sehr unbequem sein. Kennt man jedoch den Werth von V schon näherungsweise, was in den meisten Fällen nicht schwierig sein wird, indem man zu diesem Behuf nur erst einmal nach der Näherungsformel (574) zu rechnen braucht; so kann man den dafür entsprechenden Werth von $\varkappa$ aus der in Gl. (132) gegebenen Tabelle entnehmen und darauf die Formel (574) in Anwendung bringen.

§. 135. Fall, wo unter den übrigen Voraussetzungen des vorhergehenden Paragraphs das Wasser mit Kontraktion in die Röhre tritt.

Wenn unter denselben vorstehend gemachten Voraussetzungen die Röhre bei *e* nicht gehörig erweitert ist, sodaß die Flüssigkeit mit Kontraktion, deren Koeffizient *m* ist, in die Röhre treten muß; so entspricht Dies dem Falle, wo die Flüssigkeit gezwungen wird, aus dem Querschnitte $m\Omega$ der größten Kontraktion zu dem Querschnitte Ω der Röhre überzugehen (vergl. §. 103). Demnach hat man neben den vorstehenden Gliedern noch das aus der plötzlichen Querschnittsveränderung hervorgehende Glied in den Gleichungen des §s 133 zu berücksichtigen und in Gl. (568), (569) und (571)

$$\Sigma\left(\frac{\Omega}{\omega_1} - \frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2$$

zu setzen.

Dies gibt zuvörderst

$$Z = \left[1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 + \varkappa \frac{L}{D}\right] \frac{V^2}{2g} = \left(\frac{1}{n^2} + \varkappa \frac{L}{D}\right) \frac{V^2}{2g}, \quad \ldots . (582)$$

wenn man der Kürze wegen die Größe

$$\frac{m}{\sqrt{m^2 + (1-m)^2}} = n$$

setzt (vergl. wegen der Werthe von n den §. 104).

Hieraus folgt

$$V = n \sqrt{\frac{2gZ}{1 + n^2 \varkappa \frac{L}{D}}} \quad \ldots . (583)$$

Für den Koeffizienten n kann man unter den gegenwärtigen Verhältnissen im Mittel

$$n = 0{,}84$$

und für den Koeffizienten $\varkappa$ als ersten Näherungswerth den Ausdruck (565) nehmen.

Der vorstehende Werth von n würde einer Substitution von $m = 0{,}61$ in die obigen Formeln entsprechen, in welchen die Wirkung der Kontraktion und plötzlichen Ausdehnung beim Eintritte in die Leitungsröhre vermittelst der Koeffizienten m dargestellt wäre. Jener Werth 0,84 für n ist zwar etwas größer, als der in §. 104 für den Fall einer kurzen Ansatzröhre angegebene mittlere Werth; allein Dies rührt daher, daß selbst bei einer kurzen Ansatzröhre schon einiger Reibungswiderstand an den Röhrenwänden stattfindet, welcher im gegenwärtigen Paragraphe besonders gewürdigt ist.

Wenn man den Werth von V schon näherungsweise kennt, kann man für $\varkappa$ den entsprechenden Werth aus Gl. (567) oder aus der danach berechneten Tabelle entnehmen.

Der Druck in irgend einem Punkte des oberen Behälters bleibt

$$p = p' + wz \quad \ldots . (584)$$

Für den Druck in irgend einem Punkte der Leitungsröhre erhält man jedoch nach Gl. (571)

$$p = p' + wz - w\frac{V^2}{2g}\left(\frac{1}{n^2} + \varkappa\frac{l}{D}\right)$$

oder wenn man für V seinen Werth aus Gl. (583) substituirt,

$$p = p' + w\left(z - \frac{1 + n^2\varkappa\frac{l}{D}}{1 + n^2\varkappa\frac{L}{D}}.Z\right), \quad \ldots . (585)$$

ein Ausdruck, der ebenfalls wie der bei (576) in den meisten Fällen abgekürzt

$$p = p' + w\left(z - \frac{l}{L}Z\right) \quad \ldots . (586)$$

geschrieben werden kann und zu derselben Betrachtung Veranlassung gibt, wie der Ausdruck (577).

Nehmen wir den Koeffizienten $\varkappa$ in der genäherteren Form (566)

$$\varkappa = \alpha + \frac{\beta}{V};$$

so ergibt sich statt Gl. (582)

$$Z = \frac{V^2}{2gn^2} + \left(\alpha + \frac{\beta}{V}\right)\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

oder

$$2gZ = \left(\frac{1}{n^2} + \alpha\frac{L}{D}\right)V^2 + \beta\frac{L}{D}V, \quad \ldots . (587)$$

und hieraus findet man

$$V = \frac{-\beta L + \sqrt{(\beta L)^2 + 8gZ\left(\frac{D}{n^2} + \alpha L\right)D}}{2\left(\frac{D}{n^2} + \alpha L\right)} \quad \ldots . (588)$$

Wenn L gegen D sehr groß ist, sodaß man das Glied $\frac{D}{n^2}$ gegen αL vernachlässigen kann; so wird diese Formel einfach

$$V = -\frac{\beta}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{2gD}{\alpha L}Z} \quad \ldots . (589)$$

Für diesen Fall, wo L sehr groß ist, hängt die Geschwindigkeit von dem Verhältnisse $\frac{Z}{L}$ ab, sodaß wenn die Axe der Röhre eine gerade Linie bildet, die Ausflußgeschwindigkeit V dieselbe bleibt, in welchem Punkte die Röhre auch abgeschnitten werde, vorausgesetzt nur, daß darauf die vorstehende Gleichung (589) Anwendung finde, also L gegen D sehr groß sei.

Die Ausflußmenge in der Sekunde ist

$$Q = \Omega V,$$

oder wenn der Querschnitt Ω kreisförmig ist,

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} V.$$

Wollte man den Durchmesser D der Röhre durch die Bedingung bestimmen, daß in der Sekunde eine gegebene Wassermenge Q ausflösse; so hätte man in den obigen Formeln

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

zu substituiren.

Bedient man sich hierzu der ersten Näherungsformel (582) in welcher $\varkappa$ entweder den konstanten Werth 0,031 aus Gl. (565) oder, falls die Geschwindigkeit V angenähert bekannt wäre, den entsprechenden Werth aus der Tabelle des §s 132 hat; so ergibt sich nach gehöriger Reduktion die Gleichung fünften Grades

$$D^5 - \frac{8Q^2}{n^2 \pi^2 g Z} D - \frac{8 \varkappa L Q^2}{\pi^2 g Z} = o, \quad \ldots . (590)$$

welche durch irgend eine Näherungsmethode aufzulösen ist. Wenn die Länge L gegen den gesuchten Durchmesser sehr groß ist, sodaß man die Größe $\frac{D}{n^2}$ gegen $\varkappa L$ vernachlässigen kann; so ergibt die vorstehende Formel

$$D = \sqrt[5]{\frac{8 \varkappa L Q^2}{\pi^2 g Z}} \quad \ldots . (591)$$

Die letztere Formel wird in allen Fällen, selbst wenn L ge-

gen D nicht sehr groß sein sollte, dazu dienen können, den Werth von D angenähert kennen zu lernen, und die Auflösung nach Gl. (590) zu erleichtern.

Legt man die Gleichung (587) zu Grunde, worin α und β die Werthe aus Gl. (566) haben; so kommt

$$D^5 - \frac{2\beta LQ}{\pi g Z} D^2 - \frac{8Q^2}{n^2 \pi^2 g Z} D - \frac{8\alpha LQ^2}{\pi^2 g Z} = o \quad \ldots . (592)$$

und wenn L gegen D sehr groß ist,

$$D^5 - \frac{2\beta LQ}{\pi g Z} D^2 - \frac{8\alpha LQ^2}{\pi^2 g Z} = o \quad \ldots . (592^a)$$

§. 136. Widerstand, welchen das Wasser bei dem Durchgange durch Scheidewände, plötzliche Erweiterungen und Verengungen in der Leitungsröhre erfährt.

In einem jeden Falle, wo die Flüssigkeit gezwungen wird, aus dem kleineren Querschnitte ω_1 plötzlich in den größeren ω_2 überzugehen, hat man auf der rechten Seite der Gleichung (568) ein Glied von der Form

$$\frac{V^2}{2g}\left(\frac{\Omega}{\omega_1} - \frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2,$$

oder wenn man die der Geschwindigkeit V entsprechende Fallhöhe $\frac{V^2}{2g}$ mit H und den Koeffizienten $\left(\frac{\Omega}{\omega_1} - \frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2$ mit k_1 (den Umständen nach, zur Unterscheidung verschiedener Fälle auch mit k', k_{11}, k'') bezeichnet, wie Dies schon in §. 133 geschehen ist, ein Glied von der Form

$$k_1 H$$

zu addiren.

Da nun für den gegenwärtigen Fall, wo die Röhre mit voller Öffnung in die freie Luft ausmündet, $O'' = \Omega$ ist, und außerdem das in $\frac{\Omega^2}{O'^2}$ multiplizirte Glied wegen der sehr großen Fläche O' des Spiegels im oberen Behälter als ungemein klein vernachlässigt wird; so hat man allgemein

$$\left.\begin{aligned} Z &= \left(1+\Sigma k_1+\varkappa\frac{L}{D}\right)\frac{V^2}{2g} \\ &= \left(1+\Sigma k_1+\varkappa\frac{L}{D}\right)H \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (593)$$

oder auch nach der Bezeichnung des §s 133

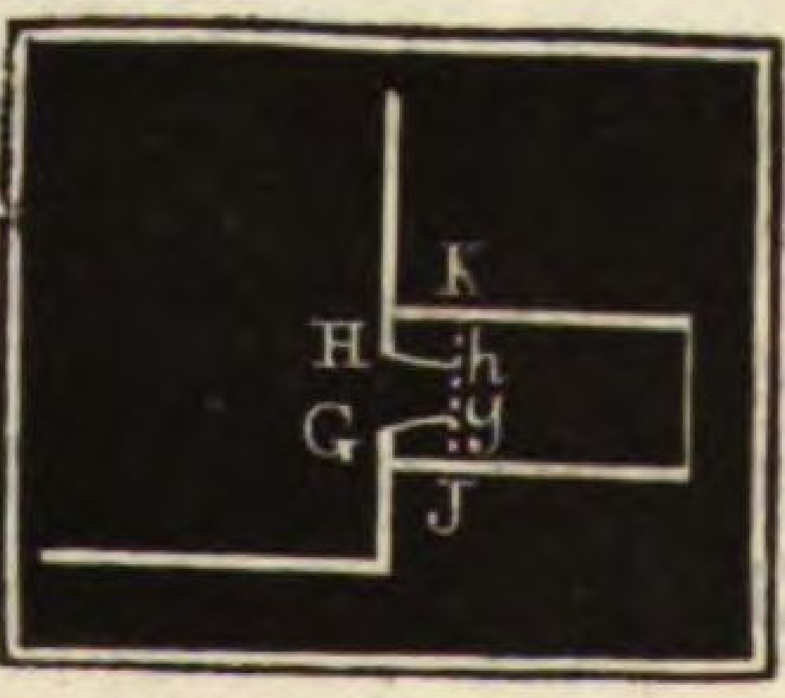
$$Z = H + \Sigma h_1 + h,$$

sodaß die Fallhöhe H für die Ausflußgeschwindigkeit V gleich ist der gesammten Druckhöhe Z, weniger sämmtlicher Widerstandshöhen, welche sowol aus plötzlichen Querschnittsveränderungen, wie aus dem Reibungswiderstande hervorgehen.

Wenn man die Werthe aller Widerstandskoeffizienten k_1 kennt; so ergibt eine Auflösung der Gl. (593) den Werth der Geschwindigkeit V. Sobald alle diese Koeffizienten, wie auch der Faktor $\varkappa$ als von V unabhängig angesehen werden, hat man einfach

$$V = \sqrt{\frac{2gZ}{1+\Sigma k_1+\varkappa\frac{L}{D}}} \quad \ldots\ldots (593^a)$$

Den ersten Widerstand erleidet nun die Flüssigkeit beim Eintritte in die Röhre. Nehmen wir allgemein an, die Röhrenmündung am oberen Behälter sei noch durch eine dünne Wand verengt, in welcher sich die Öffnung GH oder mehrere dergleichen Öffnungen, wie in einem Siebe oder Gitter, befinden, und es sei



Ω der Querschnitt JK der Röhre,

Ω_1 die Eintrittsöffnung GH, oder die Summe dieser Öffnungen, wenn die Wand deren mehrere besitzt, und man habe

$\delta = \frac{\Omega_1}{\Omega}$ oder $\Omega_1 = \delta\Omega$; ferner sei

m der Kontraktionskoeffizient für den Durchgang des Wassers durch die Öffnung GH, also

$m\Omega_1 = \delta m\Omega$ der Querschnitt gh der größten Kontraktion unmittelbar hinter der Einmündung in die Röhre.

Wenn man bei der Bestimmung des Kontraktionskoeffizienten m nach §. 84 ff. sehr sorgfältig verfahren und für denselben nicht ohne Weiteres den mittleren Werth 0,61 annehmen, vielmehr denjenigen wählen wollte, welcher den Dimensionen der Öffnung Ω_1 und der entsprechenden Druckhöhe zukäme; so dürfte man unter dieser Druckhöhe offenbar nicht die gesammte Druckhöhe Z, sondern nur den Theil dieser Höhe verstehen, welcher die in der Öffnung Ω_1 stattfindende Geschwindigkeit $\frac{\Omega}{\Omega_1}V=\frac{V}{\delta m}$ zu erzeugen vermöchte. Näherungsweise würde man diesen gesuchten Theil der Druckhöhe durch den Ausdruck $\frac{V^2}{2g(\delta m)^2}$ finden, wenn man hierin zuvörderst für V sowol, wie für m einen leicht zu ermittelnden Näherungswerth substituirte. Inzwischen wird ein solches ängstliches Verfahren selten erforderlich sein, und der obige mittlere Werth von m in den meisten Fällen genügen.

Nach dem Vorstehenden wird der in die Gl. (593) einzuführende, mit k' zu bezeichnende erste Koeffizient für den beim Eintritte des Wassers in die Röhre stattfindenden Widerstand, da hierbei $\omega_1=gh=m\Omega_1=\delta m\Omega$ und $\omega_2=JK=\Omega$ ist

$$k'=\left(\frac{\Omega}{m\Omega_1}-1\right)^2=\left(\frac{1}{\delta m}-1\right)^2 \quad \ldots .(594)$$

Wenn $\delta=1$ oder $\Omega_1=\Omega$ ist, d. h. wenn die Scheidewand bei der Einmündung in die Röhre gar nicht vorhanden ist; so wird

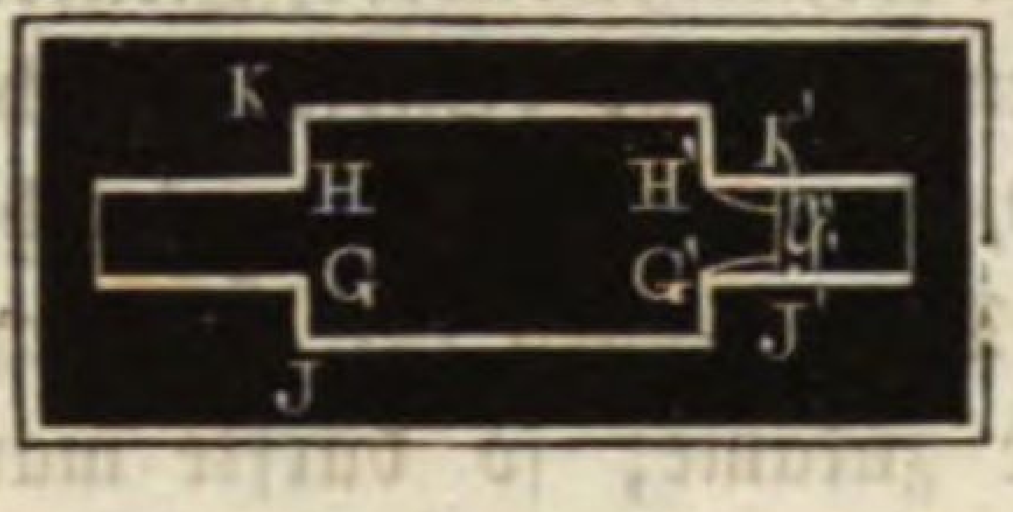
$$k'=\left(\frac{1}{m}-1\right)^2, \quad \ldots .(595)$$

und Dies entspricht dem im vorhergehenden Paragraphe betrachteten Falle.

Wäre gleichzeitig auch $m=1$, also beim Eintritte des Wassers in die Röhre keine Kontraktion vorhanden, ein Fall, der sich ereignet, sobald die Röhrenmündung nach vorn gehörig erweitert ist, wie Dies in §. 134 vorausgesetzt worden; so hat man

$$k'=o, \quad \ldots .(596)$$

und man sieht, daß das Wasser alsdann beim Eintritte in die Röhre keinen Widerstand erfährt.



Befände sich ferner in der Röhre eine plötzliche Erweiterung, d. h. eine Stelle, wo der Querschnitt GH plötzlich zu dem größeren Querschnitte JK überginge; so sei

Ω der sonst konstante Querschnitt GH der Röhre,
Ω_1 der Querschnitt JK, und man habe

$\delta = \frac{\Omega_1}{\Omega}$ oder $\Omega_1 = \delta \Omega$.

Der in Gl. (593) wegen des Widerstandes beim Eintritte in die Erweiterung einzuführende Koeffizient k_1 wird hiernach

$$k_1 = \left(1 - \frac{\Omega}{\Omega_1}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)^2 \quad \ldots . (597)$$

Nimmt die Röhre bei G'H' wieder ihren früheren Querschnitt an; so entsteht durch den Eintritt des Wassers in den Theil jenseit G'H' ein neuer Verlust an Druckhöhe. Setzt man den Kontraktionskoeffizienten für diesen Eintritt $= m$, sodaß $m\Omega$ der Querschnitt $g'h'$ der größten Kontraktion dicht hinter G'H' ist, aus welchem das Wasser wieder zu dem Querschnitte $J'K' = \Omega$ übergehen muß; so folgt für den entsprechenden Widerstandskoeffizienten, wenn man denselben mit k_{11} bezeichnet,

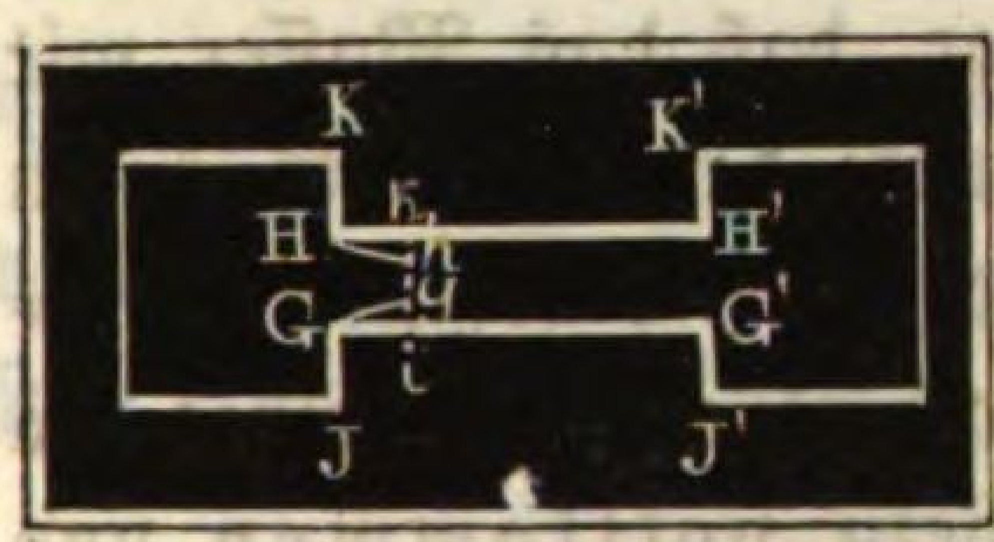
$$k_{11} = \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 \quad \ldots . (598)$$

Wenn die eben betrachtete Erweiterung bei JK und die Verengung auf den früheren Querschnitt bei G'H' aufeinander folgen, wie Dies in der Figur dargestellt ist; so ist der Koeffizient für den gesammten Widerstand, welchen das Wasser beim Durchgange durch die erweiterte Partie GG' erleidet,

$$(k_1 + k_{11}) = \left(1 - \frac{\Omega}{\Omega_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 \quad \ldots . (599)$$

Aus dieser Formel ersieht man, daß der durch eine Erweiterung herbeigeführte Verlust an Druckhöhe nicht ins Unendliche wachsen kann, da der Werth von $k_1 + k_{11}$ nie größer werden

kann, als $1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2$, wobei δ oder der Querschnitt Ω_1=JK unendlich groß sein muß.



Kommt in der Röhre eine Verengung vor, wo der regelmäßige Querschnitt JK der Röhre auf den kleineren Querschnitt GH eingeengt wird; so sei

Ω der sonst konstante Querschnitt JK der Röhre,

Ω_1 der Querschnitt GH, und man habe

$\delta=\frac{\Omega_1}{\Omega}$ oder $\Omega_1=\delta\Omega$; ferner sei

m der Kontraktionskoeffizient für die bei dem Durchgange des Wassers durch GH stattfindende Kontraktion.

Für den Widerstandskoeffizienten k_1, welcher wegen des bei GH stattfindenden Widerstandes in die Gl. (593) einzuführen ist, erhält man hiernach

$$k_1=\left(\frac{\Omega}{m\Omega_1}-\frac{\Omega}{\Omega_1}\right)^2=\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{1}{m}-1\right)^2 \quad \ldots . (600)$$

Wenn sich die Röhre bei J'K' wieder auf ihren früheren Querschnitt Ω ausdehnt; so erfordert der bei dem Eintritte des Wassers in den größeren Querschnitt entstehende Widerstand einen Koeffizienten k_{11}, welcher

$$k_{11}=\left(\frac{\Omega}{\Omega_1}-1\right)^2=\left(\frac{1}{\delta}-1\right)^2 \quad \ldots . (601)$$

ist.

Folgt die Verengung bei GH und die Erweiterung bei J'K' aufeinander, wie in der Figur; so ist der Widerstandskoeffizient für den Durchgang des Wassers durch die verengte Partie GG'

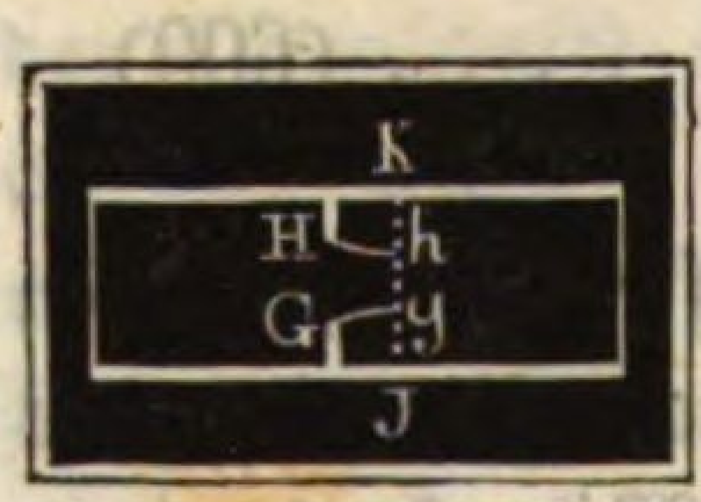
$$(k_1+k_{11})=\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{1}{m}-1\right)^2+\left(\frac{1}{\delta}-1\right)^2 \quad \ldots . (602)$$

Die vorstehende Formel lehrt, daß durch eine Verengung der Röhre die Ausflußgeschwindigkeit bis zu jeder beliebigen Gränze herabgedrückt werden kann, da k_1+k_{11} sich immer mehr dem Werthe ∞ nähert, je kleiner δ oder je kleiner der verengte

Querschnitt GH angenommen wird, ein Resultat, welches, wie wir vorhin gesehen, durch eine Erweiterung der Röhre nicht erzielt werden konnte.

In den beiden zuletzt betrachteten Fällen der Erweiterung und Verengung einer Röhre kommt es vor, daß das Wasser mit Kontraktion aus einem größeren Querschnitte der Röhre in einen kleineren übergehen muß. Wenn der vorhergehende größere Querschnitt bedeutend größer ist, als der nachfolgende kleinere; so wird die Kontraktion an dieser Stelle nahezu vollkommen und der Kontraktionskoeffizient m im Mittel $=0,61$ zu setzen sein. Ist der vorhergehende größere Querschnitt jedoch nicht bedeutend größer, als der nachfolgende kleinere; so wird die Kontraktion an dieser Stelle unvollkommen sein, und man würde den obigen Kontraktionskoeffizienten nach den Tabellen des §s 85 zu korrigiren haben. Die Tabelle am Ende des gegenwärtigen Paragraphs zeigt übrigens, welche Werthe man unter diesen Umständen nach den Versuchen von Weisbach dem Koeffizienten m beizulegen habe.

Wenn sich in der Röhre eine dünne Scheidewand befindet, in welcher die Öffnung GH angebracht ist; so wird das Wasser mit mehr oder weniger vollkommener Kontraktion durch dieselbe treten und alsdann aus dem Querschnitte gh der größten Kontraktion plötzlich in den Querschnitt JK übergehen. Ist also



Ω der konstante Querschnitt JK der Röhre,

Ω_1 die Öffnung GH in der Scheidewand,

$\delta = \frac{\Omega_1}{\Omega}$ oder $\Omega_1 = \delta\Omega$ und

m der Kontraktionskoeffizient für den Durchgang bei GH;

so wird der in Gl. (593) einzuführende Widerstandskoeffizient

$$k_1 = \left(\frac{\Omega}{m\Omega_1} - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{\delta m} - 1\right)^2 \quad \ldots\ldots (603)$$

sein.

Dieser Werth stimmt der Form nach mit dem aus Gl. (594) überein, welcher für den Fall entwickelt wurde, wo das Wasser aus dem oberen Behälter durch eine Scheidewand in die Röhre tritt: da jedoch hier der Querschnitt Ω der Röhre, welcher der

Durchflußöffnung $GH = \Omega_1$ unmittelbar hervorgeht, nicht immer sehr groß sein wird, im Vergleich zu der letzteren Öffnung; so wird die hier stattfindende Kontraktion unvollkommen sein, und man wird daher den Werth des Kontraktionskoeffizienten nach dem Werthe des Verhältnisses $\frac{\Omega_1}{\Omega}$ korrigiren müssen. Nach den von Weisbach angestellten Versuchen kann man sich zu diesem Zwecke unmittelbar der nachstehenden Tabelle bedienen.

Kontraktions- und Widerstandskoeffizienten für den Durchgang des Wassers durch eine in einer Leitungsröhre befindliche Verengung *o* der Scheidewand.

Werth von $\delta = \frac{\Omega_1}{\Omega}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Kontraktionskoeffizient *m*	0,624	0,632	0,643	0,659	0,681	0,712	0,755	0,813	0,892	1,000
Widerstandskoeffizient k_1 nach den Formeln (600), (602), (603)	225,9	47,77	17,50	7,801	3,753	1,796	0,797	0,290	0,060	0,000

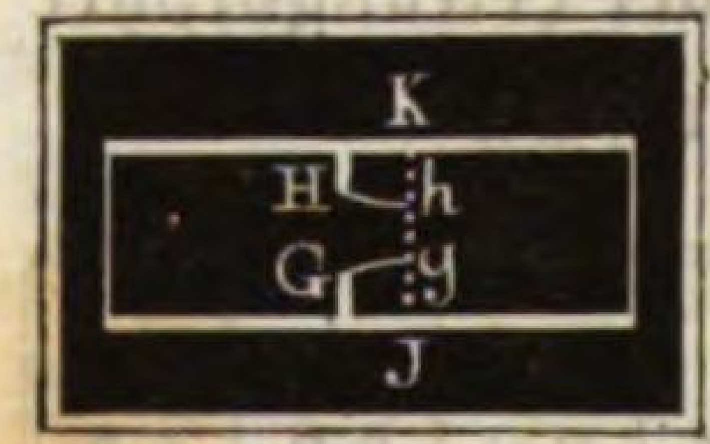
(Auch auf die Formel (598) finden die Werthe dieser Tabelle Anwendung, wenn die Größen in der obersten Horizotalreihe die Werthe des Verhältnisses $\frac{1}{\delta} = \frac{\Omega}{\Omega_1}$ darstellen, indem an der dortigen Stelle $\Omega_1 > \Omega$ ist.)

Substituirt man nun von den vorstehenden Widerstandskoeffizienten aus den Formeln (594) bis (603) diejenigen in die Gl. (593) oder (593^a); so erhält man die gesuchte Gleichung für die Bewegung des Wassers durch eine Leitungsröhre, welche durch einen oberen Behälter gespeis't wird, und sich in die freie Luft ergießt.

§. 137. Widerstand, welchen das Wasser bei dem Durchgange durch Ventile und Hähne in der Leitungsröhre erleidet.

Schieber, Hähne, Klappen und Ventile, welche in den Leitungsröhren angebracht sind, um dadurch den Ausfluß des Was-

sers zu reguliren, bilden plötzliche Verengungen, welche im Allgemeinen nach Bedürfniß vergrößert oder verkleinert werden können. Nach dem Durchgange durch diese Verengungen wird das Wasser gezwungen, den vollen Querschnitt Ω der Leitungsröhre wiederanzunehmen. Wie unregelmäßig nun auch die Form des durch eine solche Vorrichtung verengten Querschnittes sei, und in welcher Weise auch die Richtung und Bewegung des Wassers bei dem Durchgange gebrochen werde, man wird sich immer eine einfache Scheidewand, wie sie im vorhergehenden Paragraphe betrachtet ist, denken können, welche eine Durchflußöffnung GH besitzt, und durch ihre Gegenwart dieselbe Wirkung auf die Verzögerung der Ausflußgeschwindigkeit oder auf die Verminderung der Druckhöhe ausübt, wie das in Rede stehende Ventil.



dt stellt demnach

Ω den konstanten Querschnitt der Röhre und

Ω_1 den mittleren Querschnitt der Durchflußöffnung dar, welche dem Wasser durch das Ventil gelassen wird, und ist

$\delta = \frac{\Omega_1}{\Omega}$ oder $\Omega_1 = \delta\,\Omega$, ferner

m der Koeffizient für die vollkommene oder unvollkommene Kontraktion, welche das Wasser hinter dem Querschnitte GH erleidet, also $m\Omega_1 = \delta m \Omega = gh$ der Querschnitt der größten Kontraktion nach dem Durchgange des Wassers durch das Ventil, aus welchem Querschnitte das Wasser alsdann plötzlich zu dem Querschnitte $\Omega = $ JK übergehen muß;

so wird man den Widerstand des Ventiles gegen die Bewegung des Wassers mit in Rechnung bringen, sobald man in Gl. (593) unter dem Zeichen Σ einen Widerstandskoeffizienten k_1 hinzufügt, welcher

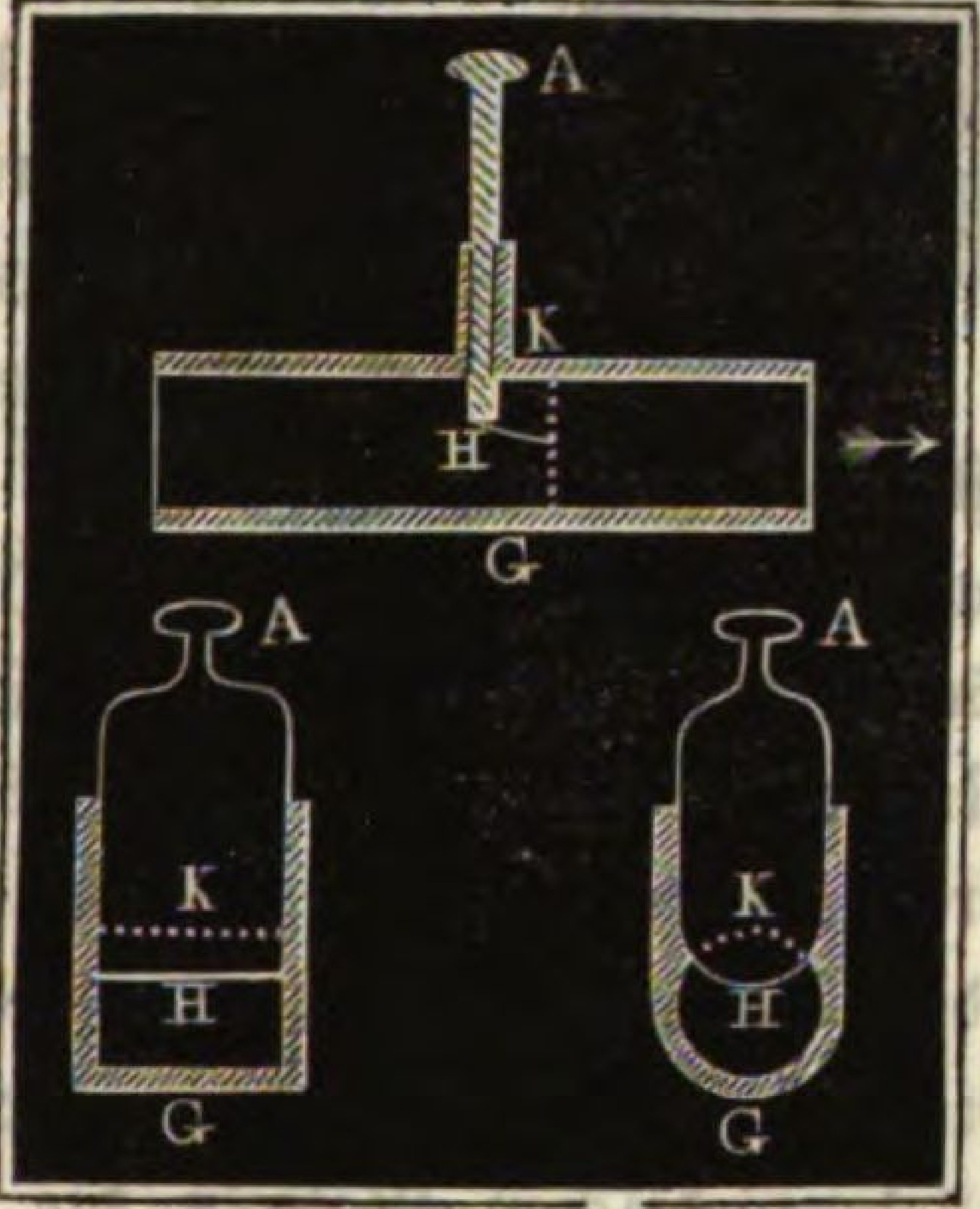
$$k_1 = \left(\frac{\Omega}{m\Omega_1} - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{\delta m} - 1\right)^2 \quad \ldots . \, (604)$$

ist.

Im Allgemeinen wird man die Werthe des Widerstandskoeffizienten k_1 für die verschiedenen Arten von Ventilen, sowie für die verschiedenen Stellungen derselben nur aus der Erfahrung

entlehnen können. Von **Weisbach** sind hierüber mehrfache Versuche angestellt worden, deren Resultate in den nachstehenden Tabellen enthalten sind.

1) Bei **Schiebern oder Schubventilen**, wie AH, welche sowol in Röhren mit rechtwinkligem, wie mit kreisförmigem Querschnitte angebracht werden, kann der Querschnitt der Röhre in normaler Richtung zu der Axe bald mehr, bald weniger geschlossen werden. Das Verhältniß δ der Durchgangsöffnung $GH = \Omega_1$ zu dem Querschnitte $GK = \Omega$ der Röhre ist also veränderlich, und man hat für die verschiedenen Stellungen des Schiebers folgende Tabellen.



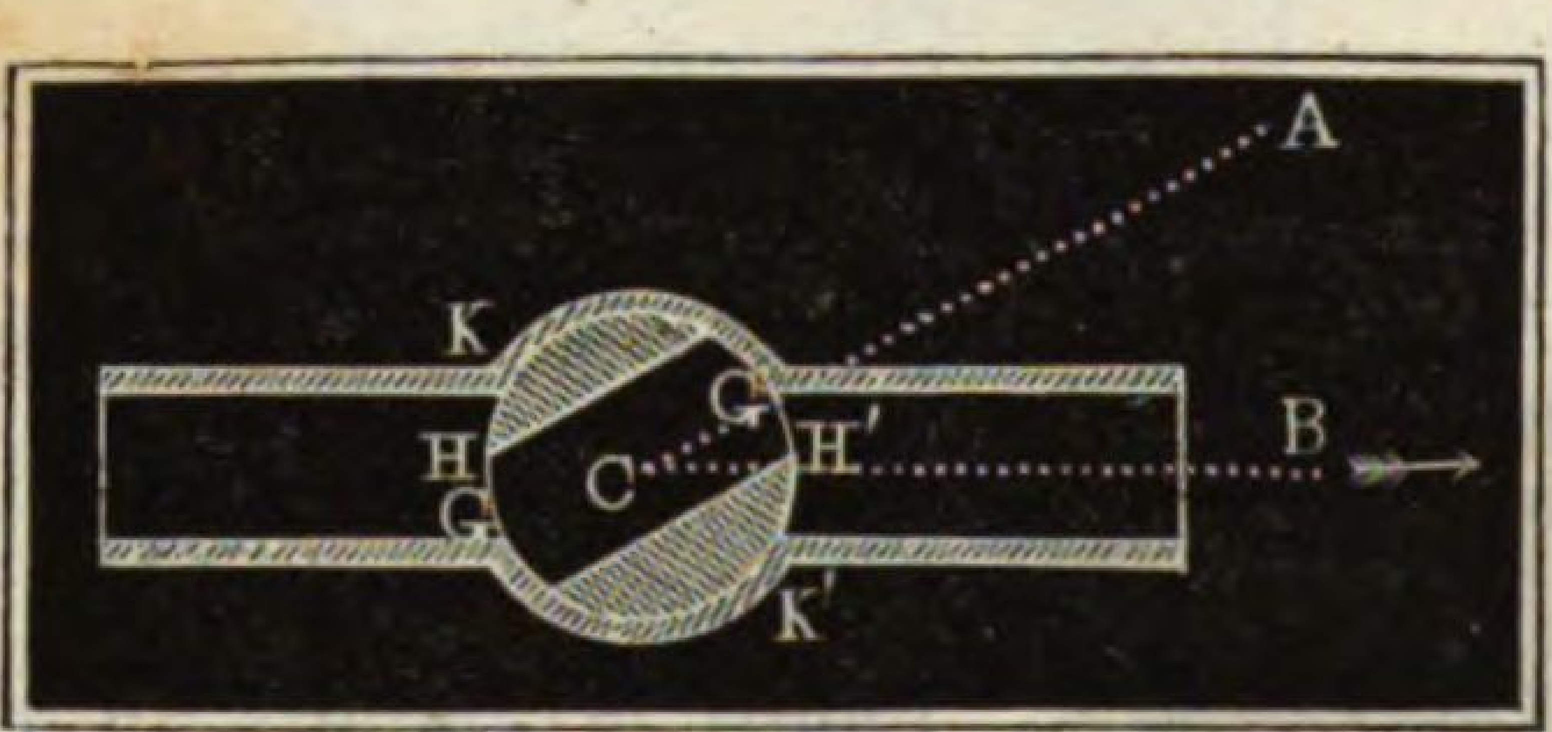
I. **Widerstandskoeffizienten für den Durchgang des Wassers durch Schieber oder Schubventile in parallelepipedischen Röhren.**

Werth von $\delta = \frac{\Omega_1}{\Omega}$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
Widerstandskoeffizient k_1	0,00	0,09	0,39	0,95	2,08	4,02	8,12	17,8	44,5	193

II. **Widerstandskoeffizienten für den Durchgang des Wassers durch Schieber oder Schubventile in zylindrischen Röhren.**

Stellhöhe GH des Schiebers über dem Boden der Öffnung	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$
Werth von $\delta = \frac{\Omega_1}{\Omega}$	1,000	0,948	0,856	0,740	0,609	0,466	0,315	0,159
Widerstandskoeffizient k_1	0,00	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8

2) Bei Hähnen von der seitwärts verzeichneten Form tritt das Wasser aus dem Querschnitte $GK = \Omega$ der Röhre durch die verengte Öffnung $GH = \Omega_1$ zuvörderst in die durchbrochene Öffnung des Hahnes, welche denselben Querschnitt Ω, wie die Röhre selbst hat. Nachdem hierdurch die Richtung des Wasserstromes um den Stellwinkel ACB abgelenkt ist, wird derselbe durch die zweite verengte Öffnung $G'H' = \Omega_1$ an der anderen Seite des Hahnes wieder in den Querschnitt $G'K' = \Omega$ der Röhre übergeführt. Die Widerstandskoeffizienten für die verschiedenen Stellungen des Hahnes sind in den beiden folgenden Tabellen enthalten. Es muß dabei bemerkt werden, daß die Hähne, mit welchen die Versuche angestellt sind, in parallelepipedischen Röhren die ganze Röhrenöffnung bei einem Stellwinkel von $ACB = 66\frac{3}{4}^0$ und in zylindrischen Röhren bei $82\frac{1}{8}^0$ ganz verschlossen. Hat man es also mit anders konstruirten Hähnen zu thun; so darf man die Resultate aus den nachstehenden Tabellen nicht nach der Größe des Stellwinkels nehmen, sondern muß für jede besondere Stellung das Querschnittsverhältniß $\delta = \frac{\Omega_1}{\Omega}$ ermitteln und hiernach den betreffenden Werth des Widerstandskoeffizienten entnehmen.



Um diese Ermittelung vorkommendenfalls möglichst zu erleichtern; so sei für eine parallelepipedische, wie für eine zylindrische Röhre

D der Durchmesser GK des Querschnittes der Röhre in perpendikularer Richtung auf der Umdrehungsaxe des Hahnes,

D′ der Durchmesser GG′ des zylindrischen Hahnes,

φ irgend ein Stellwinkel ACB, bei welchem der verengte Querschnitt GH den Werth Ω_1 annimmt, in Graden,

γ derjenige Werth des Stellwinkels in Graden, bei welchem der ganze Querschnitt Ω der Röhre geschlossen wird.

Der Winkel γ ergibt sich sowol für parallelepipedische, wie für zylindrische Röhren durch die Beziehung

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{D}{D'} \quad \ldots\ldots (605)$$

Nachdem hieraus oder durch sonstige direkte Messung der Werth von γ gefunden ist, findet man für parallelepipedische Röhren das Querschnittsverhältniß $\frac{\Omega_1}{\Omega}$ bei dem Stellwinkel φ durch die Formel

$$\delta=\frac{\Omega_1}{\Omega}=\frac{\gamma-\varphi}{\varphi} \quad \ldots\ldots (606)$$

Bei zylindrischen Röhren kann man das Querschnittsverhältniß δ nach der Näherungsformel

$$\delta=\frac{\Omega_1}{\Omega}=\frac{\psi}{180}-\frac{\sin\psi}{\pi} \quad \ldots\ldots (607)$$

berechnen, worin ψ einen Hülfswinkel darstellt, welcher zuvor durch die Gleichung

$$\cos\frac{\psi}{2}=1-\pi\frac{D'}{D}\frac{(\gamma-\varphi)}{360} \quad \ldots\ldots (608)$$

bestimmt werden muß.

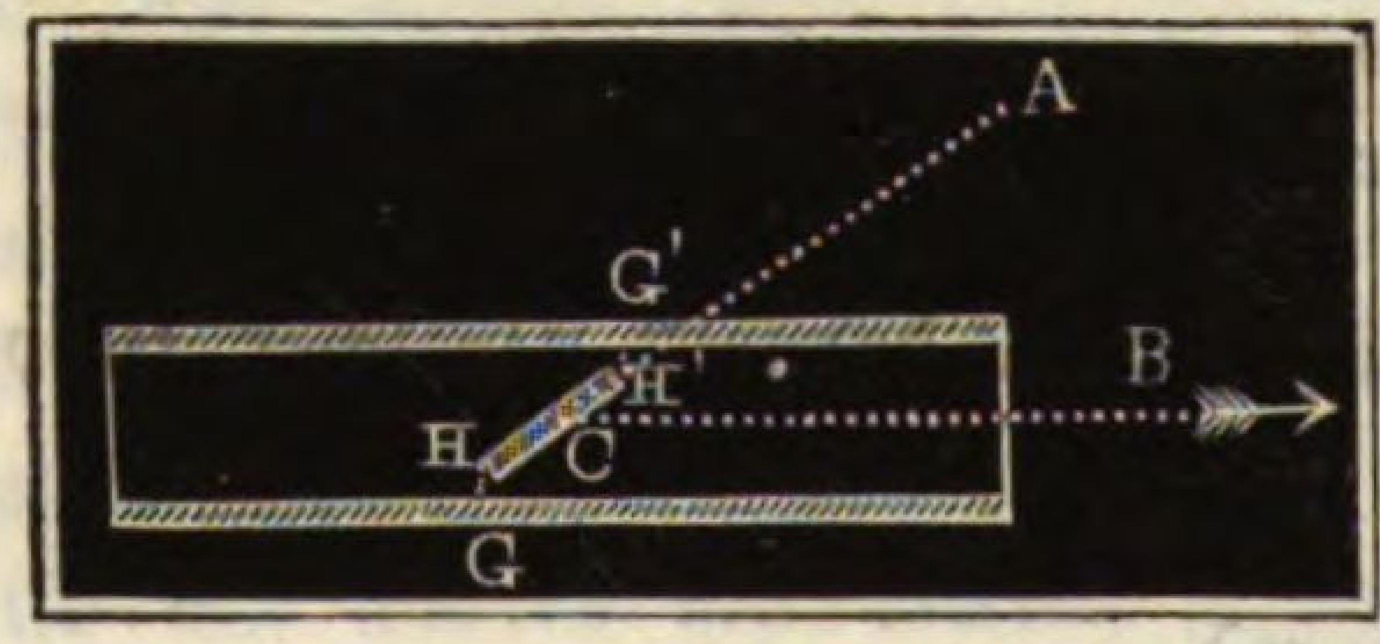
III. Widerstandskoeffizienten für den Durchgang des Wassers durch einen Hahn in parallelepipedischen Röhren.

Stellwinkel φ	5°	10°	15°	20°	25°	30°
Werth von $\delta=\frac{\Omega_1}{\Omega}$	0,926	0,849	0,769	0,687	0,604	0,520
Widerstandskoeffizient k_1	0,05	0,31	0,88	1,84	3,45	6,15
Stellwinkel φ	35°	40°	45°	50°	55°	$66\frac{3}{4}$°
Werth von $\delta=\frac{\Omega_1}{\Omega}$	0,436	0,352	0,269	0,188	0,110	0
Widerstandskoeffizient k_1	11,2	20,7	41,0	95,3	275	∞

IV. Widerstandskoeffizienten für den Durchgang des Wassers durch einen Hahn in zylindrischen Röhren.

Stellwinkel φ	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
Werth von $\delta = \frac{\Omega_1}{\Omega}$	0,926	0,850	0,772	0,692	0,613	0,535	0,458
Widerstandskoeffizient k_1	0,05	0,29	0,75	1,56	3,10	5,47	9,68
Stellwinkel φ	40°	45°	50°	55°	60°	65°	$82\frac{1}{8}^\circ$
Werth von $\delta = \frac{\Omega_1}{\Omega}$	0,385	0,315	0,250	0,190	0,137	0,091	0
Widerstandskoeffizient k_1	17,3	31,2	52,6	106	206	486	∞

3) Bei Drehklappen oder Drosselventilen theilt sich der Wasserstrom in zwei Theile, indem er durch den verengten Querschitt bei GH und G'H' tritt, und alsdann wieder in den konstanten Querschnitt Ω der Röhre übergeht. Der ganze verengte Querschnitt Ω_1 bei dem Stellwinkel $ACB = \varphi$ ist hier die Summe der beiden Theile GH und G'H', und man hat für dergleichen Klappen, wenn deren Durchmesser HH' gleich dem Durchmesser der Röhre ist, die aus nachstehenden Tabellen zu entnehmenden Werthe.



V. Widerstandskoeffizienten für den Durchgang des Wassers durch Drehklappen oder Drosselventile in parallelepipedischen Röhren.

Stellwinkel φ	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
Werth von $\delta = \frac{\Omega_1}{\Omega}$	0,913	0,826	0,741	0,658	0,577	0,500	0,426
Widerstandskoeffizient k_1	0,28	0,45	0,77	1,34	2,16	3,54	5,72

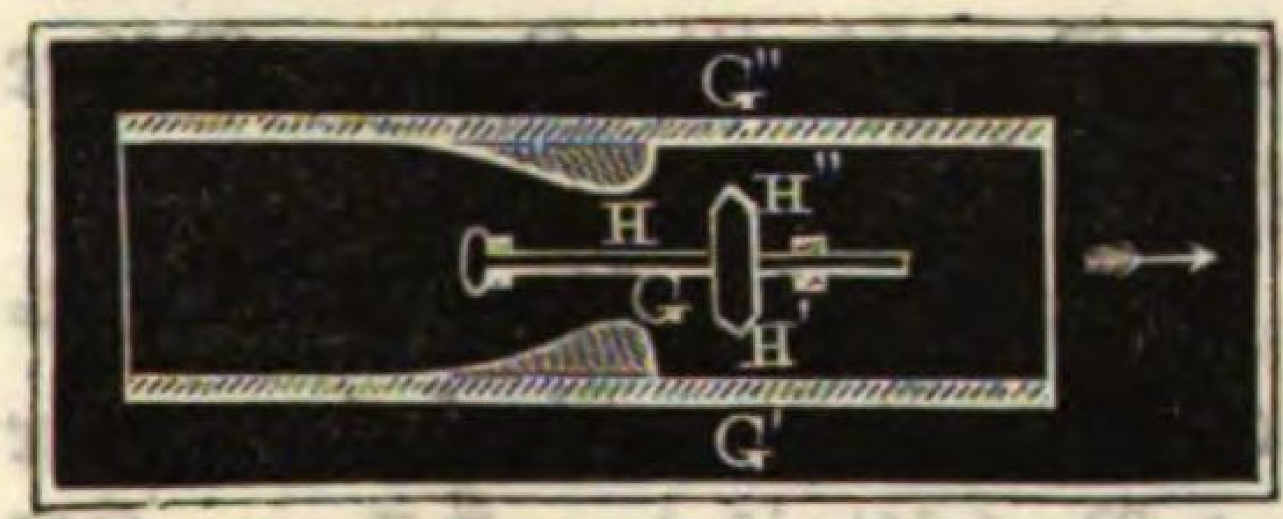
Stellwinkel φ	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	90°
Werth von $\delta = \frac{\Omega_1}{\Omega}$	0,357	0,293	0,234	0,181	0,134	0,094	0,060	0
Widerstandskoeffizient k_1	9,27	15,07	24,9	42,7	77,4	158	368	∞

VI. Widerstandskoeffizienten für den Durchgang des Wassers durch Drehklappen oder Drosselventile in zylindrischen Röhren.

Stellwinkel φ	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
Werth von $\delta = \frac{\Omega_1}{\Omega}$	0,913	0,826	0,741	0,658	0,577	0,500	0,426
Widerstandskoeffizient k_1	0,24	0,52	0,90	1,54	2,51	3,91	6,22

Stellwinkel φ	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	90°
Werth von $\delta = \frac{\Omega_1}{\Omega}$	0,357	0,293	0,234	0,181	0,134	0,094	0,060	0
Widerstandskoeffizient k_1	10,8	18,7	32,6	58,8	118	256	751	∞

4) Bei sogenannten **Kegelventilen** von der seitstehenden Art tritt das Wasser durch die engere Öffnung GH im Ventilringe, bewegt sich alsdann nach allen Seiten um das Ventil herum durch die Räume G′H′, G″H″ und füllt alsdann wieder den ganzen Querschnitt Ω der Röhre aus.



Setzt man nun die Öffnung GH im Ventilringe gleich Ω' und die ringförmige Öffnung G′H′, G″H″ um das Ventil herum gleich Ω''; so kann man für den eigentlichen verengten Querschnitt Ω_1, durch welchen das Wasser sich ergießen muß, das arithmetische Mittel zwischen Ω' und Ω'', also

$$\Omega_1 = \frac{\Omega' + \Omega''}{2}$$

setzen. Das Querschnittsverhältniß δ ist hiernach

$$\delta = \frac{\Omega_1}{\Omega} = \frac{\Omega' + \Omega''}{2\Omega}.$$

Stellt man nun den Widerstandskoeffizienten für den Durchgang des Wassers durch derartige Ventile nach Gl. (604) wieder in der Form

$$k_1 = \left(\frac{1}{\delta m} - 1\right)^2$$

dar; so findet **Weisbach** aus Versuchen mit einem Kegelventile, für welches $\Omega' = 0{,}356\,\Omega$, $\Omega'' = 0{,}406\,\Omega$, also $\Omega_1 = 0{,}381\,\Omega$ und daher $\delta = 0{,}381$ war, daß man für den Koeffizienten m den Werth

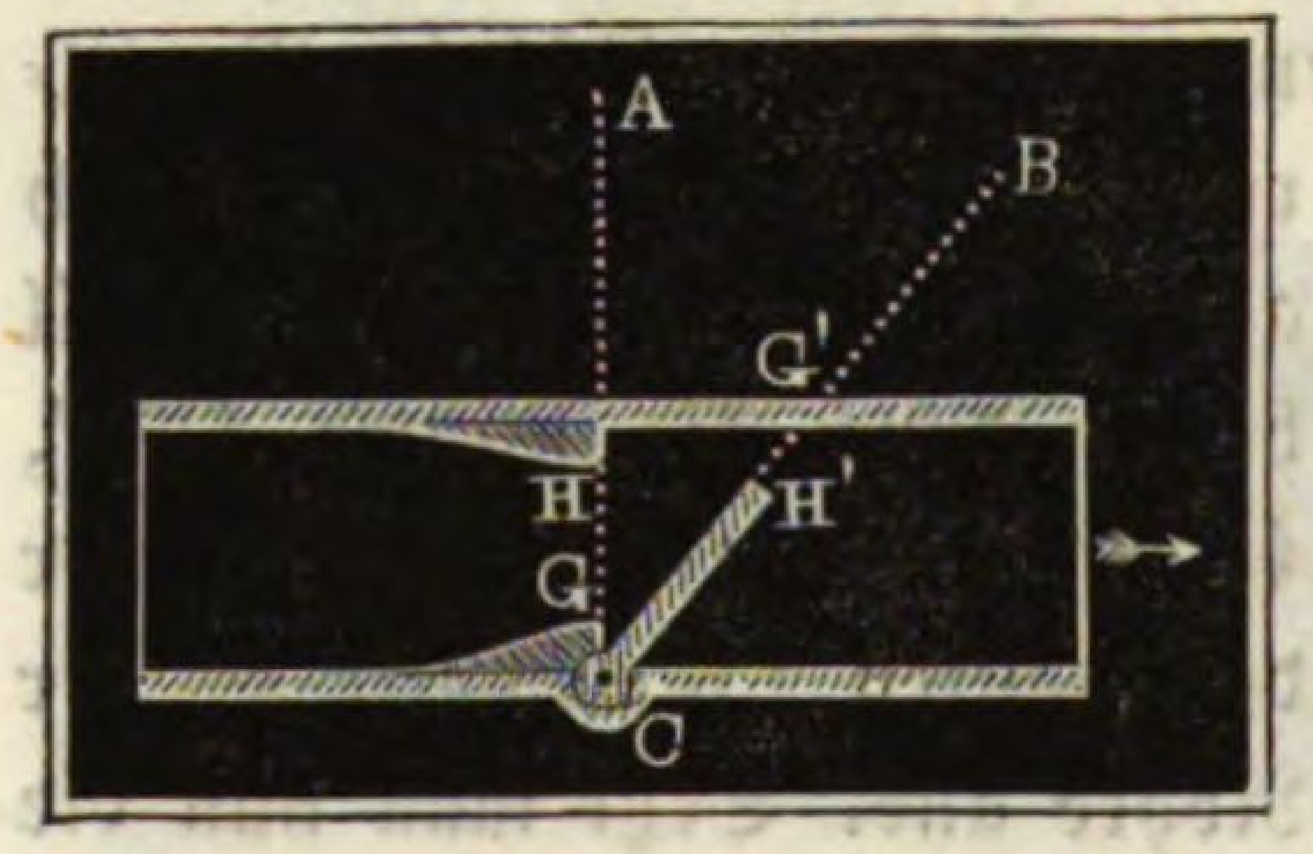
$$m = 0{,}608$$

substituiren, also

$$k_1 = \left(\frac{1}{0{,}608 . \delta} - 1\right)^2 = \left(\frac{1{,}645}{\delta} - 1\right)^2 \quad \ldots \; (609)$$

setzen könne, und daß dieser Werth nur wenig variire, wenn das Ventil H'H'' dem Ringe GH etwas mehr oder weniger genähert werde.

5) Bei **Klappenventilen** tritt das Wasser zuvörderst durch die Öffnung GH und alsdann bei G'H' um die Klappe herum, bis es hinter dieser Klappe den Querschnitt Ω der Röhre wieder füllt.



In den hierüber von **Weisbach** angestellten Versuchen war das Verhältniß der Öffnung GH im Ventilringe zu dem Querschnitte der Röhre gleich 0,535, und er fand für die verschiedenen Stellwinkel $ACB = \varphi$ der Ventilklappe folgende Werthe des Widerstandskoeffizienten.

VII. Widerstandskoeffizienten bei dem Durchgange des Wassers durch eine Ventilklappe.

Stellwinkel φ	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°
Widerstandskoeffizient k_1	90	62	42	30	20	14	9,5	6,6	4,6	3,2	2,3	1,7

Wollte man sich der vorstehenden Tabelle zur näherungsweisen Bestimmung des Widerstandskoeffizienten in Fällen bedienen, wo das Verhältniß der Öffnung GH zu dem Querschnitte Ω der Röhre ein anderes ist, als das obige von 0,535, bei welchem die Versuche angestellt sind; so bezeichne man die Öffnung GH in

einem solchen anderen Falle mit Ω_{11}, und das Verhältniß $\frac{\Omega_{11}}{\Omega}$ mit δ. Setzt man ferner den Widerstandskoeffizienten für diesen Fall und bei irgend einem Stellwinkel der Ventilklappe gleich k_{11}; so sei

$$k_{11} = \left(\frac{1}{\delta m} - 1\right)^2.$$

Für die bei den obigen Versuchen stattgehabten Verhältnisse war nun $\delta = 0{,}535$, und wenn k_1 den Werth des Widerstandskoeffizienten für den entsprechenden Stellwinkel φ aus der Tabelle VII bezeichnet; so hat man

$$k_1 = \left(\frac{1}{0{,}535 \, . \, m} - 1\right)^2,$$

also

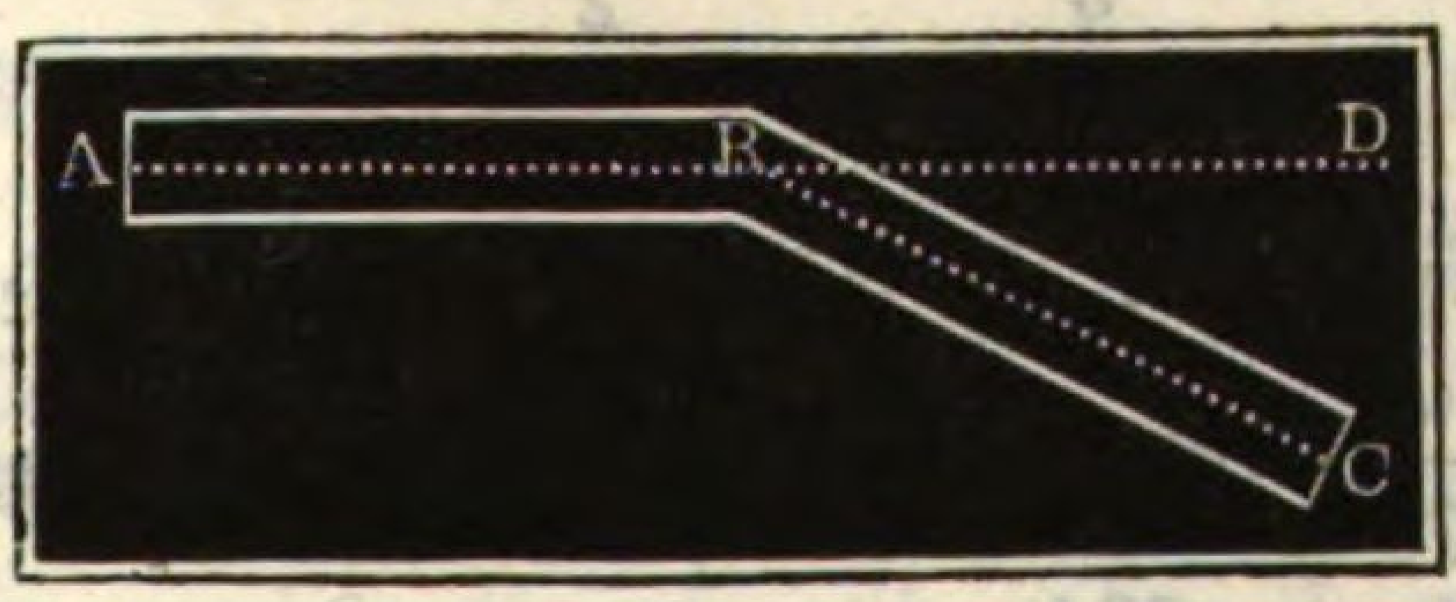
$$m = \frac{1}{0{,}535\,(1 + \sqrt{k_1})}.$$

Setzt man diesen Werth für m in den obigen Ausdruck von k_{11}; so erhält man als Näherungswerth

$$k_{11} = \left[\frac{0{,}535\,(1 + \sqrt{k_1})}{\delta} - 1\right]^2 \quad \ldots . \; (610)$$

§. 138. Widerstand, welchen das Wasser bei dem Durchgange durch die in den Röhrenleitungen etwa vorkommenden Kniee erfährt.

Wenn die Axe der Leitungsröhre eine gebrochene Linie und demnach irgendwo, wie bei B, eine scharfe Ecke bildet; so nennt man die Stelle bei B ein Knie. Der Durchgang des Wassers durch ein solches Knie ist mit einem bedeutenden Verluste an lebender Kraft verbunden, wenn der Winkel



ABC nicht sehr stumpf ist. Wenn sich ein jedes Theilchen der Flüssigkeit in einer zu ABC parallelen gebrochenen Linie fort-

bewegte; so würde man jenen Verlust folgendermaaßen bestimmen können.

In jedem Zeitelemente dt geht eine Schicht der Flüssigkeit, deren Volum $\Omega V dt$, deren Masse also $\mu \Omega V dt = \frac{w}{g} \Omega V dt$ ist, mit der Geschwindigkeit V plötzlich aus der Richtung AB in die Richtung BC über, indem sie sich mit der in diesem Schenkel befindlichen Flüssigkeit vereinigt und mit derselben Geschwindigkeit V in der Richtung BC weitereilt. Bezeichnet man den Ablenkungswinkel DBC mit γ, zerlegt darauf die Geschwindigkeit der Masse $\frac{w}{g} \Omega V dt$ resp. vor und nach dem Stoße in ihre beiden Komponenten parallel und perpendikular zu der Linie AB; so findet man für die erstere Komponente der Geschwindigkeit vor dem Stoße den Werth V und für die andere Komponente dieser Geschwindigkeit den Werth null, ferner für die erstere Komponente der Geschwindigkeit nach dem Stoße den Werth $V \cos\gamma$ und für die andere Komponente $V \sin\gamma$. Da alle übrigen Theile der in der Röhre ABC sich bewegenden Flüssigkeit bei der eben erwähnten plötzlichen Geschwindigkeitsveränderung der Masse $\frac{w}{g} \Omega V dt$ ihre Geschwindigkeiten nicht weiter ändern; so folgt mit Bezugnahme auf den Carnotschen Lehrsatz, §. 54, Gl. (233^a), und die analogen Betrachtungen des §s 55, daß das ganze System der Flüssigkeit bei jenem Stoße einen Verlust an lebender Kraft gleich

$$\frac{w}{g} \Omega V dt [(V - V \cos\gamma)^2 + (o - V \sin\gamma)^2]$$

$$= \frac{2w}{g} V^2 (1 - \cos\gamma) \Omega V dt = \frac{4w}{g} V^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \Omega V dt$$

erleidet.

Nach vorgängiger Division mit dt wäre die Hälfte dieser Größe, also der Ausdruck $\frac{2w}{g} V^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \Omega V$ auf der rechten Seite der allgemeinen Gleichung (234), oder nachdem man noch mit ΩV dividirt hat, der Ausdruck $\frac{2w}{g} V^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}$ auf der rech-

ten Seite von Gl. (241), oder endlich, nachdem man noch mit w dividirt hat, der Ausdruck $\frac{2V^2}{g}\sin^2\frac{\gamma}{2}$ auf der rechten Seite von Gl. (568) oder (593) hinzuzuaddiren.

Schreibt man also

$$\frac{2V^2}{g}\sin^2\frac{\gamma}{2} = 4\sin^2\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{V^2}{2g} = k_2\cdot\frac{V^2}{2g},$$

indem man

$$k_2 = 4\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

setzt; so würde k_2 den Widerstandskoeffizienten für die Kniebiegung bei B darstellen.

Das vorstehende Resultat gründet sich auf die Annahme, daß sich ein jedes Flüssigkeitstheilchen in einer gebrochenen Linie, wie ABC, bewegte. Diese Voraussetzung findet jedoch in der Wirklichkeit nicht statt; vielmehr werden die mittleren Fäden der Flüssigkeit bei B abgerundete Kurven bilden, welche einen geringeren Verlust an lebender Kraft bedingen, als sich vorstehend ergeben hat.

Weisbach hat gefunden, daß sich der Widerstandskoeffizient für die Kniebiegung sehr nahe durch die Form

$$k_2 = 0{,}9457\sin^2\frac{\gamma}{2} + 2{,}047\sin^4\frac{\gamma}{2} \quad \ldots \quad (611)$$

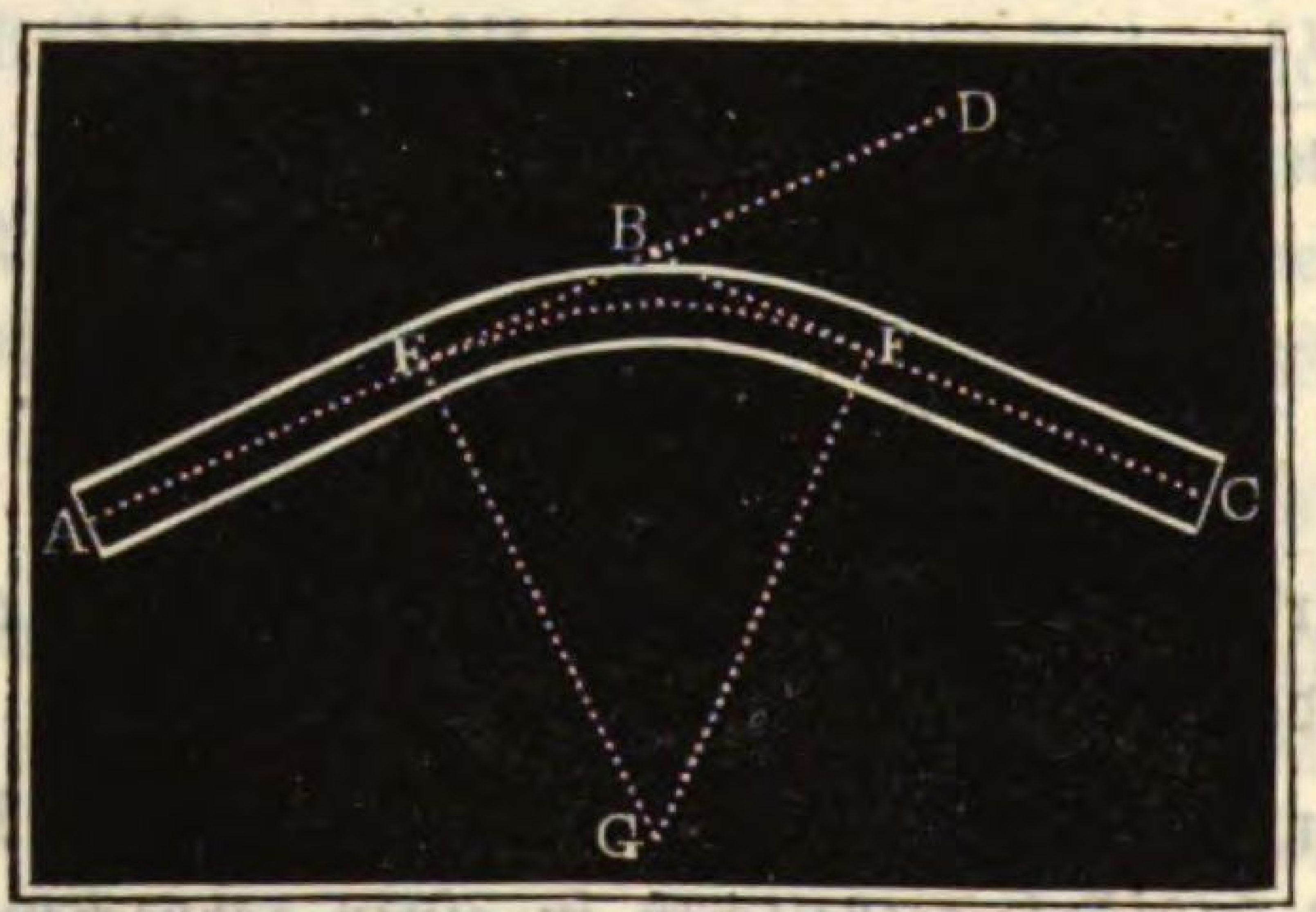
darstellen lasse, nach welcher die folgende Tabelle berechnet ist. Den entsprechenden Werth von k_2 hat man endlich neben den Werthen der übrigen Widerstandskoeffizienten k_1 in die Gl. (593) einzuführen.

Widerstandskoeffizienten für den Durchgang des Wassers durch ein Knie.

Ablenkungswinkel $\gamma = DBC$	20°	40°	60°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°
Widerstandskoeffizient k_2	0,046	0,139	0,364	0,740	0,984	1,260	1,556	1,861	2,158	2,431

§. 139. Widerstand, welchen das Wasser bei dem Durchgange durch die in den Röhrenleitungen etwa vorkommenden Krümmungen erleidet.

Wenn die Axe der Röhre bei dem Übergange aus der Einen Richtung AE in eine andere FC eine Kurve, in der Regel eine



Kreislinie EF bildet; so heißt diese Stelle in der Röhre eine Krümmung. Auch bei dem Durchgange durch dergleichen Krümmungen erleidet das Wasser wegen der mit der Richtungsveränderung verbundenen inneren Störungen einen Verlust an lebender Kraft, welcher übrigens bei weitem nicht so groß ist, als der durch ein Knie erzeugte.

Setzt man den Theil der gesammten Druckhöhe Z aus Gl. (593), welcher durch die in Rede stehende Krümmung der Röhre nutzlos verloren geht, gleich h_3 und den entsprechenden Widerstandskoeffizienten gleich k_3; so hat man

$$h_3 = k_3 \frac{V^2}{2g}.$$

Bezeichnet man den Ablenkungs- oder Krümmungswinkel DBC=EGF in Graden wieder mit γ; so wächst nach den Versuchen von Weisbach der Widerstandskoeffizient k_3 zuvörderst in direktem Verhältnisse mit dem Winkel γ, und man kann daher setzen

$$k_3 = \varkappa_3 \frac{\gamma}{180} \quad \ldots . (612)$$

Der Faktor $\varkappa_3$ in diesem Ausdrucke ist aber nicht konstant,

sondern hängt von dem Verhältnisse ab, in welchem die Weite D der Röhre zu dem Krümmungshalbmesser GE $=r$ des Axenbogens EF steht. Die hier bestehende Beziehung ist für zylindrische Röhren

$$\varkappa_3 = 0{,}131 + 0{,}163\left(\frac{D}{r}\right)^{\frac{7}{2}}, \qquad \ldots . (613)$$

und für parallelepipedische Röhren

$$\varkappa_3 = 0{,}124 + 0{,}274\left(\frac{D}{r}\right)^{\frac{7}{2}} \qquad \ldots . (614)$$

Nach den letzten beiden Formeln sind die nachstehenden Tabellen berechnet, aus welchen man die in die Formel

$$k_3 = \varkappa_3 \frac{\gamma}{180}$$

zu substituirenden Werthe von $\varkappa_3$ unter verschiedenen Verhältnissen der Röhrenweite zum Krümmungshalbmesser entnehmen kann.

I. Werthe des Faktors $\varkappa_3$ für den Widerstand der Krümmungen in zylindrischen Röhren.

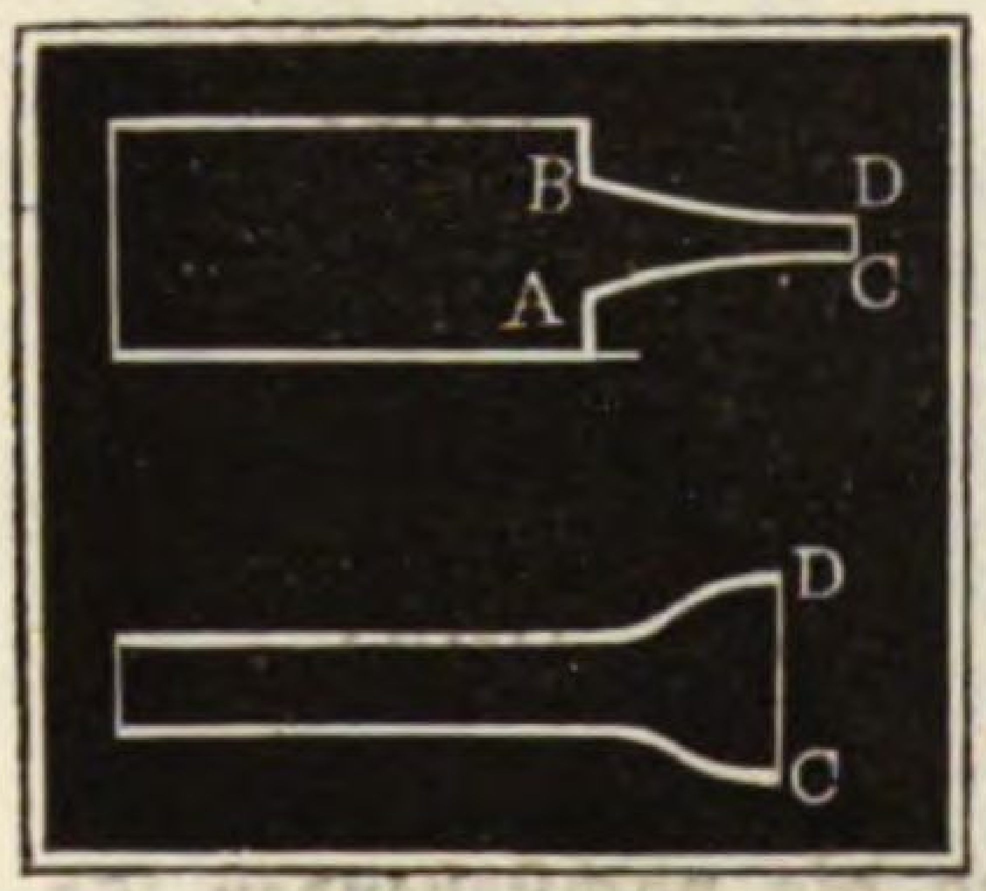
Werth des Verhältnisses $\frac{D}{r}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
Werth des Faktors $\varkappa_3$	0,131	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440	0,661	0,977	1,408	1,978

II. Werthe des Faktors $\varkappa_3$ für den Widerstand der Krümmungen in parallelepipedischen Röhren.

Werth des Verhältnisses $\frac{D}{r}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
Werth des Faktors $\varkappa_3$	0,124	0,135	0,180	0,250	0,398	0,643	1,015	1,546	2,271	3,228

§. 140. Fall, wo die Leitungsröhre durch ein Mundstück in die freie Luft ausmündet.

Wenn sich die Leitungsröhre nicht mit voller Öffnung Ω, sondern durch ein Mundstück in die Luft ergießt, dessen Ausmündung $CD = O''$ ist; so hat man in der allgemeinen Gleichung (568) den Koeffizienten $\frac{\Omega^2}{O''^2}$, welcher sich unter der Annahme von $O'' = \Omega$ in Gl. (593) auf 1 reduzirte, unverändert beizubehalten. Es sei aber der Kürze und Analogie mit den Koeffizienten k wegen



$$K'' = \frac{\Omega^2}{O''^2} \quad \ldots . (615)$$

Wäre die Röhre am unteren Ende einfach durch eine dünne Wand geschlossen, in der sich die Öffnung O'' befände; so würde man statt O'' überall den Werth mO'' des Querschnittes der größten Kontraktion jenseit der Ausmündung zu setzen haben. Die Kontraktion wird jedoch hier nie vollkommen sein können, weshalb man den Kontraktionskoeffizienten m nach §. 85 den Umständen gemäß würde korrigiren müssen.

Außerdem hat man unter dem Zeichen Σ in Gl. (569^a) für den Eintritt und Durchgang des Wassers durch das fragliche Mundstück den entsprechenden Widerstandskoeffizienten einzuführen, welcher mit k'' bezeichnet werde und sich je nach der besonderen Konstruktion des Mundstückes aus den Betrachtungen des §s 136 ergibt. Der Werth von k'' wird null sein, sobald alle in dem Mundstücke vorkommenden Kanten gehörig abgerundet sind.

Wenn das Mundstück ABDC sehr lang ist, wie bei Feuerspritzen, oder sehr eng; so darf auch der Widerstand nicht vernachlässigt werden, welchen das Wasser bei dem Durchgange durch dasselbe in Folge der Reibung erfährt. Wenn d den Durchmesser, l die Länge des Mundstückes und $\varkappa''$ den Koeffizienten für die Reibung nach §. 132 und 133 bezeichnet; so würde man den aus §. 136 für k'' gefundenen Werth, welcher sich auf die plötz-

lichen Querschnittsveränderungen in dem Mundstücke bezieht, nach der betreffenden Bemerkung des §s 133 noch um das Glied

$$\varkappa'' \frac{l}{d} \frac{D^4}{d^4}$$

vermehren und für denselben

$$k'' + \varkappa'' \frac{l}{d} \frac{D^4}{d^4} \quad \ldots \ldots (615^a)$$

substituiren müssen, worin, wie gewöhnlich, D den Durchmesser der Leitungsröhre darstellt.

Aus der Tabelle des §s 132 folgt, daß man bei großen Geschwindigkeiten für den Koeffizienten $\varkappa''$ nach der Annahme von Weisbach füglich den Werth

$$\varkappa'' = 0{,}016 \quad \ldots \ldots (615^b)$$

substituiren könne, sodaß der gesammte Widerstandskoeffizient für den Durchgang durch das Mundstück

$$k'' + 0{,}016 \frac{l}{d} \frac{D^4}{d^4}$$

ist.

Ist also unter Beibehaltung der übrigen Bezeichnungen

k' der Widerstandskoeffizient für den Eintritt des Wassers aus dem oberen Behälter in die Leitungsröhre aus Gl. (594) bis (596),

k_1 der Widerstandskoeffizient für den Durchgang des Wassers durch irgend eine in der Röhre befindliche Scheidewand, plötzliche Erweiterung oder Verengung oder durch ein Ventil aus §. 136 und 137,

k_2 der Widerstandskoeffizient für den Durchgang des Wassers durch irgend ein Knie nach §. 138,

k_3 der Widerstandskoeffizient für den Durchgang durch irgend eine Krümmung

k'' der Widerstandskoeffizient für den Eintritt des Wassers in das Mundstück,

$\varkappa \frac{L}{D}$ der Widerstandskoeffizient für die Reibung des Wassers an den Wänden der Leitungsröhre nach §. 132,

$\varkappa'' \frac{l}{d} \frac{D^4}{d^4}$ der Widerstandskoeffizient für die Reibung des Wassers in dem Mundstücke;

so wird man nach Gl. (569^a) haben, wenn man den Faktor $K' = \frac{\Omega^2}{O'^2}$ als ungemein klein vernachlässigt,

$$Z = \left(K'' + k' + k'' + \varkappa \frac{L}{D} + \varkappa'' \frac{l}{d} \frac{D^4}{d^4} + \Sigma k_1 + \Sigma k_2 + \Sigma k_3\right) \frac{V^2}{2g}, \quad \ldots (616)$$

worin unter die Zeichen Σ diejenigen Werthe resp. von k_1, k_2, k_3 zu setzen sind, welche sich in einem jeden besonderen Falle einer Röhrenleitung darbieten. Bestände die Röhre aus mehreren Stücken, von denen ein jedes einen anderen konstanten Querschnitt Ω besäße; so würde man auch den Reibungskoeffizienten $\varkappa \frac{L}{D}$ als eine Summe $\Sigma \varkappa \frac{L}{D}$ von den verschiedenen auf die einzelnen Röhrenstücke Bezug habenden Koeffizienten $\varkappa \frac{L}{D}$, $\varkappa' \frac{L'}{D'} \frac{D^4}{D'^4}$, $\varkappa'' \frac{L''}{D''} \frac{D^4}{D''^4}$ etc. (vergl. §. 133) darstellen und bei der Bestimmung der übrigen Koeffizienten k_1, k_2 etc. auf das verschiedene Röhrenkaliber Rücksicht nehmen müssen. $\frac{V^2}{2g}$ würde hierbei immer die Fallhöhe H für diejenige Geschwindigkeit V bezeichnen, welche das Wasser in dem Röhrenstücke vom Querschnitte Ω besäße.

Wenn man die vorstehende Gl. für V auflös't, was unmittelbar in der Form

$$V = \sqrt{\frac{2gZ}{K'' + k' + k'' + \varkappa \frac{L}{D} + \varkappa'' \frac{l}{d} \frac{D^4}{d^4} + \Sigma k_1 + \Sigma k_2 + \Sigma k_3}} \quad \ldots (617)$$

geschehen kann, sobald alle Widerstandskoeffizienten von V unabhängig sind (was übrigens für den Reibungskoeffizienten $\varkappa$ nur näherungsweise stattfindet); so erhält man die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre vom Querschnitte Ω.

Die Ausflußgeschwindigkeit des Wassers aus der äußersten Mündung O'' des Mundstückes ist.

$$V'' = \frac{\Omega}{O''} V, \quad \ldots . (618)$$

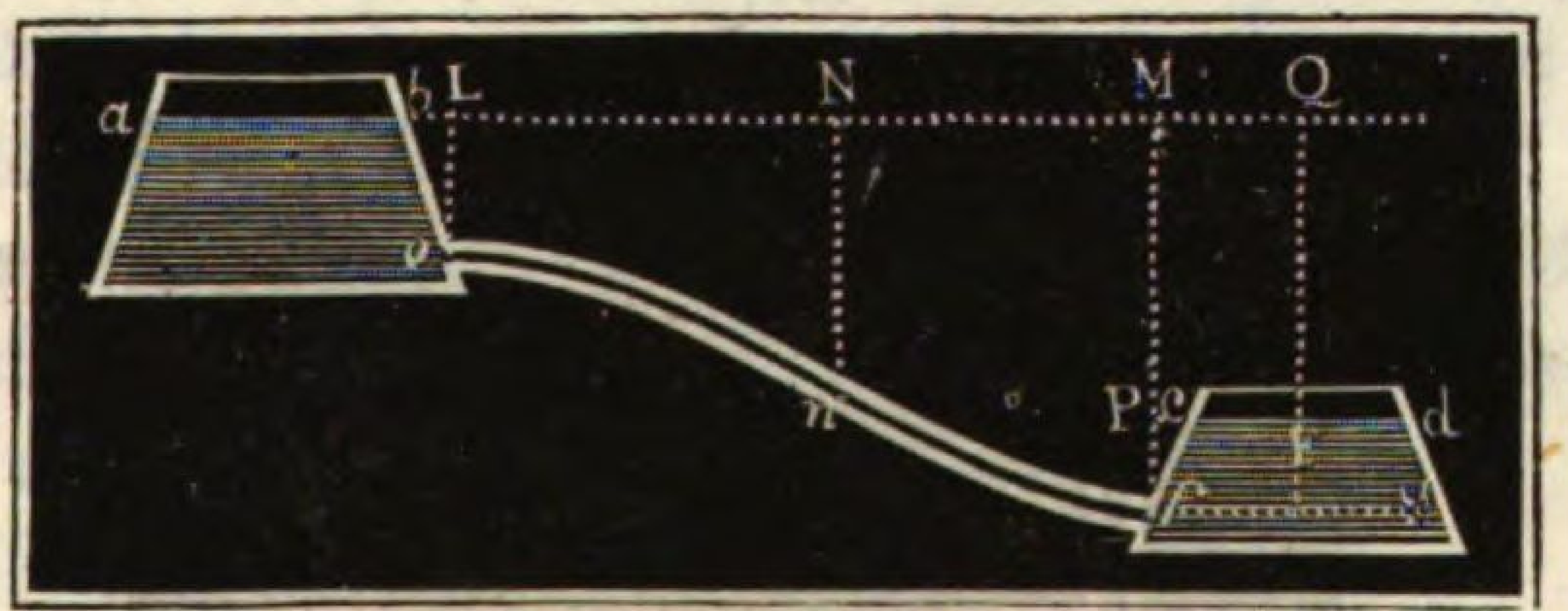
worin man für O'' den Werth mO'' des Querschnittes der größten Kontraktion zu setzen hätte, wenn das Wasser einfach durch die Öffnung O'' in einer dünnen Wand austräte. Der Koeffizient m würde bei dem an sich schon kleinen Querschnitte der Röhre unmittelbar vor der verengten Ausflußöffnung O'' in den meisten Fällen einer unvollkommenen Kontraktion angehören und demnach aus §. 85 zu entnehmen sein.

Die Ausflußmenge pro Sekunde ist endlich

$$Q = \Omega V \quad \ldots . (619)$$

§. 141. Fall, wo die Leitungsröhre unter dem Spiegel eines unteren Behälters ausmündet.

Wenn ein unterer Behälter mit konstantem Spiegel cd vorhanden ist, in welchen sich die Röhre ergießt; so vertritt der-



selbe die Stelle des im vorhergehenden Paragraphe betrachteten Mundstückes, und die letztern Formeln können unmittelbar in Anwendung gebracht werden. Ist der Spiegel $cd = O''$ des unteren Behälters sehr groß gegen den Querschnitt Ω der Röhre; so kann man

$$K'' = \frac{\Omega^2}{O''^2} = o$$

setzen. Ist ferner die Einmündung der Röhre in das untere Gefäß von der Art, daß die eintretenden Wasserschichten von dem Querschnitte Ω der Röhre plötzlich zu einem sehr viel größeren Querschnitte $fg = \omega_2$ des Gefäßes übergehen müssen: so hat man

den Widerstandskoeffizienten k'' für den Eintritt des Wassers in das untere Gefäß, welcher $\left(1-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2$ sein würde,

$$k''=1$$

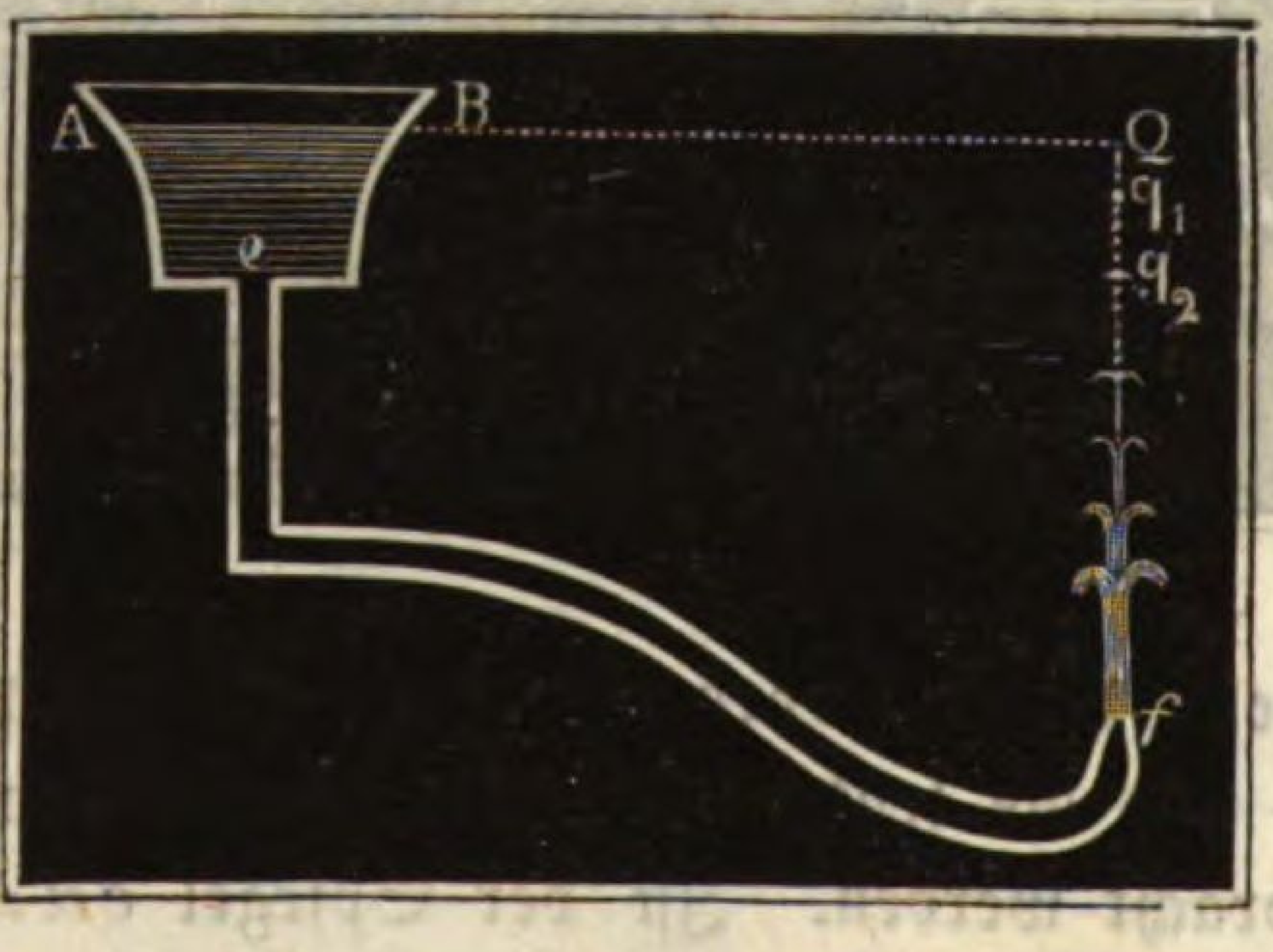
zu setzen; auch ist das für die Reibung der Flüssigkeit im Mundstücke oder unteren Gefäße berechnete Glied $\varkappa''\frac{l}{d}\frac{D^4}{d^4}$ zu unterdrücken.

Außerdem stellt, wie sich von selbst versteht, Z die Druckhöhe QF des Oberspiegels *ab* über dem Unterspiegel dar, und man hat

$$Z=\left(k'+\varkappa\frac{L}{D}+\Sigma k_1+\Sigma k_2+\Sigma k_3\right)\frac{V^2}{2g} \quad \ldots . (620)$$

§. 142. Höhe der springenden Strahlen, welche durch Röhrenleitungen gespeis't werden.

Wenn das Mundstück der in §. 140 betrachteten Röhrenleitung in freier Luft ausmündet, indem seine Axe senkrecht steht;



so wird der mit der Geschwindigkeit $\frac{\Omega V}{O''}$ hervorspringende Wasserstrahl sich bis zur Höhe $\frac{\Omega^2}{O''^2}\frac{V^2}{2g}$ erheben, welche der Geschwindigkeit $\frac{\Omega V}{O''}$ als Fallhöhe zukommt. Setzen wir diese Sprunghöhe

$$\frac{\Omega^2}{O''^2}\frac{V^2}{2g}=H; \quad \ldots . (621)$$

so folgt aus Gl. (616)

$$Z = \frac{O''^2}{\Omega^2}\left(K'' + k' + k'' + \varkappa \frac{L}{D} + \varkappa'' \frac{l}{d}\frac{D^4}{d^4} + \Sigma k_1 + \Sigma k_2 + \Sigma k_3\right) H$$

oder da nach Gl. (615) $K'' = \frac{\Omega^2}{O''^2}$ ist,

$$Z = \left[1 + \frac{O''^2}{\Omega^2}\left(k' + k'' + \varkappa \frac{L}{D} + \varkappa'' \frac{l}{d}\frac{D^4}{d^4} + \Sigma k_1 + \Sigma k_2 + \Sigma k_3\right)\right] H$$

und demnach, wenn man der Kürze wegen den Faktor

$$k' + k'' + \varkappa \frac{L}{D} + \varkappa'' \frac{l}{d}\frac{D^4}{d^4} + \Sigma k_1 + \Sigma k_2 + \Sigma k_3 = \Sigma k$$

setzt,

$$H = \frac{Z}{1 + \frac{O''^2}{\Omega^2}\Sigma k} \quad \ldots \ldots (622)$$

Will man sich dieser Formel zur Berechnung der Sprunghöhe H des Strahles bedienen; so setzt Dies voraus, daß alle Widerstandskoeffizienten k von V unabhängig seien, daß man also für $\varkappa$ einen konstanten Näherungswerth aus §. 132 substituirt habe. Im anderen Falle hat man die Gleichung (616) zuvor für V aufzulösen und alsdann die Sprunghöhe H nach Formel (621) zu ermitteln.

Nach den vorstehenden Gleichungen ist auch

$$H = Z - H\frac{O''^2}{\Omega^2}\Sigma k,$$

und die Sprunghöhe $H = \overline{fq}$ oder die der Ausflußgeschwindigkeit zukommende Fallhöhe ist um

$$Z - H = H\frac{O''^2}{\Omega^2}\Sigma k$$

kleiner, als die disponibele Druckhöhe $Z = \overline{fQ}$. Dieser Verlust an wirksamer Druckhöhe, welcher in der Figur durch die Höhe $\overline{Qq}$ dargestellt ist, geht aus den verschiedenen Widerständen hervor, welche das Wasser bei seinem Durchgange durch die Röhrenleitung und das Gefäß erleidet. Derselbe stellt sich in der

Form $H \frac{O''^2}{\Omega^2} \Sigma k$ als die Summe mehrerer Theile der wirksamen Druckhöhe $H = \overline{fq}$ dar, von denen ein jeder Theil die Höhe darstellt, welche der betreffende Widerstand an der gesammten Druckhöhe Z schmälert. Setzt man allgemein die Größe

$$H \frac{O''^2}{\Omega^2} k = \frac{V^2}{2g} k = h;$$

so hat man Σh für den gesammten Verlust an wirksamer Druckhöhe und

$$H = Z - \Sigma h$$

für die übrig bleibende Druckhöhe, welche den Ausfluß des Wassers gerade so bewirkt, als wenn sich der Bewegung desselben gar keine Widerstände entgegenstellten. Eine Größe, wie h, nennt man die Widerstandshöhe in Bezug auf die besondere Art des Widerstandes, durch welchen dieselbe erzeugt ist, und für welche k der entsprechende Widerstandskoeffizient ist.

Denkt man sich die gesammte Druckhöhe $\overline{Qf} = Z$ in zwei Theile $\overline{Qq} = Z - H$ und $\overline{fq} = H$ zerlegt, welche sich verhalten, wie

$$\frac{O''^2}{\Omega^2} \Sigma k : 1;$$

so erhält man in dem ersteren Theile Qq den Verlust an Druckhöhe oder die gesammte Widerstandshöhe und in dem letzteren Theile fq die übrig bleibende wirksame Druck- oder Sprunghöhe.

Nimmt man ferner die verhältnißmäßigen Theile $\frac{O''^2}{\Omega^2} k$ (worin k nach und nach die verschiedenen Werthe k', k'', k_1 etc. erhält) von $\overline{fq}$ oder H; so wird allgemein irgend Einer derselben eine Widerstandshöhe

$$H \frac{O''^2}{\Omega^2} k = h$$

darstellen. Die Summe Σh aller dieser Theile ist gleich der Linie Qq oder $Z - H$, und wenn man die letztere Linie nach diesen Theilen durch die Punkte q_1, q_2 etc. abtheilt; so werden $\overline{Qq_1}$, $\overline{q_1 q_2}$, etc. die verschiedenen Widerstandshöhen darstellen;

deren Summe $\overline{\mathfrak{Q}_q} = Z - H$ ist, und welche durch die einzelnen der Bewegung des Wassers entgegenwirkenden Ursachen herbeigeführt werden.

Endlich muß noch bemerkt werden, daß der springende Strahl fq theils durch den Widerstand der Luft, welche derselbe durchdringen muß, theils weil die von der Höhe q wieder zurückfallenden Wassertheilchen die Bewegung der aufsteigenden hindern, nicht ganz die vorstehend mit H bezeichnete Höhe erreicht.

Bezeichnet man die unter diesen Hindernissen wirklich stattfindende Steighöhe des springenden Strahles mit H_1; so kann man nach D'Aubuisson

$$H_1 = H(1 - 0{,}00314 H) \qquad \ldots . (623)$$

setzen.

Wenn der Strahl nicht genau vertikal, sondern etwas schräg gerichtet ist; so hemmen die zurückfallenden Wassertheilchen die aufsteigenden nicht mehr in so bedeutendem Maaße, und die Steighöhe des Strahles vermehrt sich noch etwas über den Werth aus Gl. (623).

Bewegung des Wassers in offenen Kanälen und Flußbetten.

§. 143. Bestimmung der Flächen von gleichem Niveau und des hydraulischen Druckes in einem Wasserstrome, welcher mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einem Flußbette von konstantem Gefälle herabgleitet.

Die Bewegung des Wassers oder einer sonstigen schweren unpreßbaren Flüssigkeit in einem offenen Kanale unterscheidet sich von der bisher betrachteten Bewegung derartiger Flüssigkeiten in Gefäßen besonders dadurch, daß hier die Gestalten der Querschnitte, welche die Flüssigkeit nach und nach einnehmen muß, wegen der mit der Axe des Kanales parallel laufenden Öffnung des Flußbettes im Voraus nicht bekannt sind.

Will man ferner die Hypothese vom Parallelismus der Querschichten auf diese Art der Bewegung anwenden, worin bisher das einzige Mittel bestanden hat, die dabei obwaltenden Erscheinungen in eine mathematische Theorie zu kleiden; so bemerkt man, daß die Richtung dieser Querschichten, welche nothwendig normal

$\varkappa'' \frac{l}{d} \frac{D^4}{d^4}$ der Widerstandskoeffizient für die Reibung des Wassers in dem Mundstücke;

so wird man nach Gl. (569^a) haben, wenn man den Faktor $K' = \frac{\Omega^2}{O'^2}$ als ungemein klein vernachlässigt,

$$Z = \left(K'' + k' + k'' + \varkappa \frac{L}{D} + \varkappa'' \frac{l}{d} \frac{D^4}{d^4} + \Sigma k_1 + \Sigma k_2 + \Sigma k_3\right) \frac{V^2}{2g}, \ldots (616)$$

worin unter die Zeichen Σ diejenigen Werthe resp. von k_1, k_2, k_3 zu setzen sind, welche sich in einem jeden besonderen Falle einer Röhrenleitung darbieten. Bestände die Röhre aus mehreren Stücken, von denen ein jedes einen anderen konstanten Querschnitt Ω besäße; so würde man auch den Reibungskoeffizienten $\varkappa \frac{L}{D}$ als eine Summe $\Sigma \varkappa \frac{L}{D}$ von den verschiedenen auf die einzelnen Röhrenstücke Bezug habenden Koeffizienten $\varkappa \frac{L}{D}$, $\varkappa' \frac{L}{D'} \frac{D^4}{D'^4}$, $\varkappa'' \frac{L''}{D''} \frac{D^4}{D''^4}$ etc. (vergl. §. 133) darstellen und bei der Bestimmung der übrigen Koeffizienten k_1, k_2 etc. auf das verschiedene Röhrenkaliber Rücksicht nehmen müssen. $\frac{V^2}{2g}$ würde hierbei immer die Fallhöhe H für diejenige Geschwindigkeit V bezeichnen, welche das Wasser in dem Röhrenstücke vom Querschnitte Ω besäße.

Wenn man die vorstehende Gl. für V auflös't, was unmittelbar in der Form

$$V = \sqrt{\frac{2gZ}{K'' + k' + k'' + \varkappa \frac{L}{D} + \varkappa'' \frac{l}{d} \frac{D^4}{d^4} + \Sigma k_1 + \Sigma k_2 + \Sigma k_3}} \ldots (617)$$

geschehen kann, sobald alle Widerstandskoeffizienten von V unabhängig sind (was übrigens für den Reibungskoeffizienten $\varkappa$ nur näherungsweise stattfindet); so erhält man die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre vom Querschnitte Ω.

Die Ausflußgeschwindigkeit des Wassers aus der äußersten Mündung O″ des Mundstückes ist.

$$V'' = \frac{\Omega}{O''} V, \quad \ldots . (618)$$

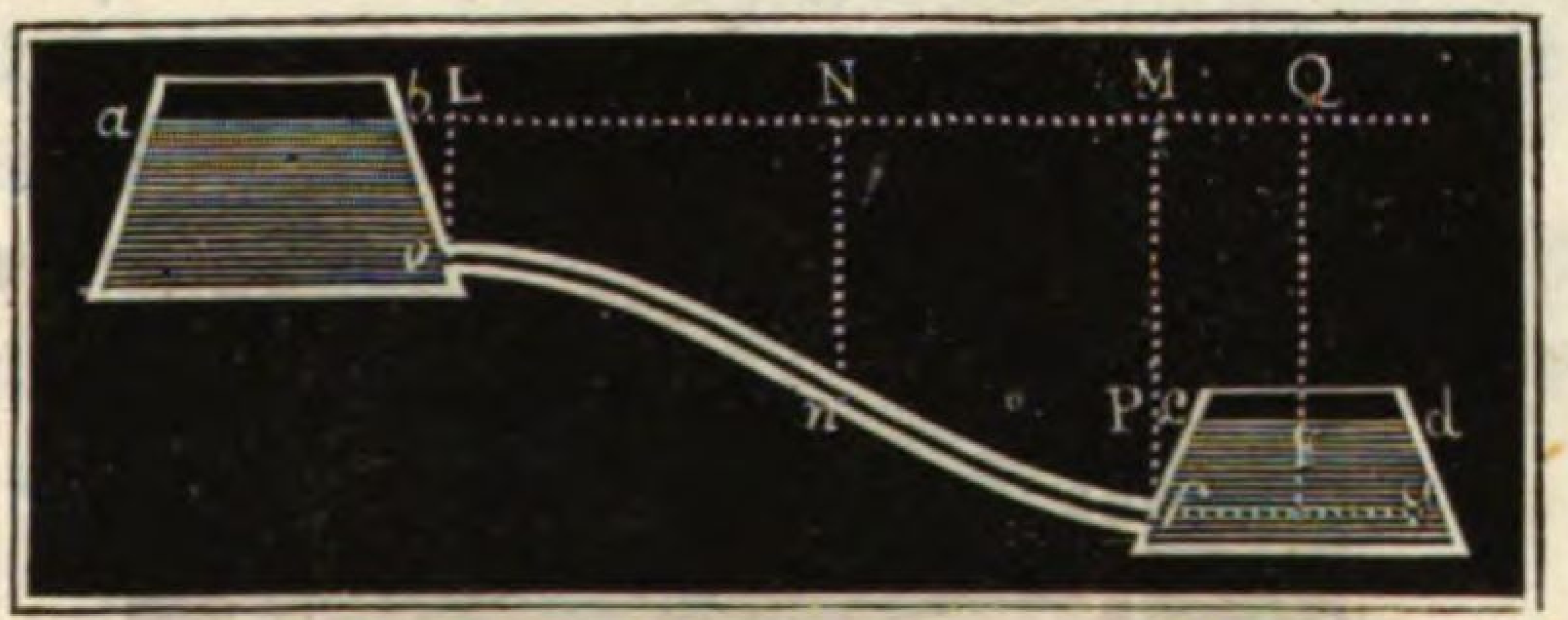
worin man für O'' den Werth mO'' des Querschnittes der größten Kontraktion zu setzen hätte, wenn das Wasser einfach durch die Öffnung O'' in einer dünnen Wand austräte. Der Koeffizient m würde bei dem an sich schon kleinen Querschnitte der Röhre unmittelbar vor der verengten Ausflußöffnung O'' in den meisten Fällen einer unvollkommenen Kontraktion angehören und demnach aus §. 85 zu entnehmen sein.

Die Ausflußmenge pro Sekunde ist endlich

$$Q = \Omega V \quad \ldots . (619)$$

§. 141. **Fall, wo die Leitungsröhre unter dem Spiegel eines unteren Behälters ausmündet.**

Wenn ein unterer Behälter mit konstantem Spiegel cd vorhanden ist, in welchen sich die Röhre ergießt; so vertritt der-



selbe die Stelle des im vorhergehenden Paragraphe betrachteten Mundstückes, und die letztern Formeln können unmittelbar in Anwendung gebracht werden. Ist der Spiegel $cd = O''$ des unteren Behälters sehr groß gegen den Querschnitt Ω der Röhre; so kann man

$$K'' = \frac{\Omega^2}{O''^2} = o$$

setzen. Ist ferner die Einmündung der Röhre in das untere Gefäß von der Art, daß die eintretenden Wasserschichten von dem Querschnitte Ω der Röhre plötzlich zu einem sehr viel größeren Querschnitte $fg = \omega_2$ des Gefäßes übergehen müssen: so hat man

den Widerstandskoeffizienten k'' für den Eintritt des Wassers in das untere Gefäß, welcher $\left(1-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2$ sein würde,

$$k''=1$$

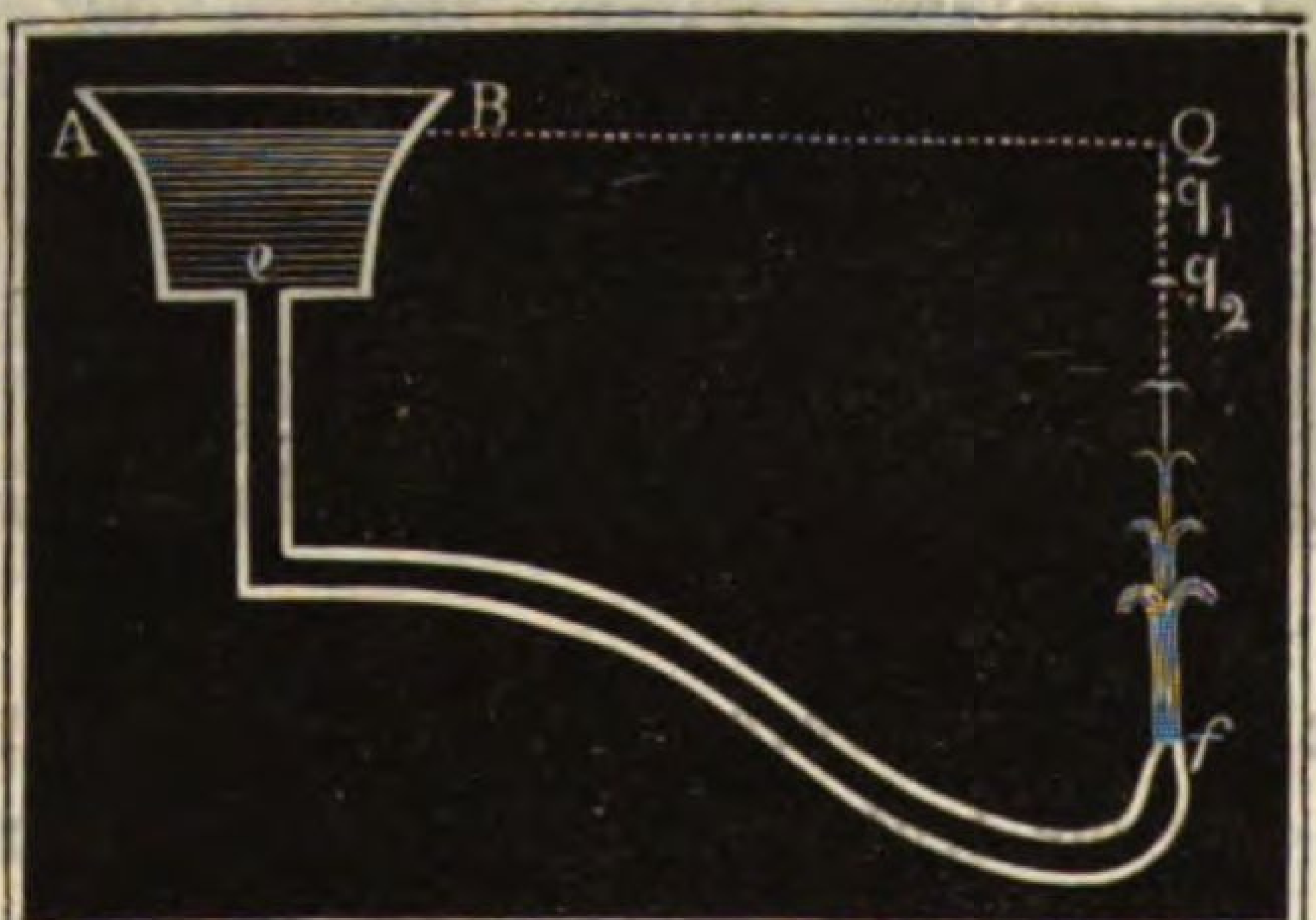
zu setzen; auch ist das für die Reibung der Flüssigkeit im Mundstücke oder unteren Gefäße berechnete Glied $\varkappa''\frac{l}{d}\frac{D^4}{d^4}$ zu unterdrücken.

Außerdem stellt, wie sich von selbst versteht, Z die Druckhöhe QF des Oberspiegels *ab* über dem Unterspiegel dar, und man hat

$$Z=\left(k'+\varkappa\frac{L}{D}+\Sigma k_1+\Sigma k_2+\Sigma k_3\right)\frac{V^2}{2g} \quad \ldots . (620)$$

§. 142. Höhe der springenden Strahlen, welche durch Röhrenleitungen gespeis't werden.

Wenn das Mundstück der in §. 140 betrachteten Röhrenleitung in freier Luft ausmündet, indem seine Axe senkrecht steht;



so wird der mit der Geschwindigkeit $\frac{\Omega V}{O''}$ hervorspringende Wasserstrahl sich bis zur Höhe $\frac{\Omega^2}{O''^2}\frac{V^2}{2g}$ erheben, welche der Geschwindigkeit $\frac{\Omega V}{O''}$ als Fallhöhe zukommt. Setzen wir diese Sprunghöhe

$$\frac{\Omega^2}{O''^2}\frac{V^2}{2g}=H; \quad \ldots . (621)$$

so folgt aus Gl. (616)

$$Z = \frac{O''^2}{\Omega^2}\left(K'' + k' + k'' + \varkappa\frac{L}{D} + \varkappa''\frac{l}{d}\frac{D^4}{d^4} + \Sigma k_1 + \Sigma k_2 + \Sigma k_3\right)H$$

oder da nach Gl. (615) $K'' = \frac{\Omega^2}{O''^2}$ ist,

$$Z = \left[1 + \frac{O''^2}{\Omega^2}\left(k' + k'' + \varkappa\frac{L}{D} + \varkappa''\frac{l}{d}\frac{D^4}{d^4} + \Sigma k_1 + \Sigma k_2 + \Sigma k_3\right)\right]H$$

und demnach, wenn man der Kürze wegen den Faktor

$$k' + k'' + \varkappa\frac{L}{D} + \varkappa''\frac{l}{d}\frac{D^4}{d^4} + \Sigma k_1 + \Sigma k_2 + \Sigma k_3 = \Sigma k$$

setzt,

$$H = \frac{Z}{1 + \frac{O''^2}{\Omega^2}\Sigma k} \quad \ldots . (622)$$

Will man sich dieser Formel zur Berechnung der Sprunghöhe H des Strahles bedienen; so setzt Dies voraus, daß alle Widerstandskoeffizienten k von V unabhängig seien, daß man also für $\varkappa$ einen konstanten Näherungswerth aus §. 132 substituirt habe. Im anderen Falle hat man die Gleichung (616) zuvor für V aufzulösen und alsdann die Sprunghöhe H nach Formel (621) zu ermitteln.

Nach den vorstehenden Gleichungen ist auch

$$H = Z - H\frac{O''^2}{\Omega^2}\Sigma k,$$

und die Sprunghöhe $H = \overline{fq}$ oder die der Ausflußgeschwindigkeit zukommende Fallhöhe ist um

$$Z - H = H\frac{O''^2}{\Omega^2}\Sigma k$$

kleiner, als die disponibele Druckhöhe $Z = \overline{fQ}$. Dieser Verlust an wirksamer Druckhöhe, welcher in der Figur durch die Höhe $\overline{Qq}$ dargestellt ist, geht aus den verschiedenen Widerständen hervor, welche das Wasser bei seinem Durchgange durch die Röhrenleitung und das Gefäß erleidet. Derselbe stellt sich in der

Form $H\frac{O''^2}{\Omega^2}\Sigma k$ als die Summe mehrerer Theile der wirksamen Druckhöhe $H=\overline{fq}$ dar, von denen ein jeder Theil die Höhe darstellt, welche der betreffende Widerstand an der gesammten Druckhöhe Z schmälert. Setzt man allgemein die Größe

$$H\frac{O''^2}{\Omega^2}k=\frac{V^2}{2g}k=h;$$

so hat man Σh für den gesammten Verlust an wirksamer Druckhöhe und

$$H=Z-\Sigma h$$

für die übrig bleibende Druckhöhe, welche den Ausfluß des Wassers gerade so bewirkt, als wenn sich der Bewegung desselben gar keine Widerstände entgegenstellten. Eine Größe, wie h, nennt man die Widerstandshöhe in Bezug auf die besondere Art des Widerstandes, durch welchen dieselbe erzeugt ist, und für welche k der entsprechende Widerstandskoeffizient ist.

Denkt man sich die gesammte Druckhöhe $\overline{Qf}=Z$ in zwei Theile $\overline{Qq}=Z-H$ und $\overline{fq}=H$ zerlegt, welche sich verhalten, wie

$$\frac{O''^2}{\Omega^2}\Sigma k:1;$$

so erhält man in dem ersteren Theile Qq den Verlust an Druckhöhe oder die gesammte Widerstandshöhe und in dem letzteren Theile fq die übrig bleibende wirksame Druck- oder Sprunghöhe.

Nimmt man ferner die verhältnißmäßigen Theile $\frac{O''^2}{\Omega^2}k$ (worin k nach und nach die verschiedenen Werthe k', k'', k_1 etc. erhält) von $\overline{fq}$ oder H; so wird allgemein irgend Einer derselben eine Widerstandshöhe

$$H\frac{O''^2}{\Omega^2}k=h$$

darstellen. Die Summe Σh aller dieser Theile ist gleich der Linie Qq oder $Z-H$, und wenn man die letztere Linie nach diesen Theilen durch die Punkte q_1, q_2 etc. abtheilt; so werden $\overline{Qq_1}$, $\overline{q_1q_2}$, etc. die verschiedenen Widerstandshöhen darstellen;

deren Summe $\overline{Q_q} = Z - H$ ist, und welche durch die einzelnen der Bewegung des Wassers entgegenwirkenden Ursachen herbeigeführt werden.

Endlich muß noch bemerkt werden, daß der springende Strahl fq theils durch den Widerstand der Luft, welche derselbe durchdringen muß, theils weil die von der Höhe q wieder zurückfallenden Wassertheilchen die Bewegung der aufsteigenden hindern, nicht ganz die vorstehend mit H bezeichnete Höhe erreicht.

Bezeichnet man die unter diesen Hindernissen wirklich stattfindende Steighöhe des springenden Strahles mit H_1; so kann man nach D'Aubuisson

$$H_1 = H(1 - 0{,}00314\,H) \quad \ldots . (623)$$

setzen.

Wenn der Strahl nicht genau vertikal, sondern etwas schräg gerichtet ist; so hemmen die zurückfallenden Wassertheilchen die aufsteigenden nicht mehr in so bedeutendem Maaße, und die Steighöhe des Strahles vermehrt sich noch etwas über den Werth aus Gl. (623).

Bewegung des Wassers in offenen Kanälen und Flußbetten.

§. 143. Bestimmung der Flächen von gleichem Niveau und des hydraulischen Druckes in einem Wasserstrome, welcher mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einem Flußbette von konstantem Gefälle herabgleitet.

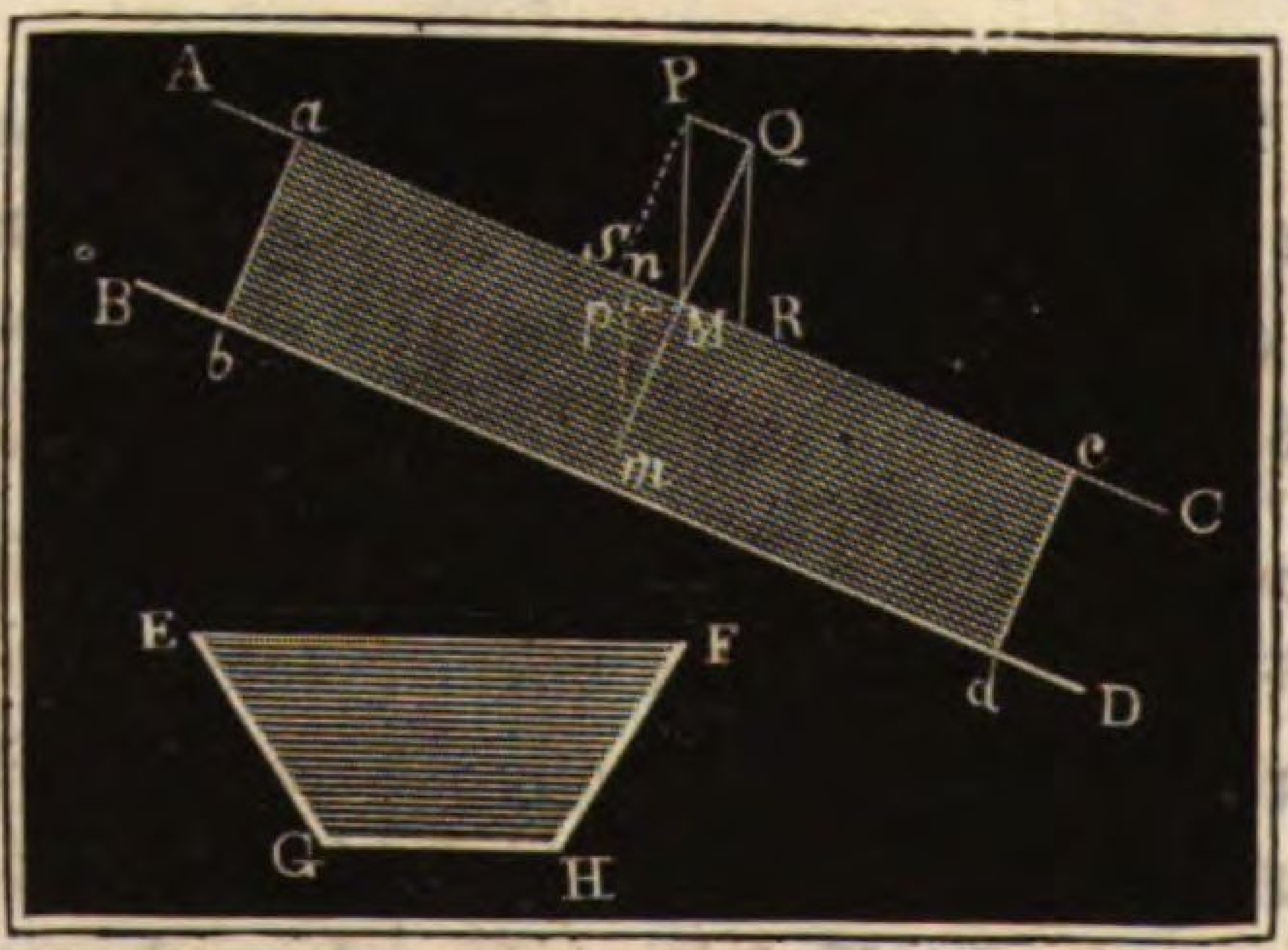
Die Bewegung des Wassers oder einer sonstigen schweren unpreßbaren Flüssigkeit in einem offenen Kanale unterscheidet sich von der bisher betrachteten Bewegung derartiger Flüssigkeiten in Gefäßen besonders dadurch, daß hier die Gestalten der Querschnitte, welche die Flüssigkeit nach und nach einnehmen muß, wegen der mit der Axe des Kanales parallel laufenden Öffnung des Flußbettes im Voraus nicht bekannt sind.

Will man ferner die Hypothese vom Parallelismus der Querschichten auf diese Art der Bewegung anwenden, worin bisher das einzige Mittel bestanden hat, die dabei obwaltenden Erscheinungen in eine mathematische Theorie zu kleiden; so bemerkt man, daß die Richtung dieser Querschichten, welche nothwendig normal

auf der Richtung der Bewegung stehen müssen, nahezu **vertikal** sein werden, daß sich also in einer jeden solchen Querschicht der hydraulische Druck von Punkt zu Punkt merklich ändern wird. Diese Variation des Druckes innerhalb Ein und desselben Querprofiles konnte bei der Bewegung in **Gefäßen** oder **Röhren** dann vernachlässigt werden, wenn die **Richtung** des Profiles **horizontal** oder wenn die **Größe** des Profiles, absolut genommen, sehr **klein** war, oder auch dann noch, wenn sich die Flüssigkeit in dem Profile mit so **geringer Geschwindigkeit** bewegte, daß dieselbe an der fraglichen Stelle des Gefäßes als ruhend gedacht werden konnte.

Alle diese Voraussetzungen treffen bei der Bewegung des Wassers in Kanälen in der Regel nicht zu, und da es bei der späteren Entwickelung von Wichtigkeit sein wird, das Gesetz zu kennen, nach welchem der hydrauilsche Druck in einer so bewegten Flüssigkeit vom freien Oberspiegel bis auf den Boden variirt; so wollen wir die hierauf abzweckende Untersuchung vorausschicken.

Denken wir uns eine prismatische ringsherum geschlossene Röhre **ABDC** mit gerader Axe und mit beliebigem, aber konstantem Querschnitte **EFGH.** Diese Röhre sei unter dem Win-



kel η gegen den Horizont geneigt, und eine Quantität Flüssigkeit *abcd*, deren Endflächen in den Ebenen *ab* und *cd* gehalten werden, gleite in derselben herab.

Wenn gegen die Endflächen *ab* und *cd* derselbe Druck ausgeübt wird, und die Wände der Röhre äußern nicht die mindeste Reibung oder Adhäsion gegen die Flüssigkeit; so wird die ganze Masse *abcd* mit gleichförmig beschleunigter Geschwindigkeit ab-

wärts gleiten, indem ein jedes Massentheilchen eine unter dem Winkel η gegen den Horizont geneigte gerade Linie beschreibt.

Die Flüssigkeit ist in diesem Zustande nicht im Gleichgewichte, weil die Bewegung der einzelnen Theilchen nicht gleichförmig ist. Stellt PM die vertikal gerichtete Wirkung g der Schwere auf irgend ein solches Theilchen M dar, und zerlegt man diese Kraft parallel und normal zu der Richtung der Bewegung jenes Theilchens in die beiden Komponenten $SM = g \sin \eta$ und $QM = g \cos \eta$; so wird die beschleunigte Bewegung des Theilchens M durch die stetig wirkende Kraft $g \sin \eta$ hervorgebracht. Bringt man also auf dasselbe Theilchen in der seiner Bewegung direkt entgegengesetzten Richtung RM dieselbe Kraft $RM = g \sin \eta$ an; so wird dadurch die Bewegung in den Zustand der Gleichförmigkeit übergeführt, und nach dem d'Alembertschen Prinzipe muß Gleichgewicht stattfinden, wenn man sich ein jedes Theilchen, wie M, von den beiden Kräften $PM = g$ in vertikaler und $RM = g \sin \eta$ in der entgegengesetzten Richtung des Gefäßes belebt denkt. Die Resultante der letzteren beiden Kräfte ist QM, eine Kraft, welche $= g \cos \eta$ ist und auf der Richtung des Gefälles perpendikular steht.

Da nun die Flüssigkeit unter der Wirkung der Kräfte $QM = g \cos \eta$ im Gleichgewichte sein muß; so folgt aus den Prinzipien des §s 6, daß sämmtliche Flächen von gleichem Niveau oder in denen derselbe Druck herrscht, Ebenen bilden werden, welche auf der Richtung QM normal stehen, also unter dem Winkel η gegen den Horizont geneigt sind.

Ist nun der Druck in der obersten Fläche ac von gleichem Niveau gleich p', und man bezeichnet den normalen Abstand mM irgend eines Punktes m von dieser obersten Fläche mit h, auch das Gewicht der Volumeinheit der Flüssigkeit mit w; so folgt hier ganz ebenso wie in §. 125 bei dem Falle, wo die Flüssigkeit in einem Gefäße auf einer geneigten Ebene herabglitt, daß der hydraulische Druck p im Punkte m

$$p = p' + wh \cos \eta$$

sein wird.

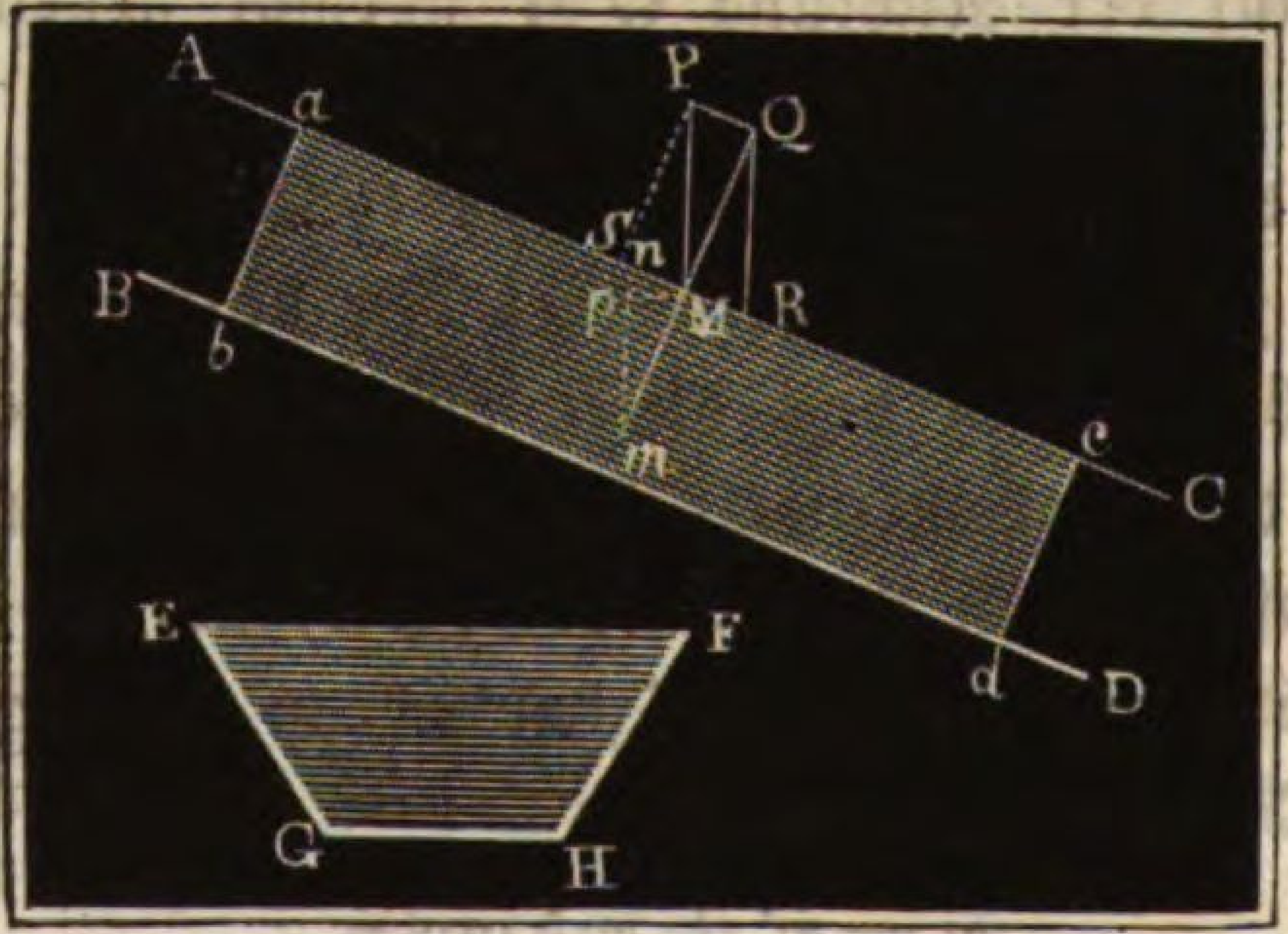
Wenn man die vertikale Tiefe mn des Punktes m unter der höchsten Fläche von gleichem Niveau mit z bezeichnet; so hat man auch, da $h = z \cos \eta$ ist,

$$p = p' + w z \cos^2 \eta.$$

Denkt man sich von M die Horizontale Mp gezogen; so ist $mp = h \cos \eta$. Der in m herrschende Druck entspricht also dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule von der Höhe mp und der Flächeneinheit zur Basis, plus dem im Punkte M selbst herrschenden Drucke p'.

Nimmt man endlich an, der hydraulische Druck p' in der obersten geneigten Fläche ac von gleichem Niveau sei gleich dem atmosphärischen Drucke; so kann man sich die Wand der Röhre an dieser Stelle ganz hinwegdenken, also die Röhre in ein offenes Flußbett verwandeln, ohne daß die vorstehenden Gesetze aufhören, Gültigkeit zu behalten.

Unter den vorstehenden Voraussetzungen, wo die Flüssigkeit nicht im Gleichgewichte sein konnte, mußte sich ihre Geschwindigkeit mit der Zeit immer mehr und mehr beschleunigen. Nehmen wir jetzt an, die Wände der Röhre üben eine gewisse Reibung oder Adhäsion auf die Flüssigkeit aus, die sich vermöge der Kohäsion der Flüssigkeit über alle Theilchen derselben verbreite, und welcher zufolge die flüssige Masse $abdc$ mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit in der Röhre herabgleite; so wird die Flüssigkeit gleich von vorn herein unter der Wirkung der auf sie angebrachten Kräfte im Gleichgewichte sein, und man kann zur Bestimmung der Flächen von gleichem Niveau sofort die Prin-



zipien des §s 6 darauf in Anwendung bringen, sobald man die auf jedes Theilchen wirkenden Kräfte kennt. Diese Kräfte sind aber zuvörderst die Wirkung PM $= g$ der Schwere, und außer-

dem muß in der Richtung RM eine Kraft wirksam sein, welche im Stande ist, der Komponente $SM = g \sin \eta$ der Schwere das Gleichgewicht zu halten und die beschleunigende Wirkung der Kraft PM in der Richtung M*c* zu neutralisiren.

Es sind also auch hier, wie vorhin, die beiden Kräfte $PM = g$ und $RM = g \sin \eta$, unter welchen die Flüssigkeit im Gleichgewichte sein muß. Man hat daher hier dieselben Resultate hinsichtlich der Flächen von gleichem Niveau zu erwarten, wie im vorstehenden Falle.

Daraus folgt, daß alle Flächen von gleichem Niveau Ebenen sein werden, welche sich unter dem Winkel η gegen den Horizont neigen und dem Gefälle parallel sind, daß man die oberste diesen Ebenen parallele Wand der Röhre entfernen und dafür entweder den leeren oder den lufterfüllten Raum substituiren kann, ohne daß sich der Zustand der Bewegung der Flüssigkeit ändert, und endlich, daß unter Beibehaltung der obigen Bezeichnung

$$\left.\begin{array}{l} p = p' + wh \cos \eta \\ \text{oder} \\ p = p' + wz \cos^2 \eta \end{array}\right\} \quad \ldots . (624)$$

den in irgend einem Punkte *m* stattfindenden hydraulischen Druck darstellt.

Damit die vorstehenden Gesetze auf die flüssige Masse *abdc* Anwendung behalten, ist es nicht nothwendig, daß man sich dieselbe an den Enden durch zwei normale Ebenen *ab* und *cd* begränzt denkt. Die Figur dieser Endflächen kann ganz beliebig sein, nur ist es erforderlich, daß sich dieselbe nicht im Laufe der Bewegung ändere, wodurch Seitenströmungen entständen und die Theilchen verhindert würden, parallele Wege mit gleichförmiger Geschwindigkeit zu durchlaufen. Man könnte sich daher vorstellen, bei *ab* und *cd* seien starre Wände angebracht und durch eine Stange fest miteinander verbunden. Denkt man sich jedoch den Widerstand dieser Wände durch den gleichen Gegendruck zweier bei A*ab*B und C*cd*D befindlichen ähnlichen Flüssigkeitsmassen hervorgebracht; so sieht man, daß alles Vorstehende auch dann noch Gültigkeit behält, wenn die Masse *abdc* der Theil eines größeren Stromes ABDC ist.

Dem durch die Formel (624) ausgedrückten Resultate widerspricht Navier *), indem er sehr nachdrücklich, wiewol ohne Beweis behauptet, der in irgend einem Punkte m herrschende Druck sei gleich dem, welcher der vertikalen Tiefe mn dieses Punktes unter der freien Oberfläche der Flüssigkeit entspreche, sodaß hiernach $p=p'+wz$ wäre. Die Richtigkeit des vorstehend entwickelten Ergebnisses unterliegt keinem Zweifel. Es scheint, als ob Navier zu der irrigen Behauptung dadurch gekommen sei, daß er die mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich bewegende flüssige Masse zwar richtig wie ein im Geichgewichte befindliches System angesehen, dabei aber unbeachtet gelassen hat, daß dieses System nicht unter der Wirkung der Schwere PM allein, sondern unter Konkurrenz der in entgegengesetzter Richtung des Gefälles wirkenden Kräfte RM im Gleichgewichte sich befindet. Die Abweichung des Navierschen Resultates wird augenfällig, wenn man sich die Neigung des Bettes BD gegen den Horizont sehr groß, fast lothrecht denkt. Alsdann müßte der Druck in irgend einem Punkte m der Flüssigkeit dem unendlich Großen sich nähern, während er doch in der That gleich dem bei M herrschenden oder gleich dem atmosphärischen zu werden strebt und für ein vertikales Gefälle diesen Werth wirklich erreicht.

Wenn einem auf einer geneigten Ebene herabgleitenden schweren Körper M in entgegengesetzter Richtung seiner Bewegung eine Kraft RM entgegenwirkt, welche gleich der Komponente SM der Schwere in dieser Richtung ist; so wird die Bewegung dadurch gleichförmig und sein Zustand ist der eines Gleichgewichtes, wobei es auf die absolute Geschwindigkeit, mit welcher seine Bewegung eingeleitet ist und fortbesteht, gar nicht ankommt. Deshalb hat die Geschwindigkeit, mit welcher der zuletzt betrachtete Strom $abdc$ abwärts fließt, auf die Gestalten der Flächen von gleichem Niveau und auf die Stärke des hydraulischen Druckes, welcher sich in irgend einem Punkte m herausstellt, gar keinen Einfluß, ja es ist sogar gleichgültig, ob sich die verschiedenen Fäden desselben, welche sämmtlich eine zu BD parallele Richtung haben, mit derselben oder mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortbewegen.

*) Résumé des leçons sur l'application de la mécanique. Seconde partie. No. 125.

Bei einem natürlichen Strome, wo sich der Adhäsionswiderstand des Flußbettes von den Seiten und vom Boden nach der Mitte zu vermöge der Kohäsion der Flüssigkeit fortpflanzt, tritt nun wirklich ein Zustand ein, bei welchem sich die nahezu unter der Mitte der freien Oberfläche oder im Stromstriche liegenden Theilchen am rascheften und die den Ufern dem Boden zunächst liegenden Theilchen am langsamsten bewegen. Da jedoch die Bewegung aller dieser Theilchen mit gleichförmiger Geschwindigkeit und in parallelen Linien erfolgt; so werden hierdurch die obigen Gesetze hinsichtlich der Gestalten der Flächen von gleichem Niveau nicht geändert, und es ist irrig, wenn Weisbach*) hierauf ein Prinzip in Anwendung bringt, aus welchem folgt, daß die in der Mitte des freien Spiegels sich rascher bewegenden Theilchen ein höheres Niveau einnehmen müßten, als die den Ufern näher liegenden Theilchen desselben Spiegels, sodaß die Flächen von gleichem Niveau nach oben gekrümmte Flächen bildeten. Das fragliche Prinzip, aus welchem Weisbach Dies folgert, bezieht sich nicht auf einen Inbegriff von Flüssigkeitsfäden, von denen ein jeder einzelne unter Beibehaltung eines konstanten Querschnittes mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortgleitet, sondern auf solche Fäden, von denen ein jeder in seinen verschiedenen Punkten eine verschiedene Geschwindigkeit und demzufolge einen verschiedenen Querschnitt besitzen kann, welcher durch die Form eines gegebenen Gefäßes bedingt ist. In einem solchen Faden, der auf seine ganze Erstreckung gar nicht im Gleichgewichte ist, variirt der hydraulische Druck von Punkt zu Punkt seiner Länge, und ist abhängig von der in diesem Punkte stattfindenden Geschwindigkeit oder von dem daselbst herrschenden Querschnitte, während dieser Druck in einem Stromfaden der vorhin betrachteten Art, wie z. B. ac, überall derselbe ist und sich nicht ändert, wenn auch die Geschwindigkeit des ganzen Fadens variirt.

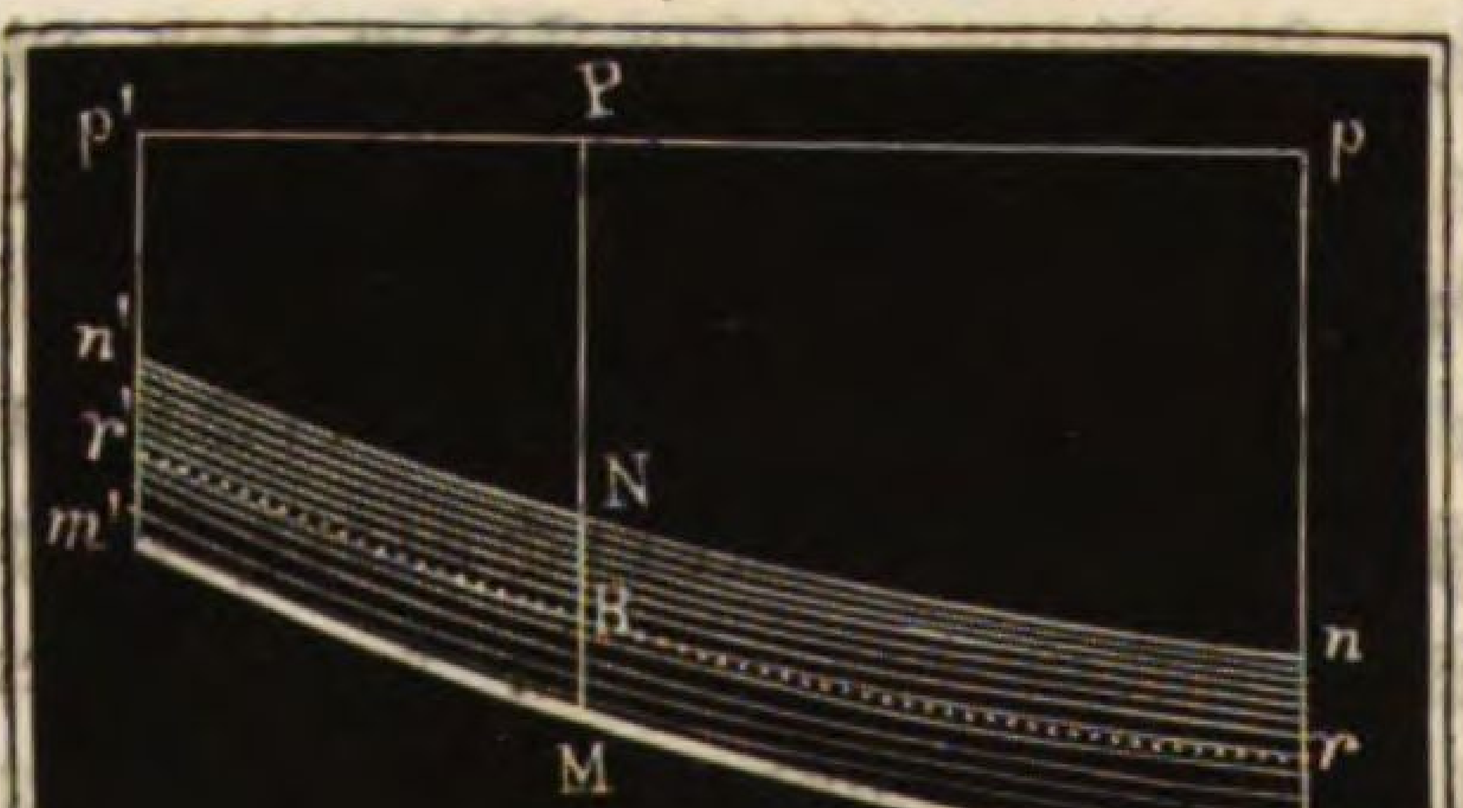
Wenn man übrigens in der Wirklichkeit bemerkt, daß die freie Oberfläche eines offenen Wasserstromes in der Mitte höher steht, als an den Ufern; so ist diese Erscheinung daraus zu erklären, daß die Wassertheilchen von den Ufern gegen die Mitte eine etwas gekrümmte Bahn beschreiben, wozu sie theils in

*) Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik. Erster Theil. §. 361.

Folge des Zusammenhanges mit den mittleren, sich rascher bewegenden Stromfäden, theils dadurch veranlaßt werden, daß sie gegen die Unebenheiten der Uferwände stoßen und so gegen die Mitte zurückgebrochen werden. Eine solche krummlinige Bewegung, wie sie im Vorstehenden jedoch keineswegs vorausgesetzt ist, bringt vermöge der Zentrifugalkraft einen stärkeren hydraulischen Druck gegen die Mitte des Stromes hervor und verursacht eine geringe Hebung des Spiegels an dieser Stelle. Die Größe dieser Hebung kann übrigens nicht eher bestimmt werden, als man die Figur der eben genannten krummlinigen Bahnen kennt.

§. 144. Allgemeine Gleichung für die beharrliche Bewegung des Wassers in einem offenen Flußbette.

Wir betrachten im Nachfolgenden einen Wasserstrom, welcher in einem Bette von beliebigem Gefälle und beliebig variabelem Querschnitte herabfließt. Dabei nehmen wir jedoch an, das Gefälle, welches sich von Punkt zu Punkt änderen mag, sei überall nur sehr schwach, und der Strom befinde sich im Beharrungszustande, sodaß die Geschwindigkeit desselben, sowie die Höhe des Wasserstandes in jedem Querschnitte fortwährend dieselbe bleibt. Endlich sei irgend ein Querschnitt MN des Stromes, nebst der darin herrschenden Geschwindigkeit oder nebst der in der Zeiteinheit von dem Strome gelieferten Wassermenge bekannt, sodaß man von diesem Querschnitte aus auf die übrigen Stromprofile schließen kann.



Wenn das Gefälle des Flußbettes Mm überall sehr schwach ist; so wird eine Normale auf demselben oder auf der Axe Rr des Stromes sehr nahe mit der Vertikalen MP zusammenfallen, und man wird von der Annahme ausgehen können, daß sich die ganze Masse der Flüssigkeit in Schichten bewege, welche mit der Vertikalebene MN parallel bleiben, auch wird man für die Länge

irgend einer nach der Richtung der Axe des Stromes gemessenen Linie **R**r deren horizontale Projektion **P**p substituiren können.

Nun seien, wenn **MN** der bekannte Querschnitt des Stromes ist, in welchem auch die Geschwindigkeit oder die Wassermenge pro Sekunde als eine bekannte Größe angesehen wird, und wenn mn irgend einen anderen Querschnitt des Stromes darstellt,

Ω und ω die Flächen der Querschnitte **MN** und mn,

Z und z die vertikalen Abstände **MP** und mp der Sohle des Flußbettes von irgend einer Horizontalebene **P**p,

Z_1 und z_1 die vertikalen Abstände **RP** und rp der Schwerpunkte jener beiden Querschnitte von derselben Horizontalebene,

H und h die Höhen **MN** und mn des Wasserspiegels in den beiden Querschnitten über der Sohle des Bettes,

H_1 und h_1 die Höhen **MR** und mr der Schwerpunkte der beiden Querschnitte über der Sohle des Bettes,

Ψ und ψ die vom Wasser benetzten Umfänge der beiden Querschnitte,

X und x die horizontalen Breiten des Wasserspiegels in den beiden Querschnitten,

V und v die mittleren Geschwindigkeiten des Wassers in den beiden Querschnitten Ω und ω,

P und p die mittleren hydraulischen Pressungen auf die Flächeneinheit, welche in diesen Querschnitten herrschen,

s die Länge des Theiles **R**m der Axe des Stromes zwischen diesen Querschnitten, eine Länge, welche nahezu gleich der von **P**p ist,

Q die Wassermenge, welche in der Zeiteinheit durch jeden Querschnitt des Stromes geht,

g die Geschwindigkeit, welche die Schwere den Körpern in der Zeiteinheit mittheilt,

$w = \mu g$ das Gewicht der Volumeinheit der Flüssigkeit, wobei μ die Dichtigkeit oder die in der Volumeinheit enthaltene Masse darstellt.

Auf die flüssige Masse **MN**nm wirkt zuvörderst die Schwere und außerdem die durch das Hingleiten längs des Flußbettes hervorgebrachte Reibung oder Adhäsion. Die letztere Kraft ist von ganz ähnlicher Beschaffenheit, wie die in §. 132 bei der Be-

wegung des Wassers in Röhrenleitungen betrachtete Reibung. Fassen wir nämlich irgend eine vertikale Querschicht des Stromes, z. B. die bei mn ins Auge, deren Querschnitt ω, deren benetzter Umfang ψ, deren unendlich geringe Stärke ds und deren Geschwindigkeit v, deren Volum also ωds und deren Masse $\mu \omega ds = \frac{w}{g} \omega ds$ ist; so lehrt die Erfahrung, daß die Wirkung der Reibung auf diese Schicht bei gleichbleibender Geschwindigkeit und Stärke im umgekehrten Verhältnisse mit der Größe des Querschnitts ω und im direkten Verhältnisse mit dem benetzten Umfange ψ variirt. Ändert sich gleichzeitig die Geschwindigkeit v einer solchen Schicht; so variirt jene Wirkung nahezu, wie das Quadrat dieser Geschwindigkeit. Bezeichnet daher, wie früher, $\mathbf{F}$ die Wirkung der in Rede stehenden Reibung auf die Masseneinheit der Flüssigkeit, sodaß man unter $\mathbf{F}$ auch die Geschwindigkeit verstehen kann, welche diese Reibung der Materie in der Zeiteinheit zu ertheilen oder zu entziehen fähig wäre; so kann man allgemein

$$\mathbf{F} = \varkappa \frac{\psi}{\omega} v^2 \qquad \ldots . (625)$$

setzen, worin $\varkappa$ einen Koeffizienten bezeichnet, welcher aus Versuchen zu bestimmen ist. Man hat gefunden, daß dieser Koeffizient nicht ganz konstant, sondern von der Geschwindigkeit v abhängig ist, indem derselbe ähnlich wie der entsprechende Koeffizient bei Röhrenleitungen aus Gl. (566) die allgemeine Form

$$\varkappa = \alpha + \frac{\beta}{v} \qquad \ldots . (626)$$

annimmt, worin α und β konstante Größen sind.

Nach den Versuchen von Lahmeyer*) an größeren Flüssen, mit welchen die Beobachtungen von Woltmann und Dubuat an größeren und kleineren Kanälen verbunden sind, kann man setzen

$$\alpha = 0{,}00371, \quad \beta = 0{,}000691$$

also

$$\varkappa = 0{,}00371 + \frac{0{,}000691}{v} \qquad \ldots . (627)$$

*) Erfahrungsresultate über die Bewegung des Wassers in Flußbetten und Kanälen. S. 99 Gleichung (12).

Diese Formeln weichen nur unbedeutend von den älteren durch Eytelwein gegebenen Ausdrücken ab, und mögen deshalb für die gegenwärtige Zeit bei praktischen Untersuchungen als Näherungswerthe empfohlen werden. Inzwischen bleiben umfassendere Versuche, durch welche die Art der Funktion $\varkappa$ in ihrer Abhängigkeit von v, sowie die darin einzuführenden konstanten Koeffizienten für möglichst weite Gränzen von v mit größerer Bestimmtheit sich ergeben werden, immer noch sehr wünschenswerth. Lahmeyer glaubt dem Wesen der Funktion $\varkappa$ dadurch näher zu treten, daß er dieselbe von dem Wasserstande im Flußbette abhängig macht. Jedoch wählt derselbe zu der hierauf abzweckenden Größe unbegreiflicherweise die Höhe des zeitweiligen Wasserstandes über dem niedrigsten Stande eines gewissen Jahres, nämlich des Jahres 1842, und entwickelt mit Hülfe dieser Größe Formeln, welche sich zwar seinen Beobachtungen etwas näher anschließen, als die vorstehenden, welche aber durchaus keine allgemeine wissenschaftliche Bedeutung haben, da sie lediglich auf die speziellen Flußstrecken Anwendung finden, an welchen Lahmeyer operirt hat, und auch Dies nur unter der Voraussetzung, daß man an diesen Strecken überall und zu jeder Zeit die Höhe des niedrigsten Wasserstandes aus dem Jahre 1842 kenne, um den zeitweiligen Wasserstand darauf beziehen zu können. Außerdem bildet der niedrigste Wasserstand eines bestimmten Jahres für die Bewegung des Wassers in demselben Flußbette zu irgend einer anderen Zeit eine ganz irrelevante Größe, welche mit den hydraulischen Gesetzen jener Bewegung nicht das Mindeste zu schaffen hat, da sie, unbeschadet des augenblicklich herrschenden Zustandes der Flußbewegung, ebenso wol größer, wie kleiner gewesen sein konnte, als sie wirklich war. Nur wenn die geometrische Lage jenes niedrigsten Wasserstandes gegen das Flußprofil gehörig gewürdigt und in den betreffenden Formeln als integrirendes Element eingeführt wäre, würden diese auf allgemeine Brauchbarkeit Anspruch machen können; allein dann verschwände der gedachte Wasserstand, als niedrigster eines bestimmten Jahres, gänzlich, und die Formeln würden nur von der geometrischen Lage des zeitweiligen Wasserspiegels gegen das Flußprofil und vielleicht von der Form dieses Profiles selbst abhängig werden.

Da in den vorhin mitgetheilten Formeln die Größe β etwa

nur der 5te Theil von α ist; so wird man in den meisten Fällen, wo die Geschwindigkeit v nur größer, als 1 ist, und wo es nicht auf die größte Schärfe ankommt, das in β multiplizirte Glied gegen α vernachlässigen und

$$\varkappa = \alpha = 0{,}0038 \quad \ldots . (628)$$

setzen können.

Dächte man sich den Ausdruck für die Reibung **F** in die Form $\mathbf{F} = \varkappa' \frac{\psi}{8\omega} v^2$ gebracht; so müßte $\varkappa' = 8\varkappa$ d. i. Gl. (627)

$\varkappa' = 0{,}02968 + \frac{0{,}005528}{\mathbf{V}}$ sein. Vergleicht man diesen Werth von $\varkappa'$ mit dem entsprechenden Werthe von $\varkappa$ aus Gl. (566) für Röhrenleitungen, welcher einem ganz ähnlichen Ausdrucke (564^b) für **F** angehört; so findet man, daß der aus (627) abgeleitete Werth von $\varkappa$ größer ist, als der Werth aus Gl. (566), daß also der Reibungswiderstand, welchen das Wasser in Flußbetten erleidet, größer ist, als der, welchen dasselbe in einer metallenen Röhrenleitung erfährt, deren Querschnitt und benetzter Umfang gleich dem Querschnitte und benetzten Umfange des Flußbettes ist. Wenn dagegen nach Weisbachs Beobachtung der Reibungswiderstand einer hölzernen Röhre 1,75 mal so groß ist, als der einer metallenen Röhre unter sonst gleichen Verhältnissen; so erkennt man, daß der Reibungswiderstand eines gewöhnlichen Flußbettes oder Kanales kleiner ist, als der einer hölzernen Röhrenleitung, was offenbar nur daran liegen kann, daß bei großen Stromprofilen jener Widerstand etwas schwächer, als der benetzte Umfang wächst, selbst wenn die benetzten Wände immer aus Ein und demselben Materiale bestehen.

Da die Bewegung des Stromtheiles **NM**mn wie in parallelen vertikalen Schichten vor sich gehend gedacht wird; so kann man auf denselben ohne Weiteres die Gl. (241) in Anwendung bringen, welche aus ganz ähnlichen Voraussetzungen hergeleitet ist, da es hierbei offenbar ganz gleichgültig ist, ob man sich diese Schichten rings herum von starren Gefäßwänden oder oben von einer Lage atmosphärischer Luft begränzt denkt. Assimilirt man also den vorliegenden Stromtheil der in §. 57 betrachteten in einer Röhre herabfließenden Flüssigkeitsmenge; so ist der Quer-

schnitt MN als die obere Endfläche O′ und der Querschnitt mn als die untere Endfläche O″ der in jener Röhre fließenden Flüssigkeit anzusehen, und man hat, unter Berücksichtigung der hier gewählten Bezeichnung, in Gl. (241) $O' = \Omega$, $O'' = \omega$, $p' = P$, $p'' = p$, $F = \varkappa \frac{\psi}{\omega} v^2$, $z'' - z' = z_1 - Z_1$, $\frac{dV}{dt} = o$ zu setzen und außerdem das in $\Sigma R u$ multiplizirte, wie das in $\Sigma \left(\frac{\Omega}{\omega_1} - \frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2$ multiplizirte Glied, welches letztere aus plötzlichen Querschnittsveränderungen hervorgeht, zu vernachlässigen. Dies gibt

$$P - p + w(z_1 - Z_1) - \frac{w}{g} \int_o^s \varkappa \frac{\psi}{\omega} v^2 ds = \frac{w}{2g} V^2 \left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - 1\right).$$

Da $\frac{V\Omega}{\omega} = v$, also $\frac{w}{2g} V^2 \left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - 1\right) = \frac{w}{2g}(v^2 - V^2)$ ist; so erkennt man aus der vorstehenden Gleichung mit Leichtigkeit, daß der Überschuß der lebenden Kraft der unteren Endschicht mn über die lebende Kraft der oberen Endschicht MN oder, was Dasselbe ist, daß die lebende Kraft, welche die ganze Masse MNnm bei ihrem Fortschritte um ds gewinnt, gleich ist der Arbeit der Kräfte P, p, plus der durch das Gefälle $z_1 - Z_1$ entwickelten Arbeit der Schwere, minus der Arbeit, welche auf die Überwindung der Reibungswiderstände verwendet ist.

Zur Bestimmung des in dem Querschnitte mn herrschenden mittleren hydraulischen Druckes auf die Flächeneinheit bemerkt man, daß wenn h' die vertikale Tiefe irgend eines Punktes unter der Oberfläche bei n und η den Neigungswinkel des Flußbettes bei m gegen den Horizont bezeichnet, der in dem fraglichen Punkte herrschende Druck nach Gl. (624) $p' + wh' \cos^2 \eta$ sein würde, worin p' den atmosphärischen Druck bezeichnet. Da aber das Gefälle des Flußbettes Mm überall nur sehr schwach sein soll; so kann man $\cos^2 \eta = 1$ und den fraglichen Druck $= p' + wh'$ setzen. Da nun der vertikale Abstand nr des Schwerpunktes r des Querschnittes nm von dem freien Spiegel gleich $h - h_1$ ist; so hat man für den mittleren in dem Querschnitte mn herrschenden hydraulischen Druck pro Flächeneinheit

$$p = p' + w(h - h_1)$$

und für den entsprechenden Druck im Querschnitte MN

$$P = p' + w(H - H_1).$$

Substituirt man diese Werthe für p und P in die vorhergehende Gleichung und beachtet, daß

$$z_1 = z - h_1 \text{ und } Z_1 = Z - H_1$$

ist; so kommt

$$z - Z - (h - H) - \frac{1}{g}\int_0^s \varkappa \frac{\psi}{\omega} v^2 ds = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - 1\right) \quad \ldots . (629)$$

Wenn man die vorstehende Gleichung differenziirt, und dabei beachtet, daß Z, H, V, Ω konstante Größen sind; so kommt

$$dz - dh - \frac{\varkappa}{g}\frac{\psi}{\omega} v^2 ds = -\frac{V^2 \Omega^2 d\omega}{g\omega^3}$$

oder wenn man für die Wassermenge pro Sekunde

$$Q = \omega v = \Omega V$$

setzt,

$$dh + \frac{\varkappa}{g}\frac{\psi Q^2}{\omega^3} ds - dz = \frac{Q^2 d\omega}{g\omega^3} \quad \ldots . (630)$$

In dieser Gleichung sind im Allgemeinen die Größen ω und ψ Funktionen von h und s zugleich und z ist eine Funktion von s allein. Nachdem diese Funktionen für einen besonderen Fall gegeben sind, kann vermittelst der vorstehenden Gleichung h als Funktion von s gefunden werden.

Wäre das Gefälle, d. h. die goniometrische Tangente des Neigungswinkels des Flußbettes Mm gegen den Horizont überall konstant $= i$; so hat man

$$\frac{dz}{ds} = i, \text{ also } dz = i\,ds.$$

Hierdurch wird die obige Gleichung

$$\left(\frac{\varkappa}{g}\frac{\psi}{\omega^3} Q^2 - i\right) ds = \frac{Q^2 d\omega}{g\omega^3} - dh$$

und da x die horizontale Breite des Wasserspiegels im Querschnitte mn oder die obere Breite des Querschnittes ω darstellt, sodaß $d\omega = x\,dh$ ist,

$$\left(\frac{\varkappa}{g}\,\frac{\psi}{\omega^3}\,Q^2 - i\right) ds = \left(\frac{x\,Q^2}{g\,\omega^3} - 1\right) dh, \quad \ldots \text{ (631)}$$

oder auch, wenn man ω statt h als die Veränderliche betrachten will,

$$\left(\frac{\varkappa}{g}\,\frac{\psi}{\omega^3}\,Q^2 - i\right) ds = \left(\frac{x\,Q^2}{g\,\omega^3} - 1\right) \frac{d\omega}{x} \quad \ldots \text{ (632)}$$

§. 145. Beharrliche und in allen Punkten gleiche Bewegung eines Wasserstromes in einem Bette von konstantem Gefälle und konstantem Querprofile. — Natürlicher Zustand des Stromes.

Denken wir uns ein Flußbett mit konstantem Gefälle i und mit einem Querprofile, welches in allen Punkten dieselbe Figur bildet. Auf einen Wasserstrom, welcher sich in diesem Bette bewegt, wird die Gleichung (631) oder (632) anwendbar sein. Aus der letzteren folgt für den Zuwachs, welchen die Größe des Querschnittes ω des Stromes in einem beliebigen Punkte bei einem Fortschritte um das Element ds in der Richtung des Flußbettes erleidet,

$$d\omega = \frac{x\left(\frac{\varkappa}{g}\,\frac{\psi}{\omega^3}\,Q^2 - i\right)}{\frac{x\,Q^2}{g\,\omega^3} - 1} \, .ds$$

Wenn der Zähler auf der rechten Seite dieser Gleichung, welcher nur eine Funktion von ω ist, für alle Werthe, welche ω annehmen kann, null wird; so wird das Differenzial $d\omega$ ebenfalls für alle Werthe von s gleich null, und mithin der Querschitt ω des Stromes eine konstante Größe, welche sich auf die ganze Länge des Stromes nicht ändert. Dieser Fall ist von dem zu unterscheiden, wo der eben gedachte Zähler als Funktion von s gegeben wäre, und man denselben gleich null setzte, um daraus einen Werth für s zu entwickeln, welcher dieser Forderung ein

Genüge leistete. Denn alsdann hätte man nicht der Forderung genügt, daß das Differenzial von ω ganz im Allgemeinen, sondern nur für einen gewissen Werth von s gleich null sei, was offenbar nur einem Maximum oder Minimum von ω entsprechen würde. Wenn also vermöge der Gestalt des Flußbettes der Gleichung

$$\frac{\varkappa}{g}\,\frac{\psi}{\omega^3}\,Q^2 = i \qquad \ldots . (633)$$

ein Genüge geleistet wird; so folgt, daß alsdann der Strom auf seine ganze Länge Ein und denselben Querschnitt und mithin auch überall dieselbe Geschwindigkeit besitzen wird. Diesen Zustand wollen wir den natürlichen Zustand des Stromes nennen. Vertauscht man daher für diesen Fall die Größen ω und ψ mit den als konstant anzusehenden Größen Ω und Ψ; so erhält man für die Bedingung, unter welcher der vorstehend bezeichnete natürliche Zustand eines Wasserstromes möglich ist,

$$\frac{\varkappa}{g}\,\frac{\Psi}{\Omega^3}\,Q^2 = i,$$

oder wenn man für $\varkappa$ seinen Werth

$$\varkappa = \alpha + \frac{\beta}{V} = \alpha + \beta\,\frac{\Omega}{Q}$$

substituirt und gehörig reduzirt,

$$\frac{\Omega^3}{\Psi} - \frac{\beta}{g}\,\frac{Q}{i}\,\Omega - \frac{\alpha}{g}\,\frac{Q^2}{i} = o \qquad \ldots . (634)$$

Da der benetzte Umfang Ψ eine Funktion von Ω ist; so gibt diese Gleichung den zwischen dem Gefälle i, der Wassermenge Q und dem konstanten Querschnitte Ω des Stromes bestehenden Zusammenhang zu erkennen, aus welchem man, wenn je zwei dieser Größen gegeben sind, die dritte berechnen kann. Wenn i und Q gegeben und Ω gesucht wäre; so wird man die Auflösung der Gl. (634) sehr vereinfachen, wenn man den Koeffizienten β in dem Werthe für $\varkappa$ ganz vernachlässigt, und einfach

$$\frac{\Omega^3}{\Psi} = \frac{\alpha}{g}\,\frac{Q^2}{i} \qquad \ldots . (635)$$

setzt (s. §. 144).

Da $Q = \Omega V$ ist; so erhält man durch diese Substitution in Gl. (634) für die zwischen den drei Größen i, Ω und V bestehende Beziehung

$$\frac{\alpha}{g} V^2 + \frac{\beta}{g} V = \frac{i\Omega}{\Psi} \quad \ldots . (636)$$

oder nach Gleichung (635) einfach

$$\frac{\alpha}{g} V^2 = \frac{i\Omega}{\Psi} \quad \ldots . (637)$$

Bei dem Rechnen nach den vorstehenden Formeln wird es einige Bequemlichkeit mit sich führen, wenn man beachtet, daß bei Zugrundelegung der Werthe für α und β aus Gl. (627)

$$\frac{\alpha}{g} = 0{,}0001185, \quad \frac{\beta}{g} = 0{,}0000221,$$

also

$$\frac{\varkappa}{g} = 0{,}0001185 + \frac{0{,}0000221}{v},$$

und wenn man den Werth von β vernachlässigen und für α den Werth aus Gl. (628) substituiren will, daß

$$\frac{\varkappa}{g} = \frac{\alpha}{g} = 0{,}0001215$$

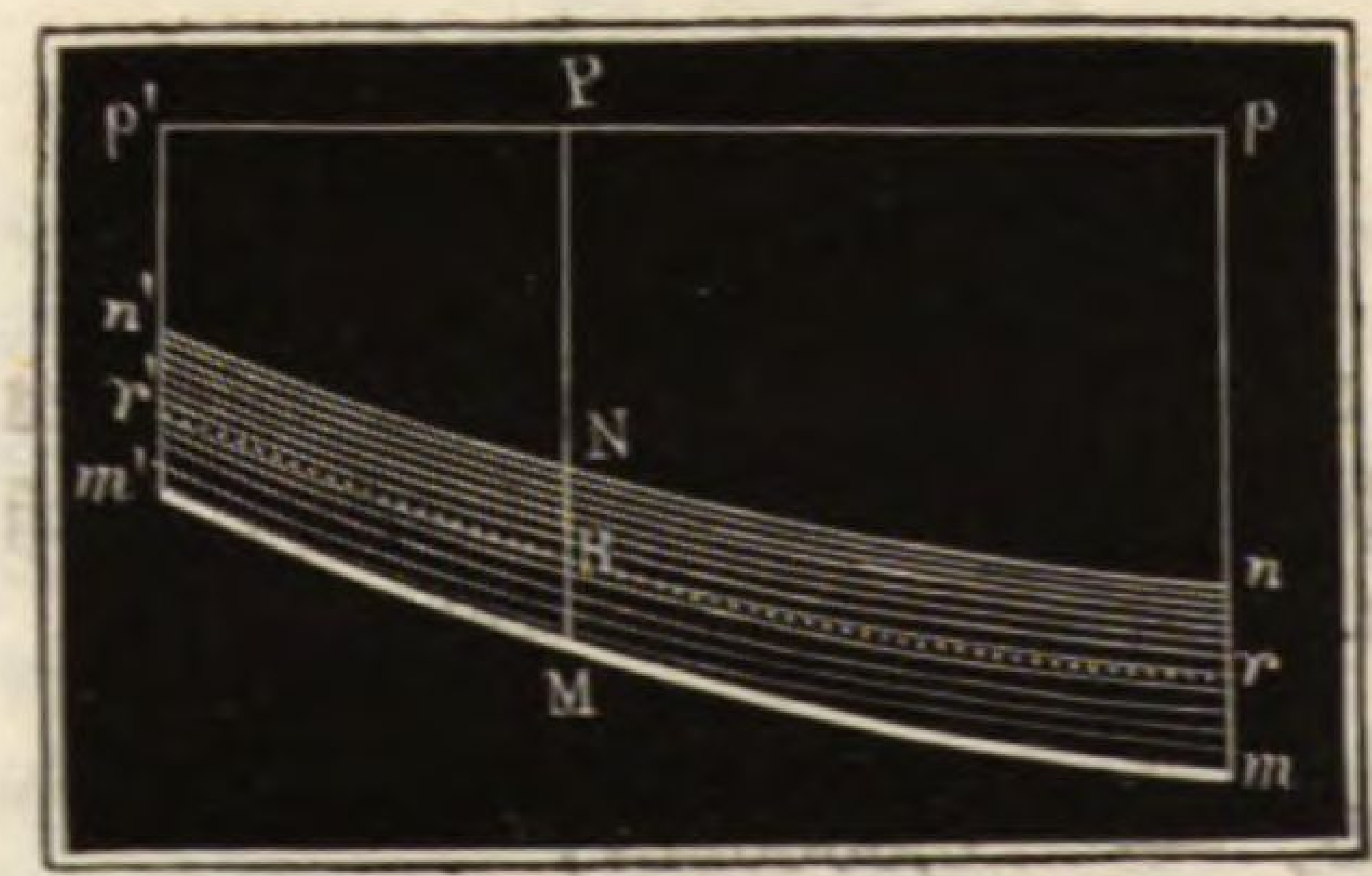
ist.

§. 146. Beharrliche, aber in den verschiedenen Querschnitten ungleiche Bewegung eines Wasserstromes in einem Bette von konstantem Gefälle.

Wenn sich die Bedingung (633) nicht erfüllt findet; so wird auch die im vorhergehenden Paragraphe betrachtete in allen Querschnitten gleiche Bewegung der Flüssigkeit nicht stattfinden können. Der Querschnitt und damit die Geschwindigkeit des Stromes werden sich von Punkt zu Punkt der Länge des Flußbettes ändern, wiewol diese Größen, der Voraussetzung gemäß, bei der konstanten Wassermenge des Stromes in jedem bestimmten Punkte des Bettes unveränderlich und von der Zeit unabhängig bleiben, eine Eigenschaft, wodurch die **Beharrlichkeit** der Strombewegung charakterisirt wird.

Es wird übrigens, wie im vorhergehenden Paragraphe, angenommen, daß das **Bett** des Stromes überall ein konstantes Querprofil habe, sodaß die Dimensionen irgend eines Querschnittes ω des eigentlichen Wasserstromes von der Länge s desselben ganz unabhängig sind.

Sieht man daher die Höhe h des Wasserstandes in irgend einem Querschnitte ω des Stromes als die unabhängig und s als die davon abhängige Veränderliche an; so erhält man nach Gl. (631) für die Länge $s = \overline{Pp}$ des Flußbettes von dem bekannten Querschnitte $MN = \Omega$ bis zu dem gesuchten Querschnitte $\overline{mn} = \omega$



$$s = \int_H^h \frac{\frac{\varkappa Q^2}{g\,\omega^3} - 1}{\frac{\varkappa}{g}\,\frac{\psi}{\omega^3}\,Q^2 - i} \, . \, dh$$

oder nach Gl. (632), wenn man die Größe des Querschnittes ω als die unabhängig Veränderliche betrachtet,

$$s = \int_\Omega^\omega \frac{\frac{\varkappa Q^2}{g\,\omega^3} - 1}{\frac{\varkappa}{g}\,\frac{\psi Q^2}{\omega^3} - i} \, . \, \frac{d\omega}{x} \quad \ldots \, (638)$$

In der letzteren Gleichung ist nach der Voraussetzung die Wassermenge Q pro Sekunde, sowie das Gefälle i eine konstante Größe, der benetzte Umfang ψ, sowie die obere Breite x des Wasserspiegels werden bloß Funktionen von ω und nicht von s sein, und der Koeffizient $\varkappa$ ist nach Gl. (626)

$$\varkappa = \alpha + \frac{\beta}{v} = \alpha + \beta \frac{\omega}{Q},$$

also ebenfalls eine Funktion nur von ω.

Die Integration der vorstehenden Gleichung wird, wenn sie in aller Strenge ausgeführt werden soll, in den meisten Fällen

große Schwierigkeiten, wenigstens sehr weitläufige Formeln mit sich führen. Aus diesem Grunde muß man darauf bedacht sein, in derselben gewisse Vereinfachungen vorzunehmen, welche dieselbe für die Praxis, wo es auf keine mathematische Genauigkeit ankommt, geschickt machen können.

Aus diesem Grunde sehen wir zuvörderst den Koeffizienten $\varkappa$ als eine konstante Größe an, welche den Werth von α aus Gl. (628) hat.

In den meisten Fällen der praktischen Anwendung wird die Veränderung, welche der Wasserstand in den verschiedenen Querschnitten des Stromes erleidet, nicht so bedeutend sein, daß dadurch der benetzte Umfang ψ und die obere Breite x eine erhebliche Veränderung erlitten, weshalb man auch für diese beiden Größen konstante Werthe einführen kann. Man wird diesen beiden Größen entweder die dem gegebenen Querschnitte $\Omega = \overline{\mathrm{MN}}$ entsprechenden Werthe Ψ und X geben können, oder wenn man etwas genauer verfahren will, die arithmetischen Mittel zwischen diesen Werthen und denjenigen, welche eine Auflösung der Gl. (634) oder (635) für den Fall ergäbe, wo die Bewegung des Stromes in allen Punkten dieselbe und der Querschnitt eine unveränderliche Größe wäre, indem man aus dem Nachfolgenden beachtet, daß der Strom ein Bestreben zeigt, sich immer mehr dem eben erwähnten Zustande der Gleichförmigkeit zu nähern, nachdem er durch irgend eine Ursache bei MN gezwungen ist, daselbst einen davon abweichenden Querschnitt anzunehmen.

Bringen wir hiernach die Gl. (638) in die Form

$$s = \int_{\Omega}^{\omega} \frac{1}{ix} \cdot \frac{\omega^3 - \frac{xQ^2}{g}}{\omega^3 - \frac{\varkappa}{g}\frac{\psi}{i}Q^2} \cdot d\omega \quad \ldots . (639)$$

oder auch

$$s = \int_{\Omega}^{\omega} \frac{1}{ix}\left[1 + \frac{\frac{\varkappa}{g}\frac{\psi}{i}Q^2 - \frac{x}{g}Q^2}{\omega^3 - \frac{\varkappa}{g}\frac{\psi}{i}Q^2}\right] d\omega \quad \ldots . (639^a)$$

Setzt man der Kürze halber

$$\left.\begin{array}{ll} A=\sqrt[3]{\frac{x}{g}\frac{\psi}{i}Q^2} \text{ oder } A^3=\frac{x}{g}\frac{\psi}{i}Q^2 \\ B=\sqrt[3]{\frac{x}{g}Q^2} \qquad B^3=\frac{x}{g}Q^2 \end{array}\right\} \quad \ldots (640)$$

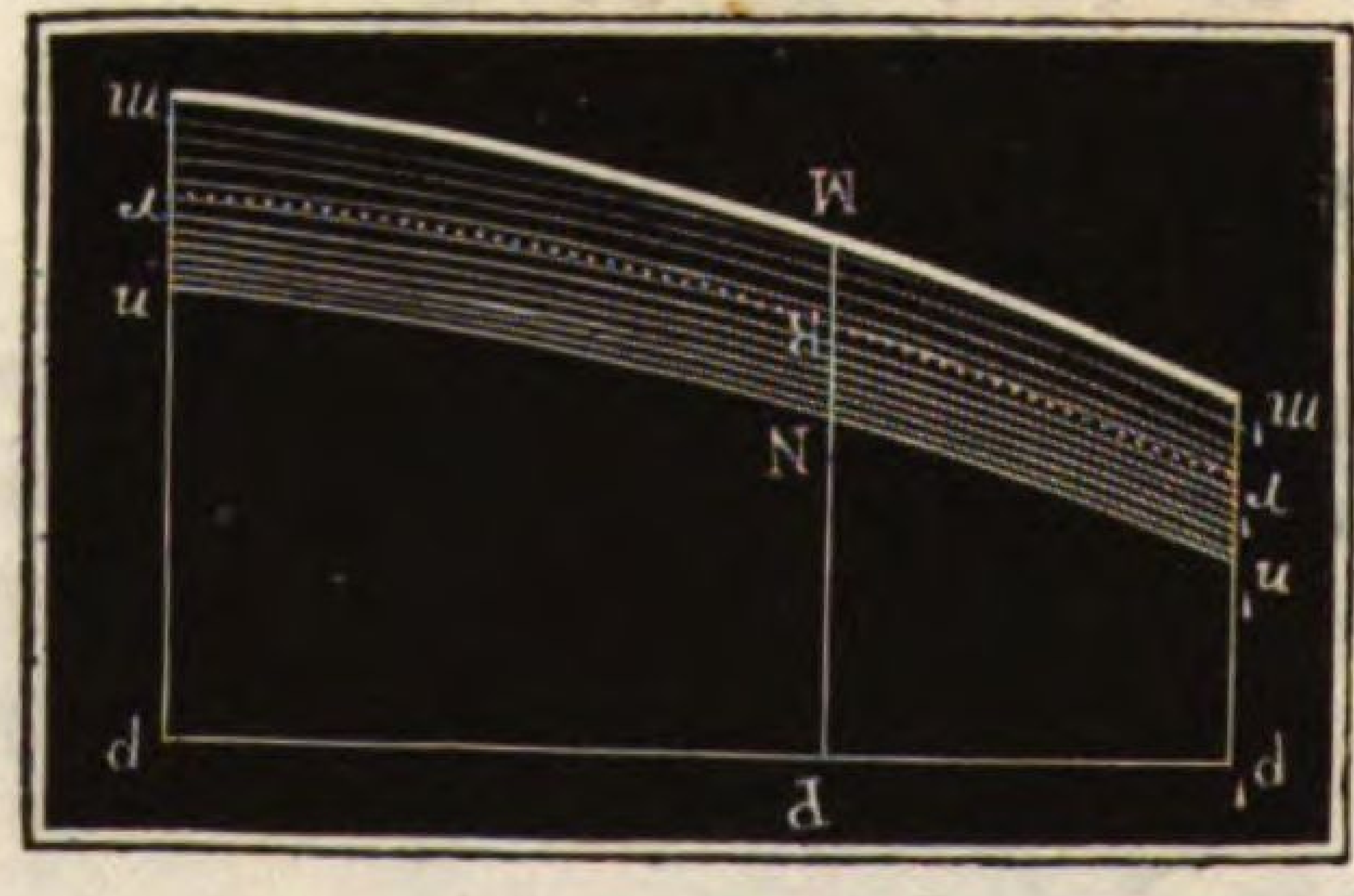
und beachtet, daß nach gehöriger Integration

$$\int\left(1+\frac{A^3-B^3}{\omega^3-A^3}\right)d\omega=\omega+\frac{A^3-B^3}{3A}\left[\frac{1}{2}\log\frac{(\omega-A)^3}{\omega^3-A^3}\right.$$
$$\left.-\sqrt{3}\,.\,\text{arc. tang.}\,\frac{2\omega+A}{A\sqrt{3}}\right]+\text{const.}$$

ist; so folgt aus Gl. (639)

$$s=\frac{\omega-\Omega}{ix}+\frac{A^3-B^3}{3Aix}\left[\frac{1}{2}\,.\,2{,}30258\,\log.\,\text{vulg.}\left(\frac{\omega-A}{\Omega-A}\right)^3\left(\frac{\Omega^3-A^3}{\omega^3-A^3}\right)\right.$$
$$\left.-\sqrt{3}\left(\text{arc. tang.}\,\frac{2\omega+A}{A\sqrt{3}}-\text{arc. tang.}\,\frac{2\Omega+A}{A\sqrt{3}}\right)\right] \quad \ldots (641)$$

In den Gleichungen der vorstehenden Paragraphe 144 bis 146 ist die Länge s des Stromes von dem gegebenen Querschnitte Ω bis zu dem gesuchten Querschnitte ω stromabwärts gerechnet, sodaß der erstere Querschnitt immer höher liegt, als der letztere. Soll dagegen s, vom Querschnitte Ω aus gerechnet, stromaufwärts gerechnet werden, oder der gegebene Querschnitt NM $=\Omega$ tiefer liegen, als der gesuchte $n'm'=\omega$; so würde sich Dies in Gl. (641) dadurch zu erkennen geben, daß der Werth von s negativ ausfiele. Verfolgt man aber unter der letzteren Voraussetzung den in §. 144 eingeschlagenen Gang der Entwickelung der Fundamentalgleichungen nochmals; so findet man, unter Beachtung, daß alsdann auch



$$\frac{-dz}{ds}=i,\ \text{also}\ dz=-i\,ds$$

ist, daß die Gleichungen (631) und (632), indem man darin $-ds$ an die Stelle von ds setzt, in die folgenden übergehen:

$$\left(\frac{\varkappa}{g}\frac{\psi}{\omega^3}Q^2-i\right)ds=-\left(\frac{xQ^2}{g\,\omega^3}-1\right)dh \quad \ldots\ (642)$$

$$\left(\frac{\varkappa}{g}\frac{\psi}{\omega^3}Q^2-i\right)ds=-\left(\frac{xQ^2}{g\,\omega^3}-1\right)\frac{d\omega}{x}, \quad \ldots\ (643)$$

und aus der letzteren folgt, statt Gl. (641)

$$s=\frac{\Omega-\omega}{ix}+\frac{A^3-B^3}{3Aix}\left[\frac{1}{2}\,.\,2{,}30258\,\text{log. vulg.}\left(\frac{\Omega-A}{\omega-A}\right)^3\left(\frac{\omega^3-A^3}{\Omega^3-A^3}\right)\right.$$
$$\left.-\sqrt{3}\left(\text{arc. tang.}\frac{2\Omega+A}{A\sqrt{3}}-\text{arc. tang.}\frac{2\omega+A}{A\sqrt{3}}\right)\right], \quad \ldots\ (644)$$

welche aus Gl. (641) erhalten wird, indem man ω in Ω, und umgekehrt, verwandelt.

Wenn man in den vorstehenden Gleichungen (641) und (644) statt der Querschnitte Ω und ω ihre Ausdrücke als Funktionen der Höhen H und h des Wasserspiegels über dem Flußbette substituirt; so erhält man die Größe s als Funktion dieser Höhen H und h.

§. 147. Betrachtungen über die Figur des oberen Spiegels eines Wasserstromes, welche aus den Gleichungen des vorhergehenden Paragraphs folgen.

Die Betrachtung der Figur, welche der obere Spiegel eines Wasserstromes annimmt, ist nicht ohne Interesse. Dieselbe hängt bei einem Strome mit gleichförmigem Gefälle und mit einem Bette, dessen Querschnitt überall dieselbe Figur darbietet, von dem Querschnitte Ω, welchen der Strom an einer bestimmten Stelle innezuhalten gezwungen wird, in einer Weise ab, welche aus der Gl. (641) erkannt werden kann, sobald der gegebene Querschnitt Ω oberhalb der zu betrachtenden Stromstrecke liegt. Befindet sich dagegen der Querschnitt Ω am unteren Ende der fraglichen Stromstrecke; so stellt Gl. (644) die gesuchte Beziehung dar. Leichter, als durch die obengedachten Gleichungen,

überblickt man jedoch den Zustand des Wasserstromes unter verschiedenen Umständen, wenn man zu den Differenzialgleichungen rekurrirt, aus welchen die Gleichungen (641) und (644) gewonnen sind.

Es sei demnach, wie vorhin,

$$A = \sqrt[3]{\frac{\varkappa}{g}\frac{\psi}{i}Q^2} \text{ und } B = \sqrt[3]{\frac{x}{g}Q^2};$$

alsdann hat man, wenn der gegebene Querschnitt Ω stromaufwärts liegt, nach Gl. (639)

$$d\omega = \frac{\omega^3 - A^3}{\omega^3 - B^3} ix\,ds, \quad \ldots . (645)$$

und wenn der Querschnitt Ω stromabwärts liegt, nach Gl. (643)

$$d\omega = -\frac{\omega^3 - A^3}{\omega^3 - B^3} ix\,ds \quad \ldots . (646)$$

Untersuchen wir hiernach die Umstände, unter welchen mit einem Fortschritte um die sehr kleine Größe ds nach der Länge des Flußbettes, und zwar in der Richtung von dem gegebenen Querschnitte Ω her, resp. ein Wachsen oder ein Abnehmen des Querschnittes ω des Wasserstromes, mithin ein Steigen oder Sinken des oberen Spiegels in Beziehung zur Grundfläche des Bettes stattfindet.

Es ist klar, daß wenn der Werth von $d\omega$ positiv ist, ein Steigen, und wenn $d\omega$ negativ ist, ein Sinken des Spiegels bei dem Fortschritte um ds eintreten wird. Ob aber $d\omega$ positiv oder negativ ist, hängt von den absoluten Werthen ab, welche die als konstant gedachten Größen A und B gegeneinander und momentan gegen den Querschnitt annehmen, welcher am Ende der Länge s liegt.

Zuvörderst erkennt man nun, daß die Größe A den Querschnitt darstellt, welcher der Gl. (635) ein Genüge leisten würde, den Querschnitt also, bei welchem der Strom mit der gegebenen Wassermenge Q und dem konstanten Gefälle i im natürlichen Zustande verharren würde. Hieraus folgt schon im voraus, daß wenn irgendwo der Querschnitt ω den Werth A erreicht, der

Fluß alsdann auf seine fernere Länge diesen Querschnitt unverändert beibehalten wird. Dasselbe ergibt sich aus den Gleichungen (645) und (646), da dieselben für die Voraussetzung $\omega = A$ den Werth $d\omega = o$ liefern. Aus den Gleichungen (641) und (644) geht jedoch hervor, daß im Allgemeinen, nämlich immer dann, wenn der Wasserspiegel eine kontinuirliche, nach demselben Gesetze sich verändernde Fläche bildet, der Werth $\omega = A$ erst in unendlicher Entfernung s vom gegebenen Querschnitte Ω vollkommen erreicht werden kann, daß also in der Regel der wirkliche Wasserspiegel eine Fläche bilden wird, welche sich dem im natürlichen Zustande bestehenden Wasserspiegel ins Unendliche nähert, ohne denselben jemals ganz zu erreichen.

Die Größe B ist von nicht geringerer Wichtigkeit, als die Größe A. Denken wir uns unter derselben auch einen gewissen Querschnitt. Wenn es überhaupt möglich ist, daß der variabele Querschnitt ω unter besonderen Umständen den Werth B erreicht, was sich aus den Gleichungen (641) oder (644) ergibt, sobald man darin $\omega = B$ setzt und den entsprechenden Werth von s ermittelt; so lehren die Formeln (645) oder (646), daß alsdann der Werth von $d\omega$ positiv oder negativ unendlich groß wird. Bei der Annäherung an den Werth B wird also der Querschnitt ω des Stromes entweder sehr rasch zu- oder abnehmen, und bei der wirklichen Erreichung dieses Werthes einen plötzlichen Sprung machen, bei welchem sich der Spiegel plötzlich um eine endliche Größe hebt oder senkt. Es leuchtet ein, daß unter solchen Umständen die Integrale (641) oder (644) nur bis zu der eben bezeichneten Stelle Gültigkeit haben, wo möglicherweise der Querschnitt B erreicht werden kann. Die plötzlichen Erhebungen oder Senkungen des Wasserspiegels beim Durchschreiten des Querschnittes B sind unter dem Namen der stehenden Wellen bekannt. Ihre Entfernungen vom gegebenen Querschnitte Ω werden, wie schon erwähnt, gefunden, wenn man in Gl. (641) oder (644) $\omega = B$ setzt.

Um die absolute Größe zu bestimmen, welche resp. der größte oder kleinste Querschnitt einer solchen stehenden Welle annimmt, oder die Höhe, um welche sich der Wasserspiegel in der stehenden Welle plötzlich erhebt oder senkt; so betrachte man die Gleichung (645) in der ursprünglichen Form der Gl. (630), indem man

auf der rechten Seite $\omega = \frac{Q}{v}$, also $d\omega = -\frac{Q}{v^2} dv$ und $\frac{Q^2 d\omega}{g\,\omega^3}$ $= -\frac{1}{g} v\,dv = -\frac{1}{2g} d(v^2)$, mithin

$$dz = \frac{\varkappa}{g} \frac{\psi}{\omega^3} Q^2 ds + dh + \frac{1}{2g} d(v^2) \quad \ldots . (647)$$

setzt.

Aus dieser Gleichung erkennt man, daß die bewegende Kraft, welche bei dem Fortschritte irgend einer unendlich dünnen vertikalen Wasserschicht um die Länge ds durch den Fall von der Höhe dz entwickelt wird, auf folgende drei Wirkungen verwendet wird: 1) um den Reibungswiderstand an den Wänden des Flußbettes auf die Länge ds zu überwinden; 2) um den freien Wasserspiegel um die Höhe dh zu erheben oder um die fragliche Schicht in vertikaler Richtung nach oben auszudehnen, und 3) um die statthabende Vergrößerung der Geschwindigkeit aller Massentheilchen dieser Schicht oder vielmehr der lebenden Kraft dieser Schicht hervorzubringen. Es versteht sich von selbst, daß wenn das Glied dh negativ ist, sodaß sich der Spiegel auf die Länge ds nicht hebt, sondern senkt, oder auch, wenn das Glied $\frac{1}{2g} d(v^2)$ negativ ist, sodaß sich die Geschwindigkeit der Schicht auf die Länge ds nicht vermehrt, sondern vermindert, Dies gewissermaaßen als ein Zuwachs der bewegenden Kraft angesehen werden kann, welcher alsdann mit auf die Überwindung des Reibungswiderstandes verwendet wird.

Wenn jetzt der Querschnitt der in Rede stehenden Schicht gerade den Werth B, also den Werth des Querschnittes unmittelbar vor der stehenden Welle besitzt; so hat man im Vorstehenden gesehen, daß sich alsdann der Spiegel plötzlich vertikal entweder erhebt oder senkt, sodaß die in B befindliche Schicht, gewissermaaßen ohne vorwärts zu schreiten, sich nur in vertikaler Richtung nach oben ausdehnt oder zusammenzieht. Die Größe dieser Ausdehnung oder Zusammenziehung ist offenbar dadurch zu bestimmen, daß man in Gl. (647) sowol das Glied dz, wie auch das Glied $\frac{\varkappa}{g} \frac{\psi}{\omega^3} Q^2 ds$ gleich null setzt, da diese Glieder nur von dem

eigentlichen Fortschritte der fraglichen Schicht in der Richtung des Flußbettes abhängen. Zu dem fraglichen Zwecke hat man also

$$dh = -\frac{1}{2g}\, d(v^2) \qquad \dots . (648)$$

zu setzen.

Nun sei

B der obige Querschnitt des Wasserstromes unmittelbar vor der stehenden Welle,

b die Höhe des Wasserspiegels über dem Grunde in diesem Querschnitte,

u die Geschwindigkeit des Wassers in demselben Querschnitte,

B′ der größte, resp. kleinste Querschnitt in der stehenden Welle, bis zu welchem sich die fragliche Schicht plötzlich ausdehnt, resp. zusammenzieht,

b′ der entsprechende Wasserstand in diesem Querschnitte,

u′ die Geschwindigkeit des Wassers in dem letzteren Querschnitte.

Integrirt man die obige Gleichung (648) zwischen den entsprechenden Gränzen b und b' für h, sowie u und u' für v; so erhält man

$$b' - b = \frac{1}{2g}(u^2 - u'^2) \qquad \dots . (649)$$

Da u' eine Funktion von b' ist; so würde diese Gleichung den gesuchten Werth des Wasserstandes b' im größten, resp. kleinsten Querschnitte der stehenden Welle ergeben. Wäre z. B. das Profil des Flußbettes ein Rechteck von der konstanten Breite x; so würde man

$$B = bx,\ B' = b'x,\ u = \frac{Q}{B},\ u' = \frac{Q}{B'},$$

also

$$\frac{B'}{x} - \frac{B}{x} = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q^2}{B^2} - \frac{Q^2}{B'^2}\right),$$

d. i.

$$B' - B = \frac{xQ^2}{2g}\,\frac{(B'^2 - B^2)}{B^2 B'^2},$$

oder wenn man für $\frac{xQ^2}{g}$ seinen Werth B^3 einführt,

$$(B'-B)=\frac{B(B'+B)(B'-B)}{2B'^2}$$

haben.

Dieser Gleichung wird zuvörderst durch den Werth

$$B'=B \text{ oder } b'=b$$

ein Genüge geleistet. Dieser Werth entspricht jedoch dem in Rede stehenden Falle keineswegs, da der Spiegel jedenfalls seine Höhe verändern soll.

Dividirt man daher auf beiden Seiten mit dem Faktor $B'-B$ so kommt

$$1=\frac{B(B'+B)}{2B'^2},$$

woraus für B' die beiden Werthe

$$B'=\frac{B}{4}(1\pm 3)$$

d. i.

$$\text{entweder } B'=B \text{ oder } B'=-\frac{B}{2}.$$

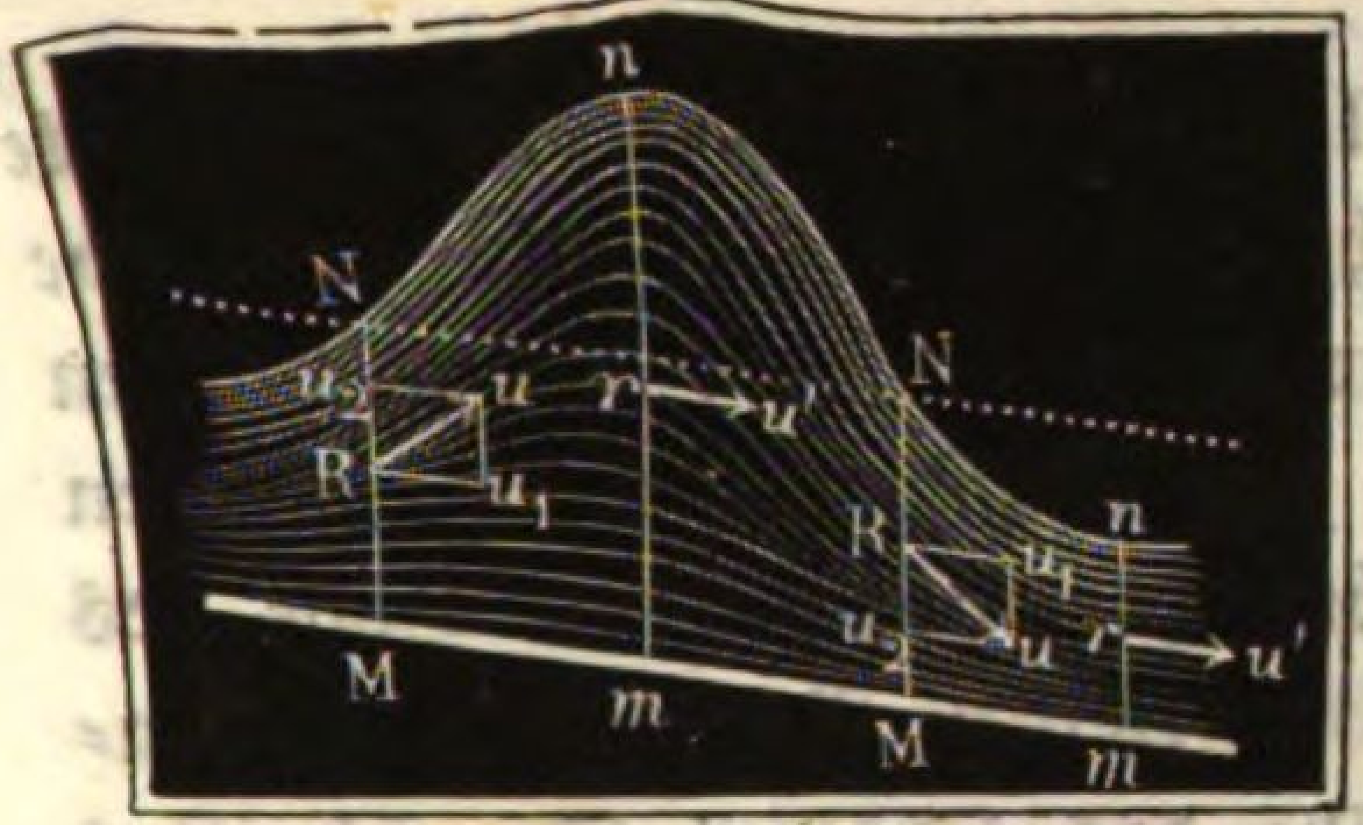
folgt.

Man sieht, daß auch von diesen beiden Werthen keiner der Aufgabe ein Genüge leisten kann.

Daraus folgt denn, daß die früheren Hypothesen über die Bewegung der Flüssigkeit nach parallelen vertikalen Schichten unter den in §. 144 näher erörterten Verhältnissen durchaus keine Anwendung auf die Bewegung in einer stehenden Welle finden können.

Will man jedoch die äußersten Gränzen bezeichnen, um welche sich der Wasserspiegel in einem solchen Wellenberge oder Wellenthale, welchem der Querschnitt B unmittelbar vorhergeht, möglicherweise heben oder senken kann; so beachte man Folgendes.

Wenn N die Stelle vor dem Wellenberge oder Wellenthale ist, wo sich der Spiegel der Flüssigkeit aus dem Querschnitte B plötzlich vertikal zu erheben oder zu senken strebt; so werden die auf dem Boden bei M befindlichen Wassertheilchen ein Bestreben haben, in paralleler Richtung zum Bette Mm fortzuschreiten, die an der Oberfläche bei N befindlichen Theilchen werden dagegen ein Bestreben haben, in vertikaler Richtung resp. aufwärts



oder abwärts zu steigen, während die zwischen M und N liegenden Theilchen sich in schrägen Richtungen fortzubewegen streben. Nehmen wir daher näherungsweise an, die ganze Schicht MN besitze eine mittlere Geschwindigkeit u in der Richtung Ru, welche unter einem Winkel von 45° gegen den Horizont geneigt und vor dem Wellenberge nach oben, vor dem Wellenthale dagegen nach unten gekehrt ist. Zerlegt man u in ihre beiden horizontalen uud vertikalen Komponenten $Ru_1 = u_1$ und $Ru_2 = u_2$; so wird $u_2 = u_1$ sein. Bezeichnet man die Masse der Schicht MN mit m; so wird ihre lebende Kraft, solange sie den Querschnitt MN $=$ B erfüllt, $mu^2 = m(u_1{}^2 + u_2{}^2) = 2mu_1{}^2$ sein. Ist ferner u' die Geschwindigkeit dieser Schicht im höchsten, resp. tiefsten Querschnitte mn $=$ B′ des Wellenberges oder Wellenthales, eine Geschwindigkeit, welche natürlich parallel zum Flußbette Mm gerichtet ist, indem der Spiegel bei n ebenfalls dieser Richtung parallel und alle frühere Geschwindigkeit in vertikaler Richtung darauf verwendet ist, den Spiegel möglichst hoch zu erheben oder möglichst tief zu senken; so wird mu'^2 die lebende Kraft der fraglichen Schicht im Querschnitte B′ sein. Substituirt man demzufolge $u^2 = u_1{}^2 + u_2{}^2 = 2u_1{}^2$ für u^2 in Gl. (649); so wird dieselbe

$$b' - b = \frac{1}{2g}(2u_1{}^2 - u'^2) \quad . . . . (650)$$

Da immer in der Zeiteinheit die Wassermenge Q sowol durch den Querschnitt B, wie durch den Querschnitt B′ gehen muß; so leuchtet ein, daß man $u_1 = \frac{Q}{B}$ und $u' = \frac{Q}{B'}$ haben müsse. Führt man diese Werthe ein, indem man gleichzeitig $b = \frac{B}{x}$, $b' = \frac{B'}{x}$ und $\frac{xQ^2}{g} = B^3$ setzt; so kommt nach gehöriger Reduktion

$$2B'^3 - 4BB'^2 + B^3 = o.$$

Diese Gleichung hat die drei Wurzeln

$$B' = 1{,}855B, \ = 0{,}597B, \ = -0{,}452B,$$

wovon die erstere sich auf den Fall eines Wellenberges, die zweite auf den eines Wellenthales bezieht und die letzte, als negative Größe, ganz von der in Rede stehenden Aufgabe ausgeschlossen ist. Man sieht hieraus, daß sich der Wasserspiegel im höchsten Punkte des Wellenberges nicht bis zur doppelten Höhe des Querschnittes B erheben, und sich im tiefsten Punkte des Wellenthales nicht bis zur halben Höhe des letzteren Querschnittes senken kann.

Kehren wir jetzt zu der anfänglich angekündigten Untersuchung der Fälle zurück, in welchen bei einem stetig fortschreitenden Wasserstrome der Spiegel sich allmählig erheben oder senken, wo also der Werth von $d\omega$ entweder positiv oder negativ ausfallen wird, wenn man in der Richtung des Flußbettes um das Längenelement ds fortschreitet.

Liegt der konstante Querschnitt Ω stromaufwärts, wird also die Länge s mit der Strombewegung gerechnet; so gilt die Formel (645), nämlich

$$d\omega = \frac{\omega^3 - A^3}{\omega^3 - B^3} ixds.$$

Es leuchtet ein, daß $d\omega$ positiv sein wird,

wenn gleichzeitig $\omega > A$ und $\omega > B$,
wenn $\omega < A$ und $\omega < B$ ist;

ferner daß $d\omega$ negativ sein wird,

wenn $\omega > A$ und $\omega < B$,
wenn $\omega < A$ und $\omega > B$ ist.

Es sei demnach in einem Flusse zuvörderst

$$A > B$$

oder nach den Gleichungen (640)

$$\varkappa \frac{\psi}{x} > i;$$

(näherungsweise wird Dies in sehr breiten Flüssen, wo nahezu

$\psi = x$ ist, eintreten, wenn $\varkappa > i$ oder $0{,}0038 > i$, das Gefälle also möglichst schwach ist). Hat man alsdann gleichzeitig

1) $\omega > A$; so wird $d\omega$ positiv sein,
2) $\omega < A$ und $\omega > B$; so wird $d\omega$ negativ sein,
3) $\omega < B$; so wird $d\omega$ positiv sein.

Ist aber in einem Flusse

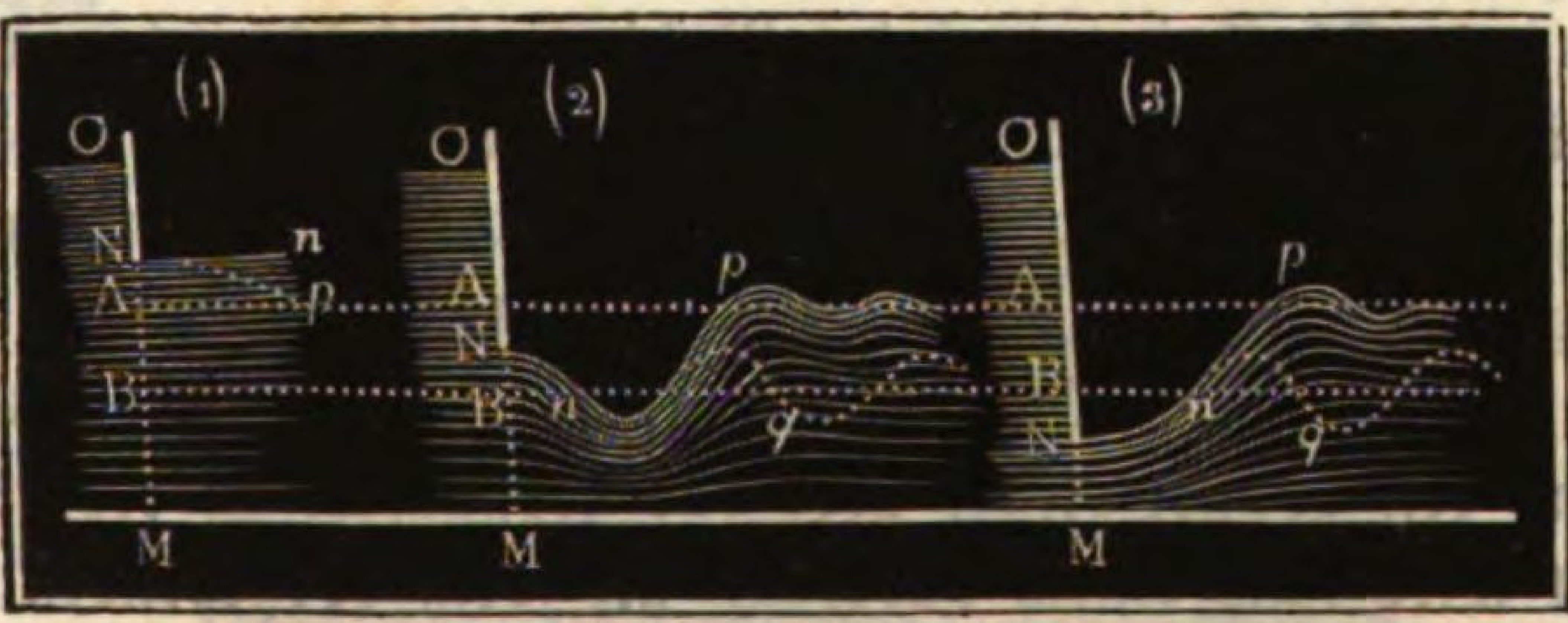
$$A < B \text{ oder}$$

$$\varkappa \frac{\psi}{x} < i,$$

(ist also näherungsweise in sehr breiten Flüssen $0{,}0038 < i$, das Gefälle also möglichst stark) und gleichzeitig

4) $\omega > B$; so wird $d\omega$ positiv sein,
5) $\omega < B$ und $\omega > A$; so wird $d\omega$ negativ sein,
6) $\omega < A$; so wird $d\omega$ positiv sein.

Stellen wir die aus vorstehenden 6 Fällen entspringenden Folgerungen bildlich dar, und zuvörderst in der seitstehenden Figur die aus den ersten 3 Fällen, wo $A > B$ ist. MA ist die



Höhe des Querschnittes A, MB die des Querschnittes B und MN die des konstanten Querschnittes Ω, welcher auf irgend eine künstliche Weise, etwa dadurch erzeugt wird, daß das Wasser unter einer vertikalen Wand NO hervorspringt.

Ist nun $\Omega > A$, wie in Fig. (1); so würde sich der Spiegel Nn fortwährend mehr über das Flußbett zu erheben streben. Übrigens muß die Kurve Nn in allen Punkten ein Gefälle nach unten haben, und kann niemals nach oben ansteigen; denn setzt man $\frac{d\omega}{x} = dh$ und $ids = dz$; so lehrt die Gleichung

$$dh = \frac{\omega^3 - A^3}{\omega^3 - B^3} dz,$$

in welcher der Faktor von dz ein echter Bruch ist, daß das Wachsthum dh des Wasserstandes über der Sohle des Flußbettes geringer ist, als der Fall dz dieser Sohle auf die Länge ds des Flußbettes. Wäre $A = B$; so würde $dh = dz$, also der Spiegel Nn horizontal werden.

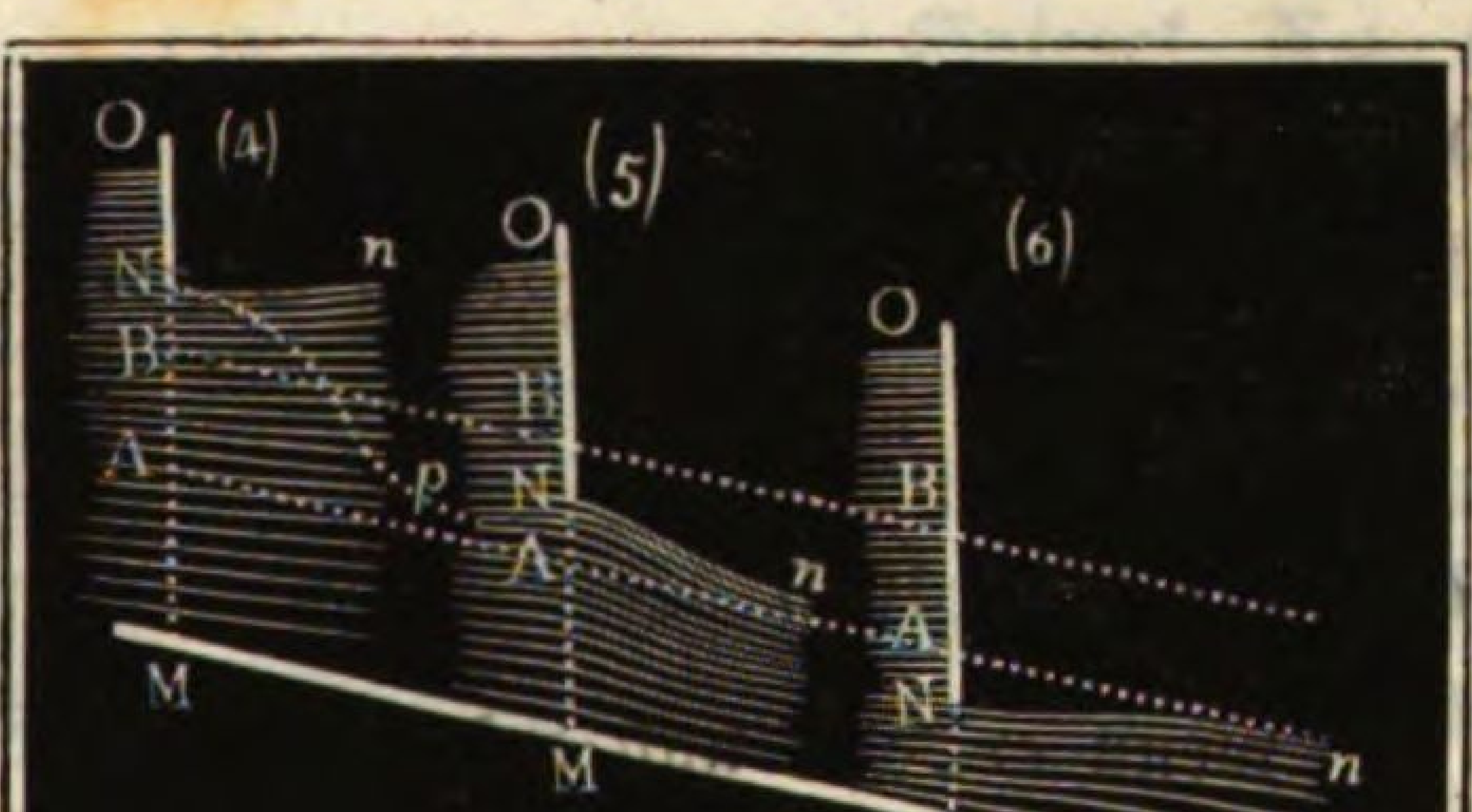
Bei diesem Falle muß noch bemerkt werden, daß wenn es wirklich durch künstliche Mittel gelungen ist, stromaufwärts einen Querschnitt $MN = \Omega$ zu erzeugen und festzuhalten, welcher größer ist, als der natürliche Querschnitt $MA = A$, es behuf Anwendbarkeit der in §. 144 entwickelten Theorie immer noch darauf ankommt, sich zu vergewissern, daß die Strombewegung auch im ganzen Verlaufe des Flußbettes in parallelen vertikalen Schichten vor sich gehe. Ist das Letztere nicht zu erreichen, und kann es nicht verhindert werden, daß sich der Spiegel an irgend einer späteren Stelle stärker senke, als das vorstehende Gesetz angibt; so wird Dies zur Folge haben, daß sich die Theilchen der einzelnen Schichten nicht sämmtlich parallel zum Flußbette, sondern zum Theil in geneigten Richtungen nach unten bewegen und demgemäß zu ihrer eigenen Fortbewegung die Entwickelung einer größeren lebenden Kraft erfordern, als bei der parallelen Bewegung erforderlich war. Die auf diese vermehrte lebende Kraft zu verwendende Arbeit wird alsdann nicht mehr disponibel sein, um den Wasserspiegel über das Grundbett zu erheben; der Spiegel wird nach einem anderen, als dem vorstehenden Gesetze sich senken und ein Bestreben haben, den natürlichen Querschnitt A anzunehmen.

Ist $\Omega < A$, aber $> B$, wie in Fig. (2); so wird sich der Spiegel erst senken und den Querschnitt B bei n in einem Punkte erreichen, dessen Abstand von Ω aus Gl. (641) gefunden wird, wenn man darin $\omega = B$ setzt; alsdann wird der Spiegel dicht unterhalb n ein Wellenthal bilden, darauf wieder ansteigen und nun, streng genommen, um die Höhe des Querschnittes B fortwährend Wellenbewegungen einschlagen. Liegt jedoch die Höhe des natürlichen Querschnittes A niedriger, als die höchste Spitze eines Wellenberges; so wird der Spiegel bei p in den natürlichen Zu-

stand übergehen. Aber auch, wenn Dies nicht der Fall, wenn also A **bedeutend** größer ist, als der größte Querschnitt des Wellenberges, wird die vorhin bezeichnete stetige Wellenbewegung nicht von Bestand sein können, weil die lebende Kraft des auf- und abgeschleuderten Wassers sehr bald durch innere Störungen und durch die Reibung an den Uferwänden vernichtet, und alsdann das Wasser, welches nicht fähig ist, mit einer dem Querschnitte B zukommenden Geschwindigkeit abzufließen, stagniren und das stromaufwärts befindliche Wasser solange hemmen würde, bis dasselbe sich zu dem natürlichen Querschnitte A erhoben hätte. In solchen Fällen wird denn in der Regel der Spiegel des Unterwassers bis dicht an die Wand NO herantreten und die Fläche A*p* bilden.

Ist $\Omega < B$, wie in Fig. (3); so wird sich der Spiegel erheben, bei *n* die Höhe des Querschnittes B rasch durchschreiten, einen Wellenberg bilden und, ähnlich wie im vorstehend betrachteten Falle, statt der fortwährenden Wellenbewegung um die Höhe B, entweder in der Linie N*np* den natürlichen Querschnitt A erreichen oder denselben schon unmittelbar hinter der Wand NO annehmen.

Betrachten wir jetzt die letzten 3 Fälle, in welchen $A < B$ ist.



Ist hierbei $\Omega > B$, wie in Fig. (4); so wird sich der Spiegel N*n* nach der obigen Theorie fortwährend heben müssen, ja die Linie N*n* müßte sogar, da jetzt in der Formel

$$dh = \frac{\omega^3 - A^3}{\omega^3 - B^3} dz$$

der Faktor von *dz* ein unechter Bruch ist, ein verkehrtes Gefälle

stromaufwärts annehmen. Bei diesem Falle ist jedoch Dasselbe zu bemerken, wie bei dem ad (1) gedachten Falle. Die Bewegung des Wassers wird nämlich in den meisten Fällen nicht in parallelen Schichten erfolgen, und der Spiegel wird sich auf die natürliche Höhe des Querschnittes A herabsenken.

Ist $\Omega < B$, aber $> A$, wie in Fig. (5); so wird sich der Spiegel fortwährend herabsenken und sich der Höhe des natürlichen Querschnittes A immer mehr nähern, ohne dieselbe, streng genommen, ganz zu erreichen.

Ist $\Omega < A$, wie in Fig. (6); so wird sich der Spiegel fortwährend heben und sich ebenfalls der Höhe des natürlichen Querschnittes A immer mehr nähern, ohne dieselbe je vollkommen zu erreichen.

Die letzten beiden Fälle sind die in der Praxis am meisten vorkommenden, auf welche auch die Gl. (641) die genaueste Anwendung findet.

Wenn jetzt der konstante Querschnitt Ω stromabwärts liegt, sodaß die Länge s der Strombewegung entgegen gerechnet wird; so gilt die Gl. (646), nämlich

$$d\omega = -\frac{\omega^3 - A^3}{\omega^3 - B^3} ixds.$$

Hiernach wird $d\omega$ positiv sein,

wenn $\omega > A$ und gleichzeitig $\omega < B$,

wenn $\omega < A$ und $\omega > B$ ist;

ferner wird $d\omega$ negativ sein,

wenn $\omega > A$ und $\omega > B$,

wenn $\omega < A$ und $\omega < B$ ist.

Es sei daher in einem Flusse zuvörderst

$$A > B$$

oder nach den Gleichungen (640)

$$\varkappa \frac{\psi}{x} > i;$$

näherungsweise wird Dies, wie schon früher bemerkt, in sehr

breiten Flüssen, wo nahezu $\psi = x$ ist, stattfinden, sobald $\varkappa > i$ oder $0{,}0038 > i$ ist). Hat man alsdann gleichzeitig

1) $\omega > A$; so wird $d\omega$ negativ sein,
2) $\omega < A$ und $\omega > B$; so wird $d\omega$ positiv sein,
3) $\omega < B$; so wird $d\omega$ negativ sein.

Ist aber in einem Flusse

$$A < B \text{ oder}$$

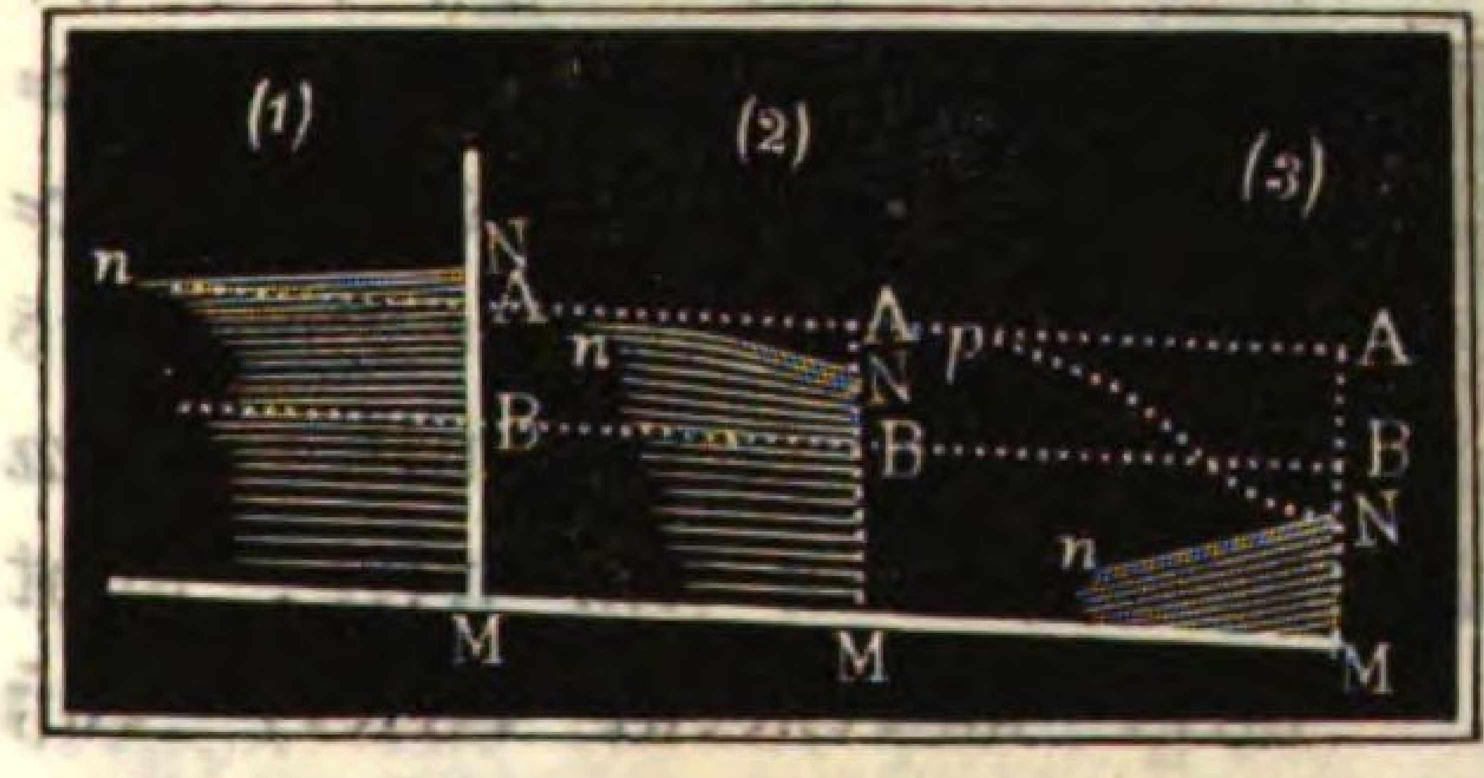
$$\varkappa \frac{\psi}{x} < i$$

(d. i. näherungsweise in sehr breiten Flüssen $0{,}0038 < i$) und gleichzeitig

4) $\omega > B$; so wird $d\omega$ negativ sein,
5) $\omega < B$ und $\omega > A$; so wird $d\omega$ positiv sein,
6) $\omega < A$; so wird $d\omega$ negativ sein.

Um die vorstehenden 6 Fälle durch bildliche Darstellung anschaulicher zu machen; so betrachte man zuvörderst die ersten 3 Fälle, bei welchen $A > B$ ist, und ebenso, wie vorhin, MA den Querschnitt A, MB den Querschnitt B und MN den Querschnitt Ω darstellt.

Ist alsdann $\Omega > A$, wie in Fig. (1); so würde sich der Spiegel Nn immer mehr senken und ein Bestreben haben, in unendlicher Entfernung die Höhe des natürlichen Querschnittes A zu erreichen. Übrigens bemerkt man, daß die Kurve Nn in allen Punkten stromaufwärts ansteigt, also in der Richtung des Stromes ein eigentliches Gefälle besitzt.



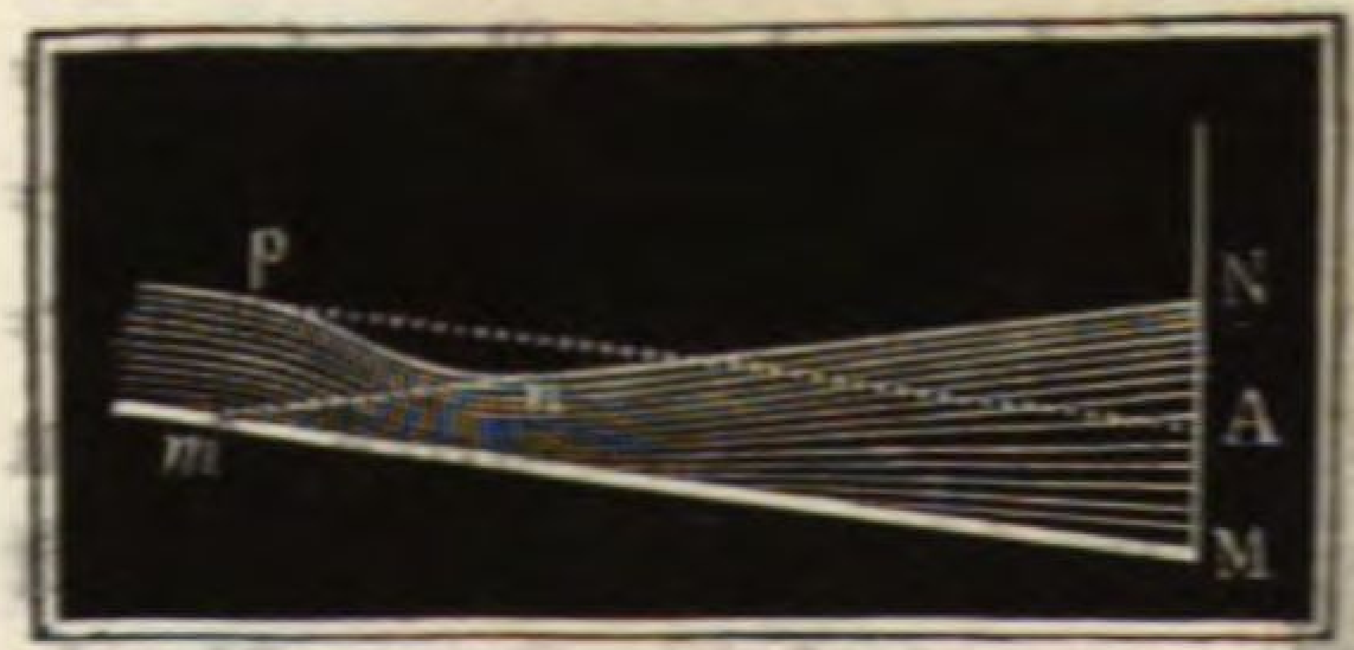
Denn setzt man $\frac{d\omega}{x} = dh$ und $i ds = -dz$; so folgt aus der Gleichung

$$dh = \frac{\omega^3 - A^3}{\omega^3 - B^3} dz,$$

worin dz eine durchaus negative Größe ist, deren absoluter Werth dz' sei, sodaß man

$$dh = -\frac{\omega^3 - A^3}{\omega^3 - B^3} dz'$$

hat, daß weil der Faktor von dz' ein echter Bruch ist, das Dekrement der Höhe h des Wasserstandes über der Sohle des Bettes kleiner ist, als die auf die Länge ds stattfindende Steigung des Flußbettes. Wäre A=B; so würde $dh = dz = -dz'$, also der Spiegel Nn horizontal werden. Unter der letzteren besonderen Voraussetzung, wonach A=B sei, wird der horizontale Spiegel Nn die Höhe des Querschnittes A oder B durchschneiden, und auch dann noch ein Bestreben haben, tiefer herabzusinken oder den Querschnitt des Stromes zu verkleinern. Die Tendenz bei dieser zunehmenden Verkleinerung des Querschnittes ist eine Vermehrung der Geschwindigkeit oder der lebenden Kraft der stromaufwärts befindlichen Flüssigkeitstheilchen. Eine solche Vermehrung der lebenden Kraft würde aber auch dadurch erzeugt werden, wenn sich die Theilchen einer jeden Schicht der Flüssigkeit nicht sämmtlich parallel zu dem Flußbette, sondern zum Theil auch in geneigten Richtungen von oben nach unten bewegten. Da nun die Herabsenkung des Spiegels bis ganz auf die Sohle des Flußbettes oder die Erzeugung einer unendlich großen Geschwindigkeit des Stromes an dieser Stelle m in der That etwas Absurdes an sich trägt; so folgt,



daß für solche Fälle das Prinzip des Parallelismus der Querschichten, nachdem die Höhe des natürlichen Querschnittes bei n durchschritten sein wird, nicht mehr anwendbar bleibt, daß sich vielmehr der Spiegel des Stromes, welcher in größerer Entfernung vom Punkte n die Höhe des natürlichen Querschnittes A annehmen wird, dicht hinter diesem Punkte rasch erheben und die Gestalt Nnp einschlagen wird.

Ist $\Omega < A$, aber $> B$, wie in der obigen Fig. (2); so wird sich der Spiegel erheben und ein Bestreben haben, der Höhe des natürlichen Querschnittes A immer näher zu kommen, während derselbe diese Höhe, streng genommen, erst in unendlicher Entfernung erreicht.

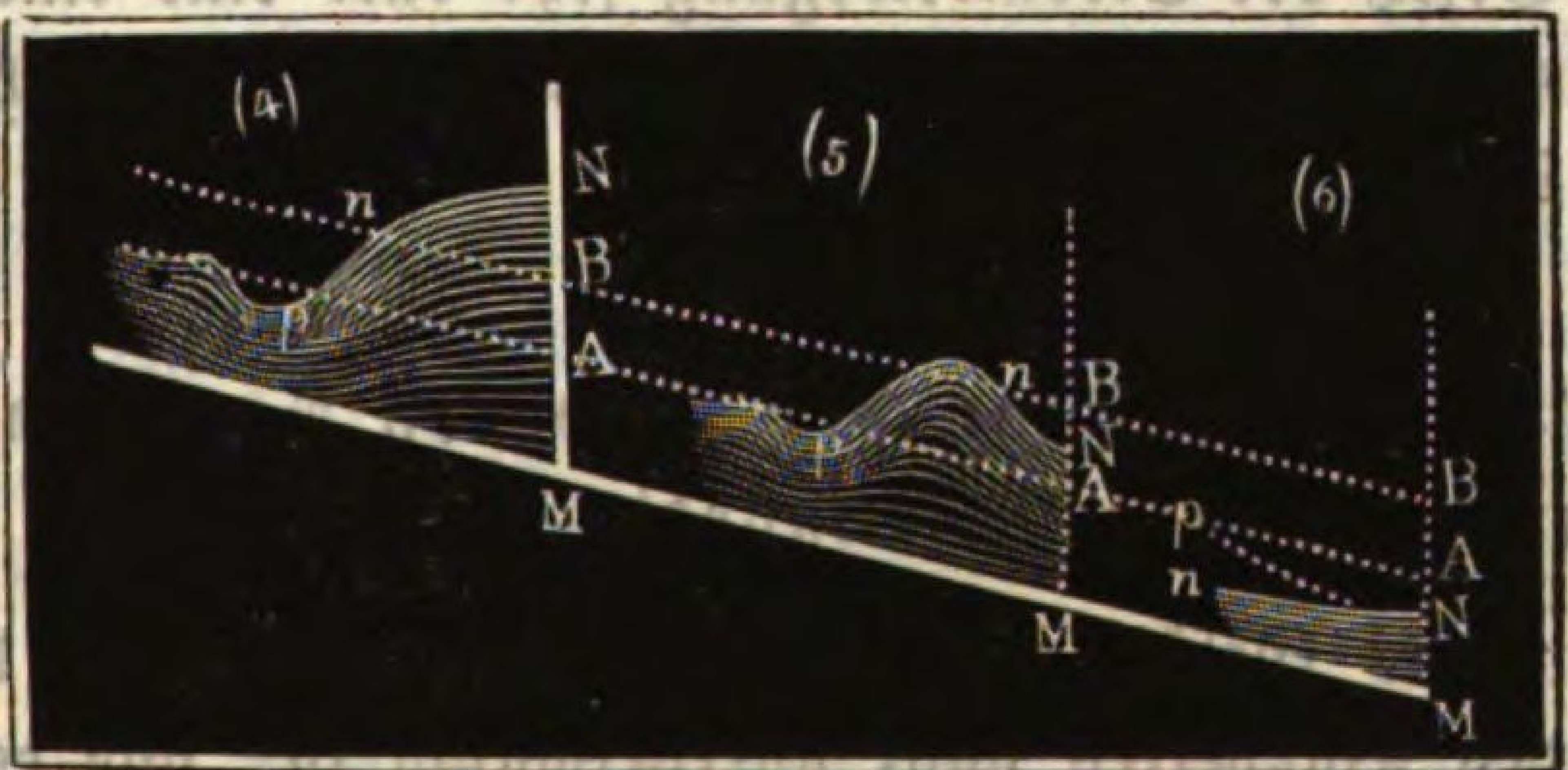
Ist $\Omega < B$, wie in Fig. (3); so wird der Spiegel sich bestreben, noch tiefer gegen die Sohle herabzusinken, indem sogar die Linie N*n* stromaufwärts ein Gefälle besäße, was aus der Gleichung

$$dh = -\frac{\omega^3 - A^3}{\omega^3 - B^3}\,dz = \frac{\omega^3 - A^3}{\omega^3 - B^3}\,dz',$$

worin der Faktor von dz ein unechter Bruch ist, hervorgeht. Aus den ad Fig. (1) bei Gelegenheit der Voraussetzung von $A = B$ angeführten Gründen wird jedoch die Verkleinerung des Querschnittes stromaufwärts von Ω nach dem obigen Gesetze nur auf eine sehr kurze Entfernung stattfinden können, indem sich alsdann der Spiegel rasch erheben und die Form N*p* annehmen wird, mit welcher er in die Höhe des natürlichen Querschnittes A übergeht.

Betrachten wir jetzt die 3 letzten der obigen 6 Fälle, in welchen $A < B$ ist.

Ist dabei $\Omega > B$, wie in Fig. (4); so wird sich der Spie-



gel herabsenken, indem die Linie N*n* stromaufwärts ein Gefälle besitzt, was daraus hervorgeht, daß in der Formel

$$dh = -\frac{\omega^3 - A^3}{\omega^3 - B^3}\,dz = \frac{\omega^3 - A^3}{\omega^3 - B^3}\,dz'$$

der Faktor von dz' ein unechter Bruch ist. Bei *n* wird die Höhe des Querschnittes B rasch durchschritten werden, indem sich jenseit B ein stehendes Wellenthal bildet. Der Abstand *s* des Durchschnittspunktes *n* von dem konstanten Querschnitte $MN = \Omega$ ergibt sich aus Gl. (644), wenn man darin $\omega = B$ setzt. Jenseit des Punktes *n* wird der Spiegel nach einigen Wellenschlägen den

natürlichen Querschnitt A annehmen. Man vergleiche hierbei die analogen Erscheinungen (2) und (3) unter den zuvor betrachteten 6 Fällen.

Ist $\Omega < B$, aber $> A$, wie in Fig. (5); so wird sich der Spiegel zuvörderst erheben, bei *n* die Höhe des Querschnittes B rasch durchschreiten, daselbst einen stehenden Wellenberg bilden, und im ferneren Verlaufe, ähnlich wie im vorhergehenden Falle, nach einigen Wellenschlägen in den natürlichen Querschnitt A übergehen.

Ist endlich $\Omega < A$, wie in Fig. (6); so wird der Spiegel ein Bestreben haben, sich zu senken, wobei jedoch die Linie N*n* überall ein Gefälle stromabwärts von *n* nach N besitzt, was aus der Gleichung

$$dh = -\frac{\omega^3 - A^3}{\omega^3 - B^3} dz = \frac{\omega^3 - A^3}{\omega^3 - B^3} dz',$$

worin der Faktor von dz' echter Bruch ist, hervorgeht. Aus den ad Fig. (3) gedachten Gründen wird jedoch das früher angenommene Gesetz der Strombewegung sehr bald eine Änderung erleiden, und der Spiegel wird sich rasch gegen die Höhe des natürlichen Querschnittes A erheben.

§. 148. Anwendung der früheren Formeln auf ein ganz unregelmäßiges Flußbett.

Wenn das Gefälle der Sohle und die Gestalt des Querschnittes des Flußbettes ganz unregelmäßig ist, wie es gewöhnlich eintritt, wenn von einem solchen Bette durch Nivellements in bestimmten Abständen die Querprofile gegeben sind; so können die früheren Formeln nur näherungsweise darauf in Anwendung gebracht werden. Am leichtesten würde man sich der Gleichung (629) bedienen können, wenn man darin statt des Integrals $\int_0^s \varkappa \frac{\psi}{\omega} v^2 \, ds$ das Produkt des Zwischenraumes *s* der beiden Querschnitte Ω und ω in die halbe Summe der äußersten Werthe der Größe $\varkappa \frac{\psi}{\omega} v^2$, also $\frac{1}{2} \varkappa s \left(\frac{\Psi}{\Omega} V^2 + \frac{\psi}{\omega} v^2 \right)$ setzte.

Dies gibt, da auch $\frac{V\Omega}{\omega} = v$ ist,

$$h - H = z - Z - \frac{1}{2g}(v^2 - V^2) - \frac{1}{2}\varkappa s\left(\frac{\psi}{\omega}v^2 + \frac{\Psi}{\Omega}V^2\right) \dots\dots (651)$$

Läge der gegebene Querschnitt Ω stromabwärts, sodaß die Länge s stromaufwärts gerechnet würde; so hätte man in der vorstehenden Gleichung nur $-s$ an die Stelle von s zu setzen, wodurch man

$$H - h = Z - z - \frac{1}{2g}(V^2 - v^2) - \frac{1}{2}\varkappa s\left(\frac{\psi}{\omega}v^2 + \frac{\Psi}{\Omega}V^2\right) \dots\dots (652)$$

erhielte.

Wenn nun irgend ein Querschnitt Ω des Stromes nebst den zugehörigen Größen H, Ψ und V bekannt und der Abstand s von dem Querschnitte Ω nebst der entsprechenden Senkung $z - Z$ der Sohle des Flußbettes gegeben wäre; so würde man den Werth h des Wasserstandes in dem gesuchten Querschnitte ω aus der vorstehenden Gleichung am leichtesten durch einige Proberechnungen ermitteln können, indem man für jene Höhe h einen beliebigen Werth annähme und alsdann zusähe, ob die zugehörigen Werthe von ω, ψ und v jener Gleichung ein Genüge leisteten.

Nachdem man hierdurch die zusammengehörigen Werthe von ω, h, ψ, v kennen gelernt hat, substituirt man dieselben resp. für Ω, H, Ψ, V und beginnt dieselbe Rechnung für eine neue Flußstrecke, welche sich an die vorhergehende unmittelbar anschließt.

§. 149. Veränderungen der Geschwindigkeit der Wassertheilchen in den verschiedenen Punkten Ein und desselben Querschnittes.

Wir haben zwar in den früheren Paragraphen angenommen, die Geschwindigkeit eines Wasserstromes sei in allen Punkten Ein und desselben vertikalen Querschnittes dieselbe. Die Erfahrung lehrt jedoch, daß Dies nicht der Fall ist, und daß die Geschwindigkeit von den Uferwänden nach der Mitte der freien Oberfläche zu immer größer wird. Diese Erscheinung ist sehr erklärlich, wenn man bedenkt, wie die an den Uferwänden wirkende Reibung sich vermöge der Kohäsion der Flüssigkeit erst allmählich über die ganze Masse der bewegten Flüssigkeit verbreitet. Man beobachtet, daß die

Geschwindigkeit des Wassers auf der Sohle des Flußbettes am schwächsten, nahezu in der Mitte der freien Oberfläche aber am stärksten ist. Die Linie, welche sämmtliche Punkte der größten Geschwindigkeit in der freien Oberfläche eines Stromes miteinander verbindet, nennt man den Stromstrich. Wie leicht zu begreifen, hängt die Figur dieser Linie von der Gestaltung des Flußbettes ab, und wird sich in Stromkrümmungen, wo die Wirkung der Zentrifugalkraft auf die Wassertheilchen mit in Erwägung kommt, mehr dem konkaven Ufer nähern und vom konvexen Ufer entfernen. Da die freie Oberfläche des Stromes mit der atmosphärischen Luft in Berührung ist, und diese Luft bei der Bewegung des Wassers an letzterem haftet und dadurch einen, wennauch geringen Widerstand herbeiführt; so befinden sich, streng genommen, die mit der größten Geschwindigkeit begabten Stromfäden nicht genau an der freien Oberfläche des Stromes, sondern dieselben liegen in geringer Tiefe unter derselben. In den früheren Untersuchungen haben wir von allen diesen Ungleichförmigkeiten abgesehen und angenommen, daß sich eine jede vertikale Querschicht in allen ihren Punkten mit Ein und derselben mittleren Geschwindigkeit bewege, wobei unter mittlerer Geschwindigkeit diejenige verstanden wurde, welche alle Theilchen derselben Querschicht besitzen müßten, damit sich durch den betreffenden Querschnitt dieselbe Wassermasse ergösse, wie sie sich bei der ungleichen Geschwindigkeit der einzelnen Theile wirklich ergießt. Im Folgenden wollen wir jedoch die Ungleichheiten kennen lernen, welche in der Geschwindigkeit der verschiedenen Punkte Ein und desselben vertikalen Querschnittes vorkommen.

Betrachten wir daher zuvörderst die Veränderungen, welche die Geschwindigkeit erleidet, wenn man in vertikaler Richtung von der Oberfläche nach der Sohle des Flußbettes hinabsteigt. Es sei

U_1 die nahe unter der Oberfläche stattfindende größte Geschwindigkeit in irgend einer vertikalen Linie,

U_2 die am Boden dieser Vertikalen stattfindende kleinste Geschwindigkeit,

T die Tiefe des Stromes in dieser Vertikalen,

u die in der Tiefe t unter der Oberfläche in derselben Vertikalen herrschende Geschwindigkeit,

U die mittlere Geschwindigkeit dieser Vertikalen.

Alsdann hat man nach den Versuchen von Brünings und Funk, welche von Lahmeyer*) zusammengestellt sind,

$$U = 0{,}937 U_1 - 0{,}00792 U_1^2, \quad \ldots . (653)$$

wodurch die mittlere Geschwindigkeit einer Vertikalen aus der größten berechnet werden kann.

Ferner hat man nach jenen Versuchen

$$U_2 = (0{,}862 - 0{,}0147 T) U_1, \quad \ldots . (654)$$

woraus sich die Geschwindigkeit am Boden einer Vertikalen ergibt, wenn die größte Geschwindigkeit an der Oberfläche und die Tiefe dieser Vertikalen bekannt ist.

Näherungsweise leitet Lahmeyer aus der vorstehenden Gleichung (654) unter der Voraussetzung, daß die Geschwindigkeit von der Oberfläche bis zum Boden gleichmäßig abnehme, das folgende Gesetz

$$u = \left[1 - (0{,}138 + 0{,}0147 T) \frac{t}{T}\right] U_1 \quad \ldots . (655)$$

ab, aus welchem sich die Geschwindigkeit in der Tiefe t ergibt, wenn die Geschwindigkeit U_1 an der Oberfläche und die Tiefe T der Vertikalen gegeben ist.

Zur Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit V eines ganzen vertikalen Querschnittes aus der größten in diesem Querschnitte herrschenden Geschwindigkeit U_1 kann man nach den Versuchen von Brünings und Funk, sowie nach den sehr zahlreichen Versuchen von Lahmeyer für gerade Flußstrecken

$$V = 0{,}826 U_1 - 0{,}0257 U_1^2 \quad \ldots . (656)$$

setzen.

Wenn man neben den 246 Versuchen, aus welchen die vorstehende Gleichung abgeleitet ist, noch 95 andere, durch Lahmeyer angestellte Versuche berücksichtigt, bei welchen das Flußprofil in einer Krümmung genommen ist, deren Radius kleiner, als 2000 Fuß war; so erhält man

$$V = 0{,}778 U_1 - 0{,}0124 U_1^2 \quad \ldots . (657)$$

*) Erfahrungsresultate über die Bewegung des Wassers in Flußbetten und Kanälen. §. 1 ff.

Die Geschwindigkeiten bei den vorstehend erwähnten Versuchen, aus welchen die Gleichungen (653) bis (657) abgeleitet sind, lagen zwischen den Gränzen von 1 bis 6 Fuß pro Sekunde.

Um die Veränderungen leicht zu übersehen, welche die mittlere Geschwindigkeit eines ganzen Stromprofiles erleidet, wenn die Höhe des Wasserspiegels in demselben sich ändert; so sei

t die mittlere Tiefe des fraglichen Profiles bei dem niedrigsten der beiden zu betrachtenden Wasserstände, sodaß wenn Ω der Flächeninhalt und x die obere Breite dieses Profiles darstellt, $t = \frac{\Omega}{x}$ ist,

V_1 die mittlere Geschwindigkeit in diesem Profile bei dem letzteren Wasserstande,

d die Höhe des zweiten Wasserstandes über dem ersteren,

V die mittlere Geschwindigkeit bei dem letzteren, höheren Wasserstande.

Alsdann hat man nach Lahmeyer auf Grund der Versuche von Brünings, Funk, Dubuat und Lahmeyer

$$\left(\frac{V}{V_1} - \sqrt{\frac{t+d}{t}}\right)\frac{t+d}{d^2} = C \qquad \ldots . (658)$$

C bezeichnet hierin eine Zahlengröße, welche mit der Differenz d der beiden Wasserstände variirt und folgende Werthe annimmt:

Werth von d	Werth von C	Werth von d	Werth von C
Fuß		Fuß	
0,1	1,129	4	0,446
0,2	0,860	5	0,400
0,3	0,767	6	0,356
0,4	0,718	7	0,312
0,5	0,688	8	0,268
1	0,613	9	0,225
2	0,544	10	0,182
3	0,493		

Wirkung der Stauwerke in einem Wasserstrome.

§. 150. Begriff und Ursachen des Staues.

Mancherlei Bauwerke, welche in dem Bette eines Flusses ausgeführt werden, haben eine Verengung des natürlichen Querschnittes des Stromes und demnach eine vermehrte Geschwindigkeit des Wassers an dieser Stelle zur Folge. Eine solche vermehrte Geschwindigkeit kann aber nur durch eine vermehrte Druckhöhe oberhalb des gedachten Bauwerkes erzeugt werden, und die nächste Folge der gemachten Anlage ist, daß sich der Spiegel stromaufwärts bis zu einer gewissen Höhe und bis auf eine gewisse Entfernung erhebt. Diese Erhebung des Wasserspiegels über den natürlichen Stand nennt man Stau, und die Anlage, welche den Stau verursacht, in Beziehung auf diese Wirkung, ein Stauwerk. Die Entfernung vom Stauwerke, bis auf welche eine wirkliche Aufstauung des Wassers stattfindet, heißt die Stauweite.

In den nachfolgenden Paragraphen wollen wir die gewöhnlichsten Ursachen des Staues näher betrachten und den Querschnitt oder die Stauhöhe bestimmen, welche das Wasser unmittelbar vor dem Stauwerke stromaufwärts annehmen wird.

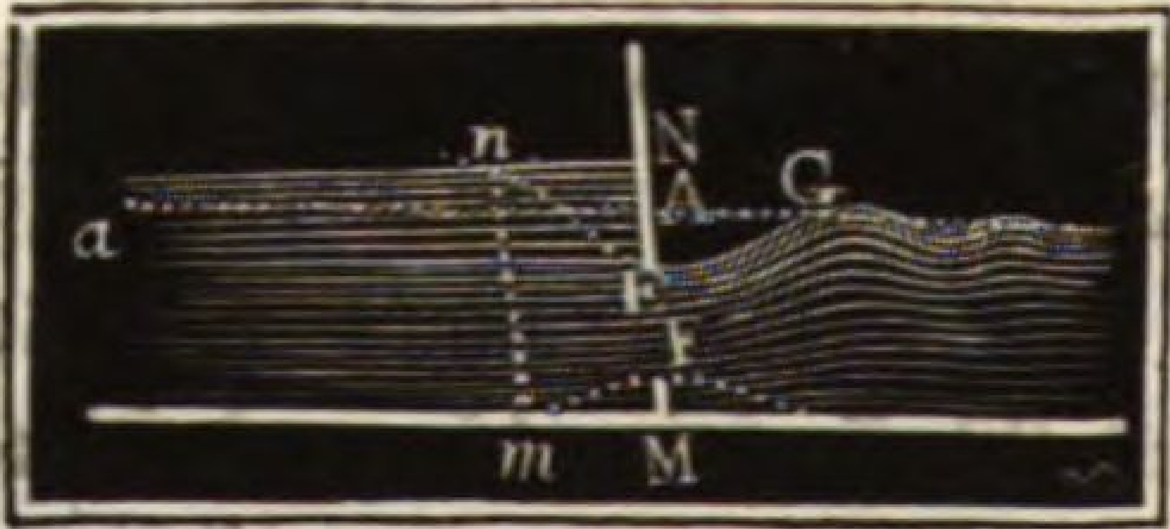
Substituirt man alsdann den zuletzt gedachten Querschnitt in die Formel (644) für die Größe Ω; so wird man vermittelst dieser Formel und unter Beachtung der Erläuterungen des §s 147 im Stande sein, die Gestalt des Wasserspiegels zu bestimmen, welchen der Strom, dessen Gefälle auf eine geraume Strecke als gleichmäßig gedacht wird, oberhalb des Stauwerkes annimmt. Wäre das Gefälle oder der Querschnitt des Flußbettes ganz unregelmäßig; so müßte man sich zu dem vorstehenden Zwecke der Näherungsformel (652) bedienen.

Was die Stauweite betrifft; so geht aus §. 147 hervor, daß wenn A den natürlichen Querschnitt $\sqrt[3]{\frac{\varkappa}{g}\frac{\psi}{i}Q^2}$, ferner B den Querschnitt $\sqrt[3]{\frac{\varkappa}{g}Q^2}$ und Ω den Querschnitt des Stromes unmittelbar oberhalb des Stauwerkes, welcher letztere also immer $> A$ sein wird, bezeichnet, die Stauweite unendlich

groß sein wird, sobald man A > B hat, also in der Regel bei Flüssen mit schwachem Gefälle, bei denen das Gefälle $i < 0{,}0038$ ist; daß dagegen die Stauweite einen endlichen Werth hat, sobald A < B ist, also in der Regel bei Flüssen mit starkem Gefälle, bei denen $i > 0{,}0038$ ist. Im ersteren Falle nähert sich der Wasserspiegel immer mehr und mehr der Höhe des natürlichen Querschnittes A, ohne dieselbe, streng genommen, jemals ganz zu erreichen; in dem letzteren Falle wird zuvörderst mit einer plötzlichen Anschwellung die Höhe des Querschnittes B in einem Abstande s von dem Stauwerke, welcher aus Gl. (644) zu berechnen ist, durchschritten, und der Wasserspiegel geht alsdann nach einigen Undulationen, welche eine konstante Lage im Strome behalten, in den natürlichen Querschnitt A über.

§. 151. Stauhöhe unmittelbar vor der Öffnung eines Schützbrettes. — Erster Fall; wenn die Schützöffnung ganz vom Spiegel des Unterwassers bedeckt ist.

aAG sei die Oberfläche des Wasserspiegels eines Stromes im natürlichen Zustande und EF die Öffnung eines Schützbrettes, welches normal auf die Richtung des Stromes quer durch das Flußbett gesetzt ist. Es kommt darauf an, die Höhe AN zu bestimmen, um welche sich der Spiegel unmittelbar vor dem Schützbrette über den natürlichen Stand erheben wird.



Zu diesem Ende bemerke man, daß der Wasserstand unterhalb des Schützbrettes bei der Disposition der obigen Figur, wo das Flußbett oberhalb und unterhalb des Schützbrettes dieselbe gerade Linie bildet, in der Regel sehr bald die Höhe des natürlichen Querschnittes wieder annehmen, ja sogar in vielen Fällen in dieser Höhe MA bis dicht vor das Schützbrett treten wird. Man wird also annehmen können, daß sich das oberhalb des Schützbrettes befindliche Wasser in einen Behälter ergieße, welcher gleichfalls mit Wasser erfüllt ist und die Ausflußöffnung bis zur Höhe MA ganz bedeckt.

Das Wasser wird sich durch die Öffnung FE in Fäden ergießen, welche bei mn die Umfangswände des Flußbettes berüh-

ren und bei dem Durchgange durch die Öffnung ebenfalls der Richtung des Stromes parallel sind, und zwar wird hierbei der Querschnitt *mn* so nahe vor dem Schützbrette liegen, daß sowol der Spiegel auf die Strecke N*n*, wie die Sohle des Flußbettes auf die Strecke M*m* als horizontal angesehen werden können. Man wird hiernach auch die Bewegung des Wassers vor dem Schützbrette dem Falle assimiliren können, in welchem sich eine Flüssigkeit in parallelen Schichten durch ein Gefäß bewegt, dessen oberer Querschnitt *mn* und dessen unterer Querschnitt FE ist, und bei dem sehr geringen Abstande der beiden Querschnitte *mn* und FE wird man den Reibungswiderstand vernachlässigen können, welcher die Flüssigkeit an den Uferwänden zwischen jenen beiden Querschnitten erleidet.

Nun sei

A die Fläche des natürlichen Querschnittes des Stromes,

Ω' die Fläche des Querschnittes MN unmittelbar vor dem Schützbrette,

Ω'' die Fläche der Schützöffnung FE,

m der Kontraktionskoeffizient für den Durchgang des Wassers durch die letztere Öffnung, also $m\Omega''$ der Querschnitt der stärksten Kontraktion hinter der Schützöffnung,

H die Höhe MA des natürlichen Querschnittes,

Z′ der Abstand des Schwerpunkts des Querschnittes $\mathrm{MN} = \Omega'$ von dem Spiegel bei N,

Z″ der Abstand des Schwerpunktes der Schützöffnung $\mathrm{FE} = \Omega''$ von demselben Spiegel bei N,

ζ die Höhe MN des aufgestaueten Wasserspiegels vor dem Schützbrette über der Sohle des Flußbettes,

x die durchschnittliche, als konstant angenommene horizontale Breite des Flußbettes,

V die mittlere Geschwindigkeit des Stromes in dem natürlichen Querschnitte A,

p' und p'' die mittleren hydraulischen Pressungen auf die Flächeneinheit gegen die Querschnitte Ω' und Ω'',

p der atmosphärische Druck auf die Flächeneinheit,

w das Gewicht einer Volumeinheit des Wassers,

Q die Wassermenge, welche der Strom in der Zeiteinheit liefert.

Betrachtet man nach dem Obigen *mn*EF als ein Gefäß, in

welchem Nn horizontal, $\overline{mn}=\overline{\mathrm{MN}}=\Omega'$ ist und in welchem sich die Bewegung der Flüssigkeit in dem Beharrungszustande befindet; so hat man in Gl. (241) $\Omega=\mathrm{A}$, $\mathrm{O}'=\Omega'$, $\mathrm{O}''=m\Omega''$, $\frac{d\mathrm{V}}{dt}=o$, $\mathrm{F}=o$ zu setzen und das in $\Sigma\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2$ multiplizirte Glied zu vernachlässigen. Dies ergibt

$$p'-p''+w(\mathrm{Z}'-\mathrm{Z}')=\frac{w}{2g}\mathrm{V}^2\left(\frac{\mathrm{A}^2}{m^2\Omega''^2}-\frac{\mathrm{A}^2}{\Omega'^2}\right) \quad \ldots (659)$$

Nun ist, wie in §. 144, wenn p den atmosphärischen Druck auf die Flächeneinheit darstellt,

$$p'=p+w\mathrm{Z}',$$

und da der Abstand des Schwerpunktes der Öffnung FE von dem Spiegel AG des Unterwassers $=\mathrm{Z}''-(\zeta-\mathrm{H})=\mathrm{Z}''-\zeta+\mathrm{H}$ ist,

$$p''=p+w(\mathrm{Z}''-\zeta+\mathrm{H}).$$

Setzt man diese Werthe in die vorstehende Gleichung (659); so kommt

$$\zeta-\mathrm{H}=\frac{\mathrm{A}^2\mathrm{V}^2}{2g}\left(\frac{1}{m^2\Omega''^2}-\frac{1}{\Omega'^2}\right) \quad \ldots . (660)$$

oder auch, wenn man $\mathrm{AV}=\mathrm{Q}$ setzt,

$$\zeta-\mathrm{H}=\frac{\mathrm{Q}^2}{2g}\left(\frac{1}{m^2\Omega''^2}-\frac{1}{\Omega'^2}\right) \quad \ldots . (661)$$

In diesen letzten beiden Gleichungen ist der Querschnitt $\Omega'=\overline{\mathrm{MN}}$ eine Funktion der Stauhöhe $\zeta=\overline{\mathrm{MN}}$; man wird also, nachdem diese Funktion bekannt ist, Eine dieser Gleichungen für ζ auflösen und den gesuchten Werth dieser letzteren Größe bestimmen können. Ebenso leicht könnte man diese Gleichung für Ω' auflösen und somit den Werth des aufgestaueten Querschnittes MN berechnen.

Wenn der Querschnitt des Stromes als rechtwinklig angenommen wird; so hat man

$$\Omega'=x\zeta,$$

und mithin nach Gl. (661)

$$\zeta - H = \frac{Q^2}{2g}\left[\frac{1}{m^2\Omega''^2} - \frac{1}{x^2\zeta^2}\right] \quad \ldots . (662)$$

Diese Gleichung ist vom dritten Grade in Beziehung zu ζ. Will man deren Auflösung vermeiden und sich mit einem Näherungswerthe begnügen; so kann man zuvörderst in dem Nenner $x^2\zeta^2$ statt $\zeta = \overline{MN}$ die Höhe $H = \overline{MA}$ des natürlichen Querschnittes oder in Gl. (661) $\Omega' = A$ setzen. Nachdem man hierdurch aus Gl. (662) unmittelbar einen ersten Näherungswerth für ζ gefunden hat, ergibt eine Substitution dieses Werthes für ζ in den Nenner $x^2\zeta^2$ einen zweiten genaueren Werth für ζ.

Wollte man jedoch sofort die kubische Gleichung für ζ auflösen; so geschieht Dies am einfachsten in der Form

$$\left(\frac{1}{\zeta}\right)^3 - \left(\frac{2gx^2H}{Q^2} + \frac{x^2}{m^2\Omega''^2}\right)\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{2gx^2}{Q^2} = o \quad \ldots . (663)$$

Setzt man in dieser Gleichung $\zeta = \frac{\Omega'}{x}$; so kann man daraus unmittelbar auf die Größe des Querschnittes $\Omega' = \overline{MN}$ schließen, welchen das aufgestauete Wasser dicht vor dem Schützbrette einnimmt, und welcher für Ω in Gl. (644) zu substituiren sein würde, wenn man die Gestalt des Wasserspiegels stromaufwärts vom Schützbrette weiter verfolgen wollte. Wenn man sich schon aus andern Gründen veranlaßt gesehen hätte, die aus den früheren Untersuchen, namentlich aus §. 147, bekannte Größe $B = \sqrt[3]{\frac{xQ^2}{g}}$ oder $B^3 = \frac{xQ^2}{g}$ zu berechnen; so würde sich die vorstehende Gleichung behuf Berechnung von Ω' auch auf die Form

$$\left(\frac{B}{\Omega'}\right)^3 - \left[\frac{2A}{B} + \left(\frac{B}{m\Omega''}\right)^2\right]\left(\frac{B}{\Omega'}\right) + 2 = o \quad \ldots . (664)$$

bringen lassen, worin A den natürlichen Querschnitt xH darstellt.

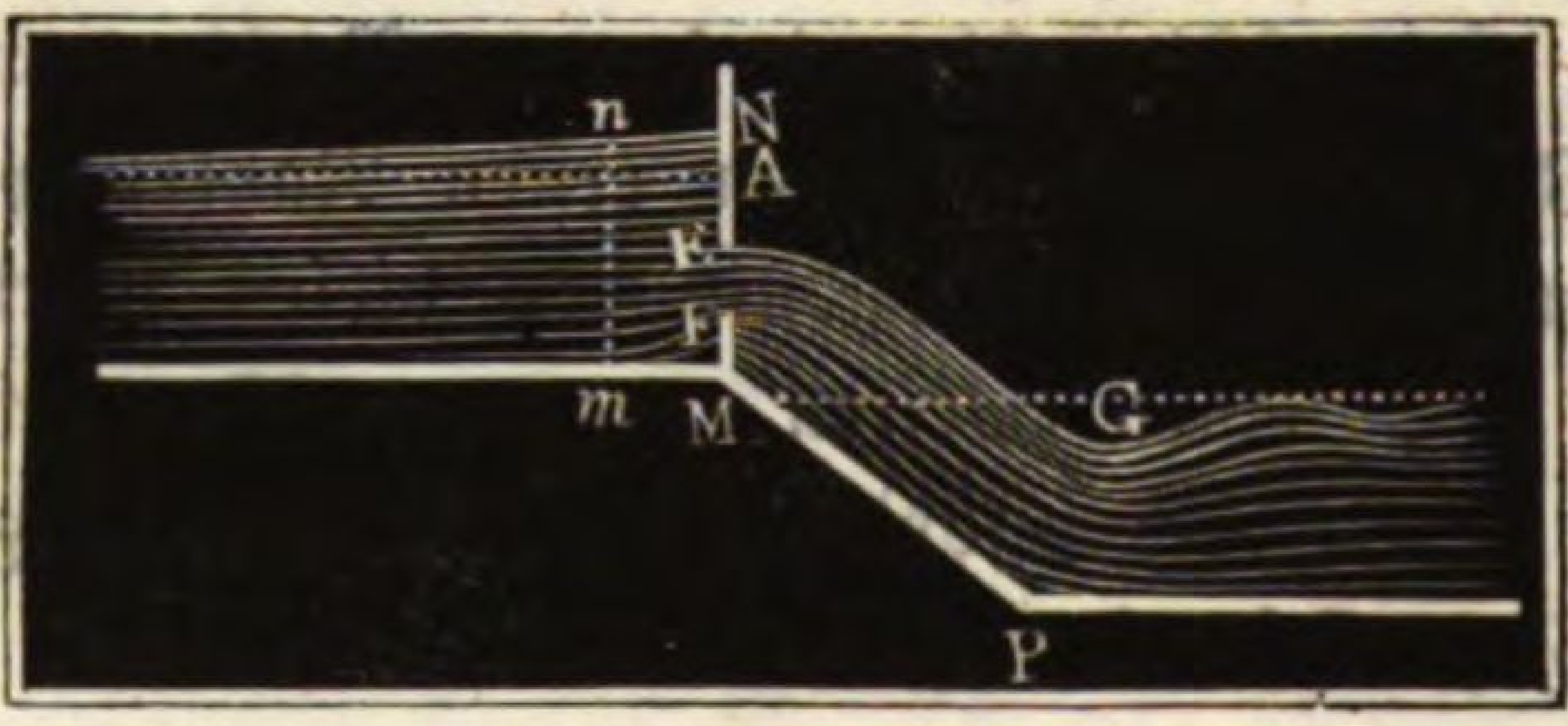
Für den Kontraktionskoeffizienten m in diesen Gleichungen wird man, wenn die Schützöffnung in einer dünnen Wand liegt, im Durchschnitte den Werth

$$m = 0{,}6$$

substituiren können.

§. 152. Zweiter Fall; wenn die Schützöffnung frei in die atmosphärische Luft ausmündet.

Wenn die Sohle des Flußbettes unterhalb des Schützbrettes nicht eine Verlängerung des Bettes oberhalb des Schützbrettes mit demselben Gefälle bildet, sondern sich plötzlich senkt, sodaß



der Spiegel des Unterwassers bei G tiefer steht, als der tiefste Punkt F der Schützöffnung; so gilt auch für diesen Fall die Gl. (659), worin nur für den äußeren Druck p'' gegen die Flächeneinheit der Schützöffnung FE der geeignete Werth zu substituiren wäre.

Was den letzteren Werth des Druckes p'' anlangt; so würde man dafür unter den vorstehenden Umständen den atmosphärischen Druck p zu setzen haben. Dies ergibt statt Gl. (660)

$$Z'' = \frac{A^2V^2}{2g}\left(\frac{1}{m^2\Omega''^2} - \frac{1}{\Omega'^2}\right).$$

Bezeichnet man mit

H_2 die Höhe des Schwerpunktes der Schützöffnung FE über der Sohle M des oberen Flußbettes;

so ist $Z'' = \zeta - H_2$, also

$$\zeta - H_2 = \frac{A^2V^2}{2g}\left(\frac{1}{m^2\Omega''^2} - \frac{1}{\Omega'^2}\right) \quad \ldots \; (665)$$

oder auch

$$\zeta - H_2 = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{m^2\Omega''^2} - \frac{1}{\Omega'^2}\right) \quad \ldots \; (666)$$

Hierin ist wiederum der Querschnitt Ω' des Stromes vor dem Schützbrette eine Funktion der Höhe ζ, und wenn dieser Querschnitt als rechtwinklig angenommen wird; so hat man

$$\Omega' = x\zeta,$$

mithin

$$\zeta - H_2 = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{m^2\Omega''^2} - \frac{1}{x^2\zeta^2}\right) \quad \ldots . (667)$$

Auf diese Gleichung finden dieselben Bemerkungen Anwendung, wie auf Gl. (662). Mit Umgehung der strengen Auflösung derselben, erhält man einen in den meisten Fällen genügenden Näherungswerth, wenn man zuvörderst das Glied $\frac{1}{x^2\zeta^2}$ auf der rechten Seite $= \frac{1}{x^2 H^2} = \frac{1}{A^2}$ setzt, darauf den Werth von ζ berechnet, diesen Werth alsdann nochmals statt ζ in das Glied $\frac{1}{x^2\zeta^2}$ auf der rechten Seite substituirt und darauf den Werth von ζ nach Gl. (667) zum zweiten Male ermittelt.

Eine genaue Auflösung dieser Gleichung ist übrigens am leichtesten in der Form

$$\left(\frac{1}{\zeta}\right)^3 - \left(\frac{2gx^2H_2}{Q^2} + \frac{x^2}{m^2\Omega''^2}\right)\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{2gx^2}{Q^2} = o \quad \ldots . (668)$$

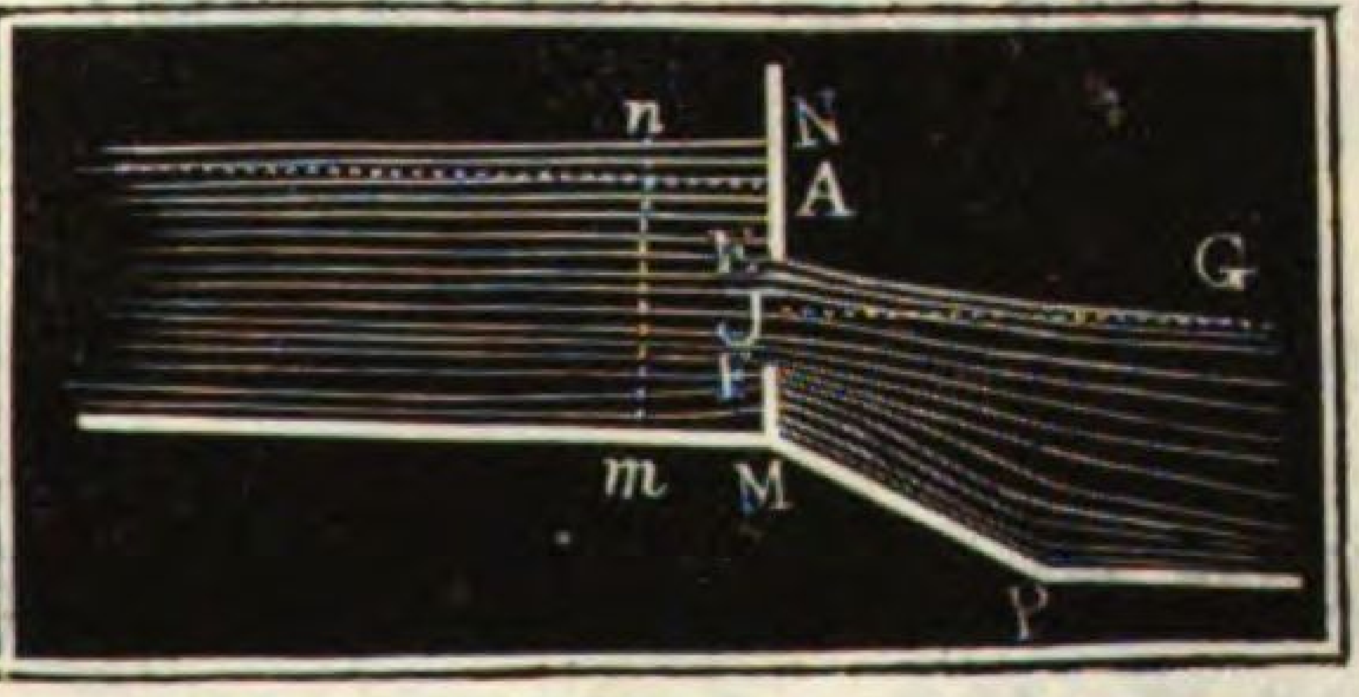
zu bewirken. Auch ergibt sich der Werth des Querschnittes $\Omega' = x\zeta$ leicht durch die Gleichung

$$\left(\frac{B}{\Omega'}\right)^3 - \left[\frac{2xH_2}{B} + \left(\frac{B}{m\Omega''}\right)^2\right]\left(\frac{B}{\Omega'}\right) + 2 = o, \quad \ldots . (669)$$

worin B den bekannten Werth $\sqrt[3]{\frac{xQ^2}{g}}$ hat.

§. 153. Dritter Fall; wenn ein Theil der Schützöffnung von dem Spiegel des Unterwassers bedeckt ist.

Wenn sich die Sohle des Flußbettes unterhalb des Schützbrettes dergestalt fortsetzt, daß die Höhe des Spiegels G des Unterwassers zwischen dem höchsten und niedrigsten Punkte der Schützöffnung EF liegt; so wird man zur Bestimmung des äußeren Druckes gegen



diese Öffnung annehmen können, dieselbe sei durch den Spiegel des Unterwassers in zwei Theile EJ und JF getheilt, von welchen der obere Theil EJ das Wasser in die freie Luft ergieße, während im unteren Theile JF der Ausfluß unter dem Spiegel G des Unterwassers erfolge.

Bezeichneten nun

ω, ω' resp. die Theile EJ und JF der Schützoffnung $EF = \Omega''$, ferner

c, c' und C resp. die Höhen EJ, JF und EF;

so würde man unter der Voraussetzung, daß die Schützöffnung rechtwinklig wäre, für den Gesammtdruck auf den Theil $EJ = \omega$

$$p\omega,$$

für den Gesammtdruck auf den Theil $JF = \omega'$

$$\left(p + w\frac{c'}{2}\right)\omega',$$

also für den Gesammtdruck gegen die ganze Schützöffnung $EF = \Omega''$

$$p(\omega + \omega') + w\frac{c'}{2}\omega' = p\Omega'' + w\frac{c'}{2}\omega',$$

demnach für den durchschnittlichen Druck p'' für jede Flächeneinheit der Schützöffnung

$$p'' = \frac{p\Omega'' + w\frac{c'}{2}\omega'}{\Omega''} = p + w\frac{c'}{2}\frac{\omega'}{\Omega''} = p + \frac{1}{2}w\frac{c'^2}{C}$$

haben.

Substituirt man diesen Werth statt p'' in die Gl. (659) und setzt auch $\zeta - H_2$ für Z''; so kommt

$$\zeta - H_2 - \frac{c'^2}{2C} = \frac{A^2V^2}{2g}\left(\frac{1}{m^2\Omega''^2} - \frac{1}{\Omega'^2}\right) \quad \ldots . (670)$$

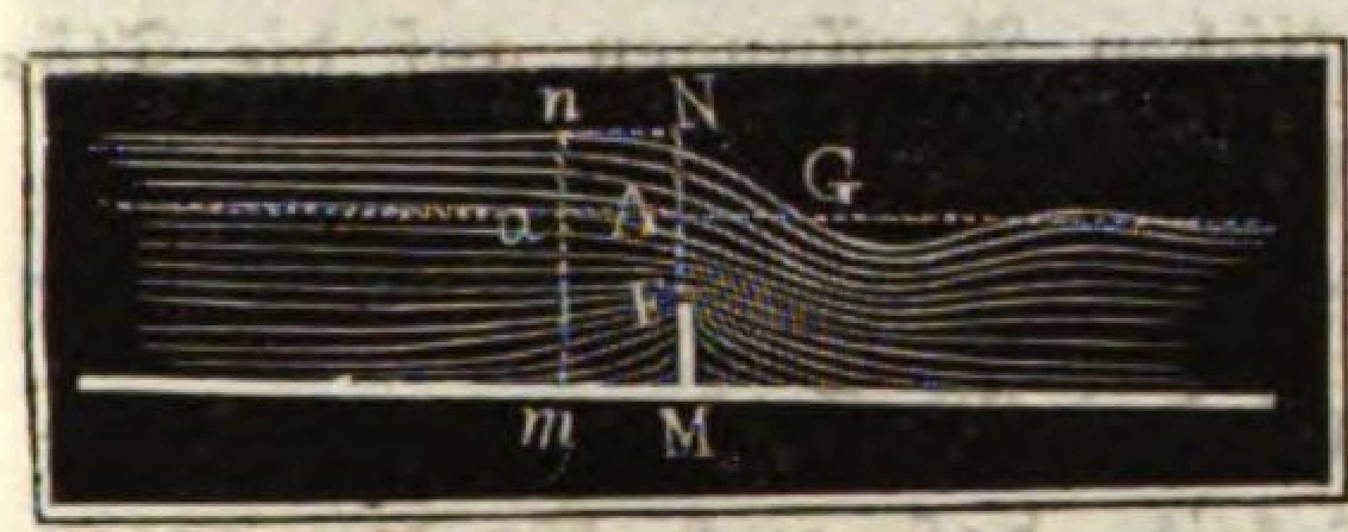
oder

$$\zeta - H_2 - \frac{c'^2}{2C} = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{m^2\Omega''^2} - \frac{1}{\Omega'^2}\right), \quad \ldots . (671)$$

eine Gleichung, welche in ähnlicher Weise zu behandeln ist, wie die Gl. (661) oder (666).

§. 154. Stauhöhe unmittelbar vor einem Überfalle oder überhaupt vor einem verengten Querschnitte, welcher nach oben offen ist.

Bei der gegenwärtigen Aufgabe betrachten wir zuvörderst den allgemeinsten Fall unter folgenden Annahmen: der natürliche Wasserspiegel *a*AG werde dadurch in die Höhe getrieben, daß bei M eine vertikale Wand quer durch den Strom gesetzt wird, welche Einen oder mehrere oben offene rechtwinklige Ausschnitte enthält, also ebenso viel Überfallöffnungen darbietet, durch welche sich der Strom ergießen muß. Außerdem liege die Höhe A des natürlichen Querschnittes oberhalb der Sohle F der Überfallöffnungen, sodaß man annehmen kann, aus dem Theile AN oder *an* des Querschnittes FN ergieße sich das Wasser in die freie Luft, während es durch den Theil AF in einen bis zur Höhe AG gefüllten Behälter eintrete.



Es sei auch hier

A die Fläche des natürlichen Querschnittes des Stromes,

Ω' die Fläche des Querschnittes MN unmittelbar vor dem Überfalle,

Ω'' die Fläche der Überfallöffnung FN,

m der Kontraktionskoeffizient für den Durchgang des Wassers durch die Überfallöffnung FN, sodaß $m\Omega''$ die Fläche der stärksten Kontraktion des Strahles dicht hinter dieser Öffnung darstellt,

H die Höhe MA des natürlichen Querschnittes A,

$\mathfrak{z}$ die Höhe MN des aufgestaueten Querschnittes vor dem Überfalle,

D die Höhe MF der Sohle des Überfalles über der Sohle des Flußbettes,

C die Höhe FN des Wasserspiegels bei *n* über der Sohle F des Überfalles,

c' die Höhe FA des Spiegels des Unterwassers über der Sohle des Überfalles,

Z', Z'' resp. die Abstände der Schwerpunkte der Querschnitte Ω' und Ω'' von der Höhe N des Spiegels des Oberwassers,

x die durchschnittliche, als konstant angenommene horizontale Breite des Flußbettes,
b die gesammte horizontale Breite der Überfallöffnungen,
V die mittlere Geschwindigkeit des Stromes in dem natürlichen Querschnitte A,
Q die Wassermenge, welche der Strom in der Zeiteinheit liefert,
p' und p'' die mittleren hydraulischen Pressungen auf die Flächeneinheit gegen die Querschnitte Ω' und Ω'',
p der atmosphärische Druck gegen die Flächeneinheit,
w das Gewicht einer Volumeinheit des Wassers.

Man erkennt ohne Schwierigkeit, daß auch für den gegenwärtigen Fall die allgemeine Gleichung (659) Gültigkeit behält, daß man also

$$p' - p'' + w(Z'' - Z') = \frac{w}{2g} V^2 \left(\frac{A^2}{m^2 \Omega''^2} - \frac{A^2}{\Omega'^2}\right) \quad \ldots . \; (672)$$

hat. Hierin ist zu setzen

$$p' = p + wZ',$$

ferner wie in §. 153,

$$p'' = p + \frac{1}{2} w \frac{c'^2}{C};$$

außerdem

$$Z'' = \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} (\zeta - D)$$

und

$$\Omega'' = b(\zeta - D), \; \Omega' = x\zeta.$$

Dies ergibt

$$\zeta - D - \frac{c'^2}{\zeta - D} = \frac{A^2 V^2}{g} \left(\frac{1}{m^2 b^2 (\zeta - D)^2} - \frac{1}{x\zeta}\right) \quad \ldots . \; (673)$$

oder da AV = Q ist,

$$\zeta - D - \frac{c'^2}{\zeta - D} = \frac{Q^2}{g} \left(\frac{1}{m^2 b^2 (\zeta - D)^2} - \frac{1}{x^2 \zeta^2}\right) \quad \ldots . \; (674)$$

In dieser Gleichung ist eigentlich x eine Funktion von ζ, welche zuvörderst substituirt werden muß, ehe die Auflösung für ζ vorgenommen werden kann; jedoch wird man in allen praktischen Fällen x als konstant ansehen und für dieselbe die mittlere

horizontale Breite des Stromes substituiren können. Auch wird man die vorstehende Gleichung näherungsweise dadurch auflösen können, daß man zuvörderst in dem Gliede $\frac{1}{x^2 \zeta^2} = \frac{1}{\Omega'^2}$ statt des aufgestaueten Querschnittes $\Omega' = x\zeta$ den natürlichen Querschnitt $A = x\mathrm{H}$ substituirt und darauf die Gleichung

$$(\zeta - \mathrm{D})^3 + \frac{\mathrm{Q}^2}{g x^2 \mathrm{H}^2} (\zeta - \mathrm{D})^2 - c'^2 (\zeta - \mathrm{D}) - \frac{\mathrm{Q}^2}{g m^2 b^2} = o \quad \ldots . (675)$$

für $(\zeta - \mathrm{D})$ auflös't. Wenn man nach dieser Auflösung einen noch genaueren Werth für ζ kennen lernen will; so kann man in dem zweiten Gliede auf der linken Seite statt H den für ζ gefundenen Werth substituiren und alsdann die Gl. (675) noch einmal für $(\zeta - \mathrm{D})$ auflösen.

Was den Werth des in den vorstehenden Gleichungen vorkommenden Kontraktionskoeffizienten m betrifft; so kann man für denselben, wenn die Seiten und die Sohle der Überfallöffnung durch ziemlich dünne Wände gebildet sind und die Kontraktion rings herum stattfindet, im Durchschnitt

$$m = 0{,}58$$

setzen.

Erstreckt sich die Sohle F des Überfalles durch die ganze Breite des Stromes, sodaß an den Seiten keine Kontraktion stattfindet und man $b = x$ hat; so kann man im Durchschnitte

$$m = 0{,}63$$

annehmen.

Diese Werthe des Koeffizienten m sind aus der Betrachtung der in §. 93 angegebenen Durchschnittswerthe des dortigen Ausflußkoeffizienten α hergeleitet, welcher der Gl. (368) ein Genüge leistet.

§. 155. Fall, wo der Querschnitt des Stromes, wie bei Brückenöffnungen, nur von den Seiten eingeengt ist.

Wenn die Sohle F des Überfalles mit der Sohle M des Flußbettes zusammenfällt, sodaß die Kontraktion auf dem Grunde des Flußbettes unterdrückt wird und nur an den Seiten stattfin-

det; so hat man in den Gleichungen des vorhergehenden Paragraphs $D = o$ und $c' = H$ zu setzen. Hierdurch erhält man aus Gl. (674)

$$\zeta^3 - H^2\zeta - \frac{Q^2}{g}\left(\frac{1}{m^2 b^2} - \frac{1}{x^2}\right) = o \qquad \ldots . (676)$$

Wenn die Seiten der verengten Öffnung bei MN in dem letzteren Falle durch die Kanten dünner Wände gebildet werden; so kann man in dieser Gleichung im Mittel

$$m = 0{,}65$$

nehmen.

Bestehen diese Seiten jedoch aus parallelen Wänden, welche auf eine gewisse Strecke in der Richtung des Stromes fortlaufen, wie bei Gerinnen und namentlich bei Öffnungen der Brücken mit massiven Pfeilern; so hat man nach Navier bei Brückenöffnungen durchschnittlich:

wenn sich die Pfeiler in Halbkreisen oder spitzen Winkeln endigen, $m = 0{,}95$;

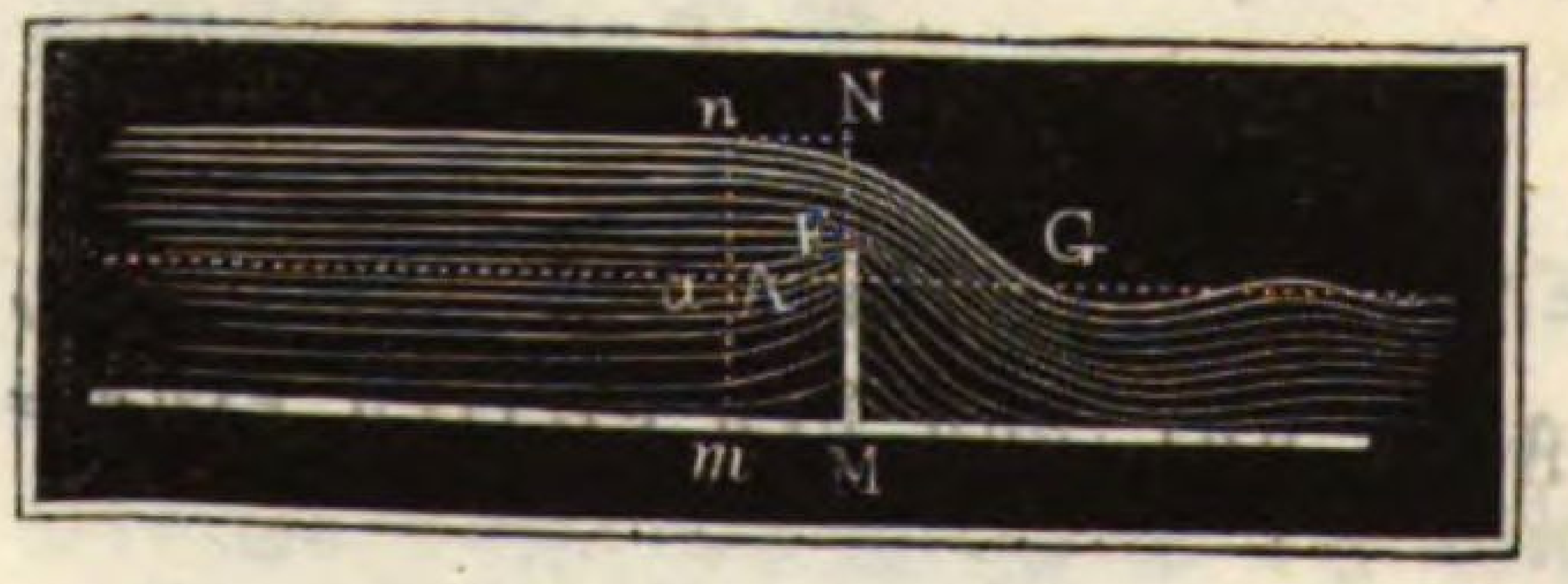
wenn sie sich in stumpfen Winkeln endigen, $m = 0{,}9$;

wenn sie sich rechtwinklig endigen, bei großen Brückenöffnungen, $m = 0{,}85$;

in den ungünstigsten Fällen, d. h. bei kleinen Brückenweiten und wenn die Anfänge der Gewölbe in das Wasser tauchen, $m = 0, 7$.

§. 156. Fall, wo der Spiegel des Unterwassers tiefer liegt, als die Sohle des Überfalles.

In diesem Falle, wo der Punkt F höher liegt, als A, und wo sich der Strom über den Überfall hinweg ungehindert in die freie Luft ergießt, hat man in den Gleichungen des §s 154 $c' = o$ zu setzen. Dies gibt statt Gl. (674)



$$\zeta - D = \frac{Q^2}{g}\left(\frac{1}{m^2 b^2 (\zeta - D)^2} - \frac{1}{x^2 \zeta^2}\right) \qquad \ldots . (677)$$

und statt Gl. (675)

$$(\zeta - D)^3 + \frac{Q^2}{g x^2 H^2}(\zeta - D)^2 - \frac{Q^2}{g m^2 b^2} = o$$

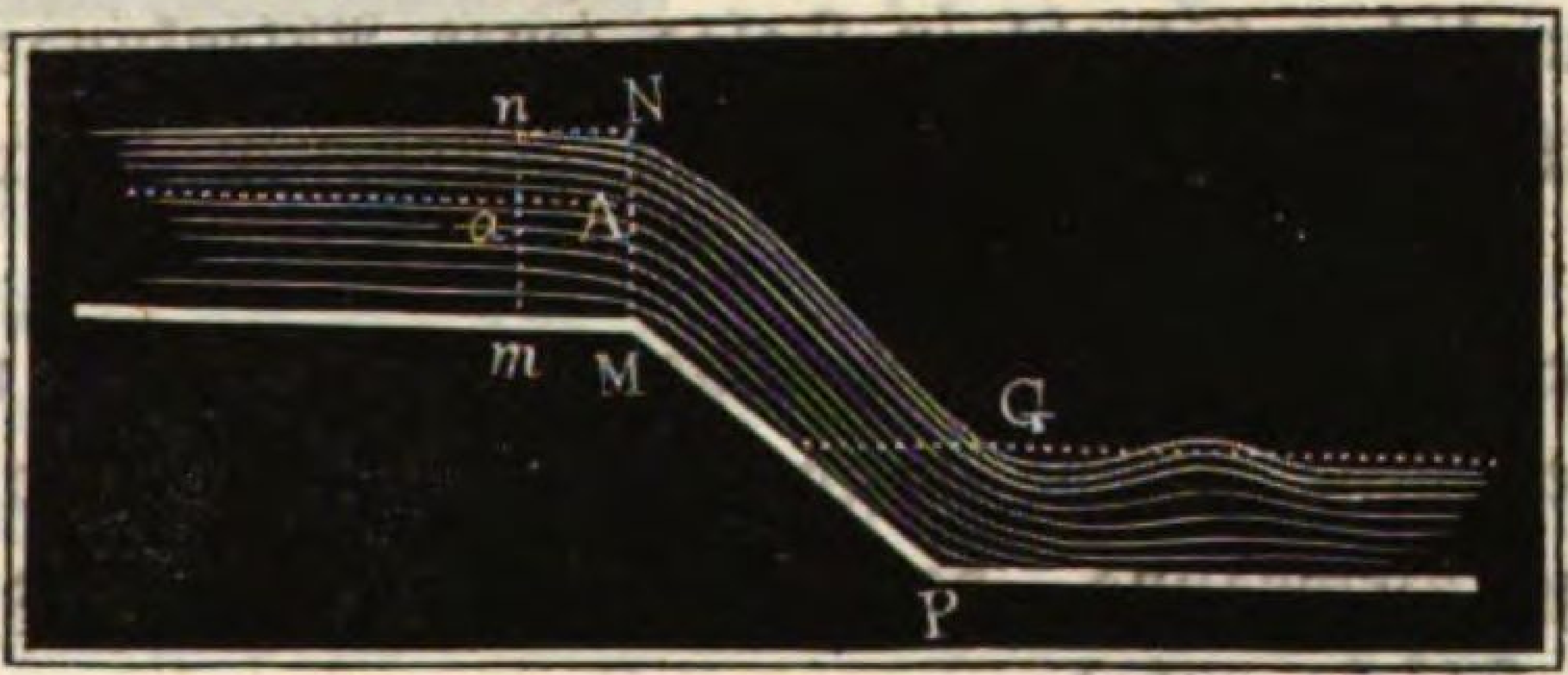
oder auch

$$\left(\frac{1}{\zeta - D}\right)^3 - \frac{m^2 b^2}{x^2 H^2}\left(\frac{1}{\zeta - D}\right) + \frac{g m^2 b^2}{Q^2} = o, \quad \ldots . (678)$$

auf welche letztere Gleichung hinsichtlich ihrer Auflösung dieselben Bemerkungen zu machen wären, welche bereits bei Gl. (675) angeführt sind.

Der Koeffizient m hat auch hier, wie in §. 154 resp. den mittleren Werth 0,58 oder 0,63, jenachdem die Kontraktion an beiden Seiten und auf der Sohle oder nur auf der Sohle des Überfalles stattfindet.

Wäre der Querschnitt MN des Stromes nur von den Seiten her verengt; so müßte, wenn der Spiegel G des Unterwassers tiefer liegen sollte, als die Sohle jenes Querschnittes, bei



MP plötzlich ein stärkeres Gefälle in der Sohle des Flußbettes eintreten, was sich auch bei verschiedenen Wasserleitungen vorfindet. Man hätte alsdann neben der Substitution von $c' = o$ noch $D = o$ zu setzen, wodurch sich die Gl. (674) oder (677) auf

$$\zeta^3 = \frac{Q^2}{g}\left(\frac{1}{m^2 b^2} - \frac{1}{x^2}\right)$$

oder auf

$$\zeta = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g}\left(\frac{1}{m^2 b^2} - \frac{1}{x^2}\right)} \quad \ldots . (679)$$

reduzirt.

Der Werth des Koeffizienten m in dieser Gleichung ist, wenn

die Seiten des verengten Querschnittes in dünne Wände eingeschnitten sind, im Mittel

$$m = 0{,}65,$$

wie schon in §. 155 angegeben.

Vom Stoße eines isolirten Strahles einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit.

§. 157. Allgemeine Betrachtungen über den Stoß eines flüssigen Strahles gegen einen starren Körper.

Wir setzen einen flüssigen Strahl voraus, dessen Geschwindigkeit und Richtung in irgend einem Punkte bekannt und auch konstant sind, sodaß derselbe in gleichen Zeiten stets dieselbe Flüssigkeitsmenge liefert. Dieser Strahl trifft gegen die Oberfläche eines starren Körpers und ändert in demselben Augenblicke seine Richtung und seine Geschwindigkeit. Die vorliegende Aufgabe besteht nun darin, die Pressungen zu bestimmen, welche ein solcher kontinuirlicher Strahl in Folge jener Ablenkungen und Geschwindigkeitsveränderungen auf den gestoßenen Körper hervorbringt.

Um die Aufgabe möglichst allgemein zu halten, nehmen wir an, die gestoßene Fläche besitze eine gegebene geradlinige und gleichförmige Bewegung, deren Werth gleich null zu setzen ist, sobald diese Fläche ruhet.

Für die Praxis sind besonders zwei Fälle des Stoßes eines flüssigen Strahles von Wichtigkeit, auf welche wir die nachfolgenden Untersuchungen beschränken werden, nämlich

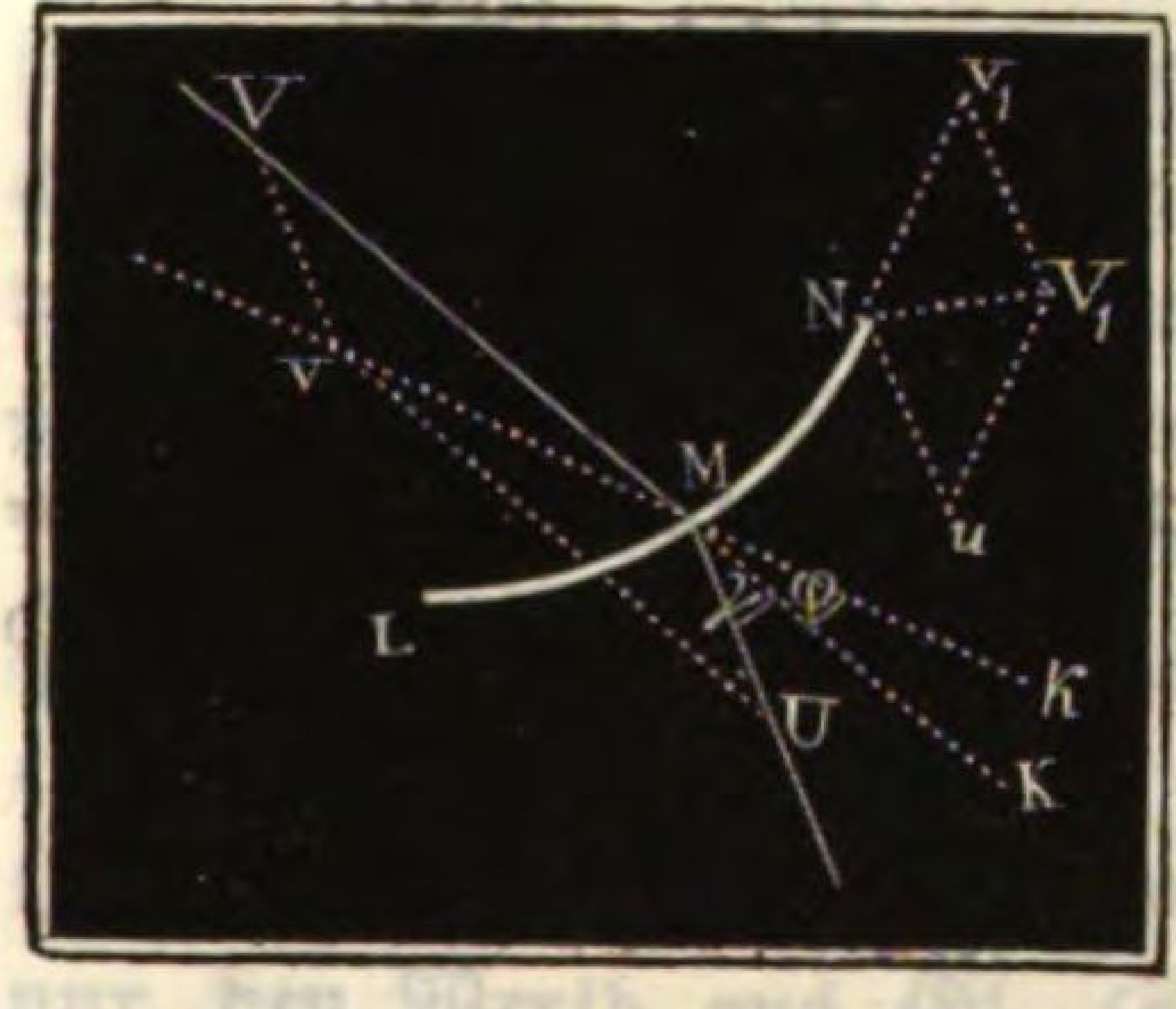
1) der Fall, wo die gegen die starre Fläche treffende Flüssigkeit gezwungen wird, ihre ganze relative Geschwindigkeit in Beziehung zu der der Fläche zu verlieren und der Bewegung der letzteren genau zu folgen;
2) der Fall, wo die Flüssigkeit nach ihrem Zusammentreffen mit der Fläche längs derselben ohne Hemmung hingleitet, und die Fläche mit einer relativen Geschwindigkeit verläßt, welche der relativen Eintrittsgeschwindigkeit an Größe gleich ist.

In beiden Fällen wird, wie schon erwähnt, allgemein vorausgesetzt, daß sich die gestoßene Fläche in irgend einer geradlini-

gen gleichförmigen Bewegung befinde, welche auch gleich null sein könne. Diese relative Bewegung der Fläche in Beziehung zu der der Flüssigkeit kann jedoch, ohne der Allgemeinheit der Aufgabe Abbruch zu thun, bei den späteren Untersuchungen außer Acht gelassen werden, wenn man dabei Folgendes berücksichtigt.

Es sei

V die absolute Geschwindigkeit VM, mit welcher der flüssige Strahl in der Richtung VM gegen die starre Fläche LMN trifft,



U die absolute Geschwindigkeit MU, mit welcher sich diese Fläche in der Richtung MU fortbewegt,

γ der Winkel KMU, welchen die Verlängerung von VM mit der Richtung MU einschließt, oder welchen die positiven Richtungen der beiden absoluten Geschwindigkeiten V und U miteinander bilden,

v die relative Geschwindigkeit vM des eintretenden Strahles in Beziehung zu der der Fläche,

φ der Winkel kMK oder VMv, welchen die positiven Richtungen der Geschwindigkeiten V und v miteinander einschließen,

v_1 die relative Geschwindigkeit Nv_1, mit welcher die Flüssigkeit die Fläche verläßt,

V_1 die absolute Geschwindigkeit NV_1, mit welcher die Flüssigkeit die Fläche verläßt,

δ der Winkel v_1Nu zwischen den positiven Richtungen der letzteren beiden Geschwindigkeiten.

Offenbar wird an dem mechanischen Zustande des ganzen vorliegenden Systemes und an dem Gesetze, welchen die darauf angebrachten Kräfte unterworfen sind, Nichts geändert, wenn man sich denkt, allen Theilen desselben würde Ein und dieselbe einer gemeinschaftlichen Richtung parallele gleichförmige Geschwindigkeit mitgetheilt. Nehmen wir aber an, diese Geschwindigkeit sei der Geschwindigkeit U der starren Fläche LMN an Größe gleich und an Richtung direkt entgegengesetzt; so erhalten wir dadurch ein System, in welchem die Fläche LMN ruhet, wäh-

rend alle übrigen Theile diejenigen Geschwindigkeiten annehmen, welche man die **relativen** in Beziehung zu jener Fläche nennt. Hieraus folgt, daß die relative Geschwindigkeit v der eintretenden Flüssigkeit durch die Diagonale vM des Parallelogrammes dargestellt wird, welches in obiger Figur über der Geschwindigkeit $VM = V$ der eintretenden Flüssigkeit und der entgegengesetzten Geschwindigkeit $UM = U$ der Fläche LMN entworfen ist. Zur Bestimmung der Größe und der Lage jener relativen Geschwindigkeit findet man hiernach leicht die Beziehungen

$$v = \sqrt{V^2 + U^2 - 2\,V\,U\cos\gamma} \quad \ldots . \;(680)$$

und

$$\sin\varphi = \frac{U\sin\gamma}{v} \quad \ldots . \;(681)$$

Für den Fall, daß sich die starre Fläche in derselben Richtung VM der einfallenden Flüssigkeit bewegt, hat man $\gamma = o$ und

$$\left.\begin{array}{l} v = V - U \\ \varphi = o \end{array}\right\} \quad \ldots . \;(682)$$

Bewegte sich dagegen die starre Fläche der einfallenden Flüssigkeit direkt entgegen; so hätte man $\gamma = 180^o$, also

$$\left.\begin{array}{l} v = V + U \\ \varphi = o \end{array}\right\} \quad \ldots . \;(683)$$

Befände sich die Fläche im Zustande der Ruhe; so hätte man $U = o$, also

$$\left.\begin{array}{l} v = V \\ \varphi = o \end{array}\right\} \quad \ldots . \;(684)$$

Ist nun $Nv_1 = v_1$ die relative Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit die Fläche bei N verläßt, ferner $Nu = U$ die absolute Geschwindigkeit dieser Fläche; so stellt die Diagonale NV_1 des Parallelogrammes v_1Nu die absolute Geschwindigkeit V_1 dar, welche die Flüssigkeit besitzt, sobald sie die Fläche wieder verlassen hat, und es ergibt sich zur Bestimmung der letzteren absoluten Geschwindigkeit

$$V_1 = \sqrt{v_1^2 + U^2 + 2\,v_1\,U\cos\delta} \quad \ldots . \;(685)$$

Für den ersteren der beiden oben bezeichneten Fälle, welche weiter unten erörtert werden sollen, hat man

$$v_1 = o \text{ also } V_1 = U,$$

und für den zweiten hat man

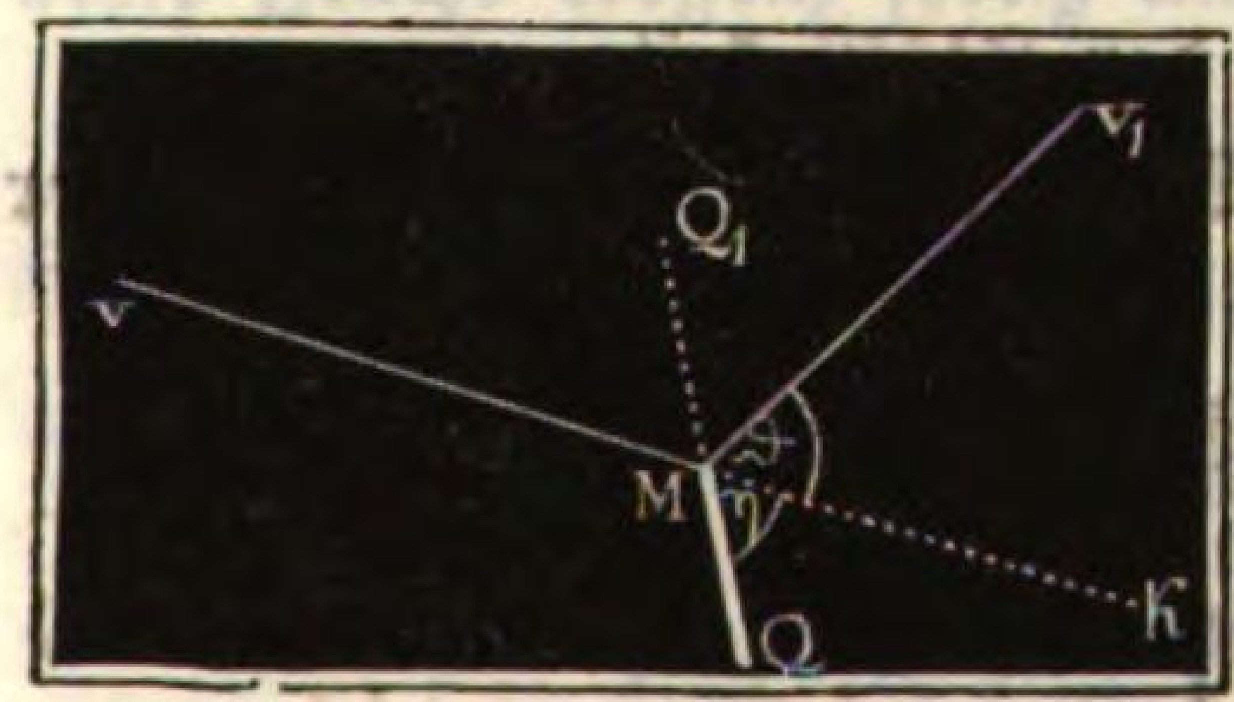
$$v_1 = v = \sqrt{V^2 + U^2 - 2VU\cos\gamma},$$

also

$$V_1 = \sqrt{v^2 + U^2 + 2vU\cos\delta}.$$

Aus dem Vorstehenden erkennt man, daß es nur nothwendig sein wird, im Folgenden die beiden Fälle zu betrachten, in welchen stets die starre Fläche LMN als ruhend gedacht wird, während die Flüssigkeit mit der absoluten Geschwindigkeit $v = vM$ eintritt, und im ersten Falle alle Geschwindigkeit verliert, sodaß $v_1 = o$ ist, und im zweiten Falle mit der Geschwindigkeit $v_1 = v$ wieder austritt. Falls sich dann die starre Fläche LMN ebenfalls bewegen sollte; so stellt v und v_1 resp. die relative Ein- und Austrittsgeschwindigkeit dar, und man braucht für v nur den Werth aus Gl. (680) zu substituiren, wenn man die Resultate als Funktionen der absoluten Geschwindigkeiten V und U darstellen will.

Um jetzt die Wirkung zu bestimmen, welche sich äußert, wenn irgend eine Masse m, die sich mit der Geschwindigkeit v in der Richtung vM bewegt, plötzlich oder in der unendlich kleinen Zeit dt ihre Richtung und Geschwindigkeit dergestalt ändern soll, daß sie nach dem Stoße in der Richtung Mv_1 mit der Geschwindigkeit v_1 fortschreitet; so hat man in §. 121 gesehen, daß alsdann in dem Punkte M, wo der Stoß erfolgt, ein Widerstand Q in der Richtung QM geleistet werden muß, oder daß die Masse m in direkt entgegengesetzter Richtung Q_1M gegen die feste Widerlage einen Druck Q_1 ausüben muß, dessen Größe und Richtung durch die Gleichungen (531) dargestellt ist.



Der ebenerwähnte und in §. 121 näher erörterte Fall entspricht der vorliegenden Aufgabe umso mehr, je kleiner die Aus-

dehnung der starren Fläche ist, gegen welche der flüssige Strahl trifft, und durch welche derselbe aus seiner früheren Richtung abgelenkt wird, weil alsdann desto eher der Zeitraum, in welchem diese Veränderungen erfolgen, als ungemein klein, und der Ort, in welchem sie sich ereignen, als ein Punkt M angesehen werden kann, und weil außerdem die Wirkung der übrigen auf den Strahl angebrachten Kräfte, z. B. der Schwere, als verschwindend klein gegen die plötzlich auftretenden Stoßkräfte während der Dauer des Stoßes vernachlässigt werden darf.

Ist hiernach

v die relative Geschwindigkeit des Strahles in der Richtung vM vor dem Stoße gegen die starre Fläche in Beziehung zu der eigenen Bewegung dieser Fläche,

v_1 die relative Geschwindigkeit desselben in der Richtung Mv_1 nach dem Stoße,

ϑ der Winkel v_1Mk, welchen die positive Richtung dieser beiden Geschwindigkeiten miteinander einschließen,

Q der stetige Druck, welcher sich in der Richtung Q_1M im Punkte M gegen die feste Widerlage in Folge des Stoßes äußert,

η der Winkel kMQ, welchen die positiven Richtungen der relativen Eintrittsgeschwindigkeit v mit der positiven Richtung des Druckes Q einschließt,

V die absolute Geschwindigkeit des Strahles vor dem Stoße, welche $=v$ ist, sobald die gestoßene Fläche ruhet,

Ω der normale Querschnitt des Strahles,

w das Gewicht einer Volumeinheit der Flüssigkeit,

g die Geschwindigkeit, welche die Schwere den Körpern in der Zeiteinheit mittheilt;

so hat man nach den Gleichungen (531) allgemein

$$\left.\begin{aligned} Q\cos\eta &= m\,.\,\frac{v - v_1\cos\vartheta}{dt}, \\ Q\sin\eta &= m\,.\,\frac{v_1\sin\vartheta}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (686)$$

Um die Masse m der Flüssigkeit zu bestimmen, welche in der Zeit dt gegen die starre Fläche trifft, muß hierbei zuvörderst auf

zwei verschiedene Fälle aufmerksam gemacht werden. Einmal auf den, wo Ein und dieselbe Fläche, welche fortwährend die sukzessiven Stöße empfängt, mit ihrer absoluten Geschwindigkeit U ins Unendliche fortschreitet, und sich demgemäß immer weiter von der Ausflußöffnung des Strahles entfernt, oder sich dieser Öffnung immer mehr nähert; zweitens auf den, wo die starre Fläche fortwährend in demselben Orte des Raumes oder in demselben Abstande von der Ausflußöffnung des Strahles gedacht wird, was natürlich, wenn ihr selbst eine absolute Bewegung zukommen soll, nur dann möglich ist, wenn man das ganze System nur während eines ungemein kurzen Zeitraumes dt betrachtet und annimmt, daß der Strahl in Intervallen von der Dauer dt immer kleine auf Einen Punkt konzentrirte Quantitäten von der Masse m entsende, oder auch, wenn man sich denkt, die Fläche werde sofort, nachdem sie den Stoß der Masse m empfangen hat, durch eine andere gleiche Fläche ersetzt, welche sich immer wieder in dem anfänglichen Orte des Raumes befindet, wie Dies z. B. nahezu bei den Schaufeln eines Wasserrades stattfindet, welche sukzessive den Stoß des einfallenden Wassers an derselben Stelle empfangen, obgleich sie selbst in Bewegung begriffen sind.

Es leuchtet ein, daß der Strahl in der Zeit dt überhaupt eine Quantität der Flüssigkeit von dem Volum $\Omega V dt$ oder von der Masse $\frac{w}{g}\Omega V dt$ liefert. Diese Masse würde, wenn die starre Fläche ganz in Ruhe wäre, während der Zeit dt gegen diese Fläche treffen, sodaß man alsdann $m = \frac{w}{g}\Omega V dt$ hätte.

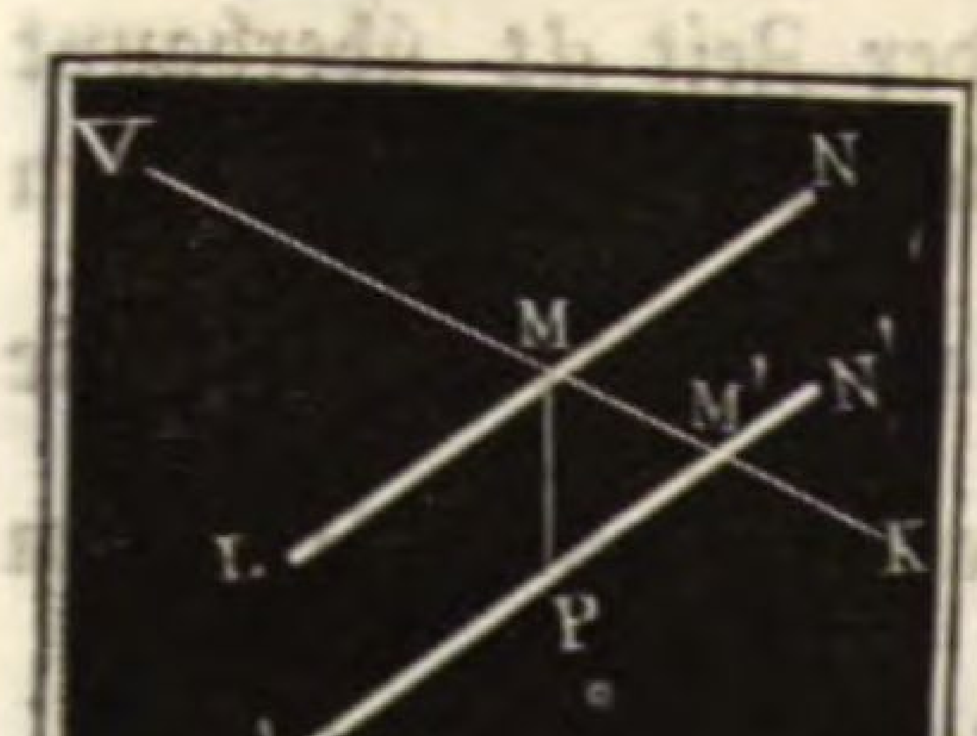
Dasselbe würde auch bei einer bewegten Fläche noch stattfinden, wenn man sich denkt, der Strahl lieferte in Intervallen von der Dauer dt immer eine Masse $= \frac{w}{g}\Omega V dt$, welche mit Einem Male die Fläche erreichte, wobei man denn das ganze System nur während Eines solchen Intervalles betrachtete, oder auch dann noch, wenn man annähme, die gestoßene Fläche würde augenblicklich, sowie sie sich unmerklich wenig mit der ihr eigenen Geschwindigkeit fortbewegt hätte, durch eine neue gleiche Fläche ersetzt, welche sofort statt der früheren betrachtet würde. Eine solche Annahme entspricht dem zweiten der beiden obigen Fälle,

für welchen man also ebenfalls $= \frac{w}{g} \Omega V dt$ hat. Hierdurch werden die beiden Gleichungen (686)

$$\left.\begin{aligned} Q \cos\eta &= \frac{w}{g} \Omega V (v - v_1 \cos\vartheta), \\ Q \sin\eta &= \frac{w}{g} \Omega V v_1 \sin\vartheta. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (687)$$

In dem ersten der beiden obigen Fälle jedoch, wo die starre Fläche mit der ihr zukommenden absoluten Geschwindigkeit ins Unendliche fortschreitet und dabei immer dem Stoße Ein und desselben Strahles ausgesetzt ist, nimmt die in dem Zeitraume dt auf dieselbe treffende flüssige Masse m einen von dem vorstehenden verschiedenen Werth an, der sich durch folgende Betrachtung ergibt, wobei übrigens der Einfachheit wegen die gestoßene Fläche LMN als eine Ebene vorausgesetzt ist.

Angenommen, die ebene Fläche LMN, welche sich mit der Geschwindigkeit U in der Richtung MP fortbewegt und dem Stoße des Strahles VM ausgesetzt ist, befinde sich nach Verlauf der Zeit dt in der Lage L'M'N', sodaß $MP = U dt$ ist. Ist nun der Winkel PMM' wie vorhin $= \gamma$ und der Winkel $VML = MM'P = \beta$; so ist $MM' = \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta} U dt$. Wäre nun die



Bewegung des Strahles nicht durch die Fläche aufgehalten worden; so würde sich sein Endpunkt K am Ende derselben Zeit in dem Abstande $MK = V dt$ von M befunden haben. Hieraus folgt, daß nur die der Länge $M'K = \left[V - \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta} U\right] dt$ des Strahles entsprechende flüssige Masse zum Stoße gekommen ist, während die der Länge $MM' = \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta} U dt$ entsprechende Masse ungehindert geblieben ist und nur die Verlängerung des Strahles VM bildet. Demnach würde man für diesen Fall

$$m = \frac{w}{g}\,\Omega\left[V - \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta}U\right]dt$$

in die Gleichungen (686) zu substituiren haben. Bewegte sich unter solchen Umständen die Fläche mit dem Strahle in derselben Richtung, sodaß man $\gamma = o$ hätte; so würde

$$m = \frac{w}{g}\,\Omega\,(V-U)\,dt$$

werden, und bewegte sich die Fläche dem Strome direkt entgegen, sodaß man $\gamma = 180^o$ hätte; so würde

$$m = \frac{w}{g}\,\Omega(V+U)\,dt$$

werden, wobei resp. $(V-U)$ oder $(V+U)$ die relative Geschwindigkeit v des Strahles in Beziehung zu der Fläche darstellen würde. Die letztere Formel würde z. B. dann Anwendung finden, wenn der Strahl absolut in Ruhe, also $V=o$ wäre, und die Fläche sich mit der Geschwindigkeit U in der Richtung MV bewegte. Man würde alsdann ebenso

$$m = \frac{w}{g}\,\Omega U\,dt$$

haben, wie wenn die Fläche ruhete, und der Strahl sich mit der Geschwindigkeit U in der Richtung VM bewegte.

Da übrigens das System in der letzteren Art und Weise, wo sich die den Stoß empfangende Fläche ins Unbestimmte fortbewegt, nur höchst selten eine praktische Bedeutung gewinnen könnte; so werden wir uns im Folgenden vorzugsweise mit dem anderen Systeme beschäftigen, wo die Fläche, wenn sie nicht ruhet, augenblicklich durch eine neue ersetzt wird, sodaß dieselbe, obgleich sie in Bewegung begriffen ist, doch immer nur in Ein und demselben Orte des Raumes betrachtet wird. Auf ein solches System finden alsdann immer nur die Gleichungen (687) Anwendung.

§. 158. Stoß eines flüssigen Strahles gegen eine bewegte Fläche, wenn derselbe bei dem Stoße seine ganze relative Geschwindigkeit in Beziehung zur Fläche verliert.

Unter Beibehaltung sämmtlicher Bezeichungen des vorhergehenden Paragraphs hat man die relative Austrittsgeschwindigkeit des Strahles gleich null, also $v_1 = o$ zu setzen. Dies ergibt wegen der Gleichungen (687)

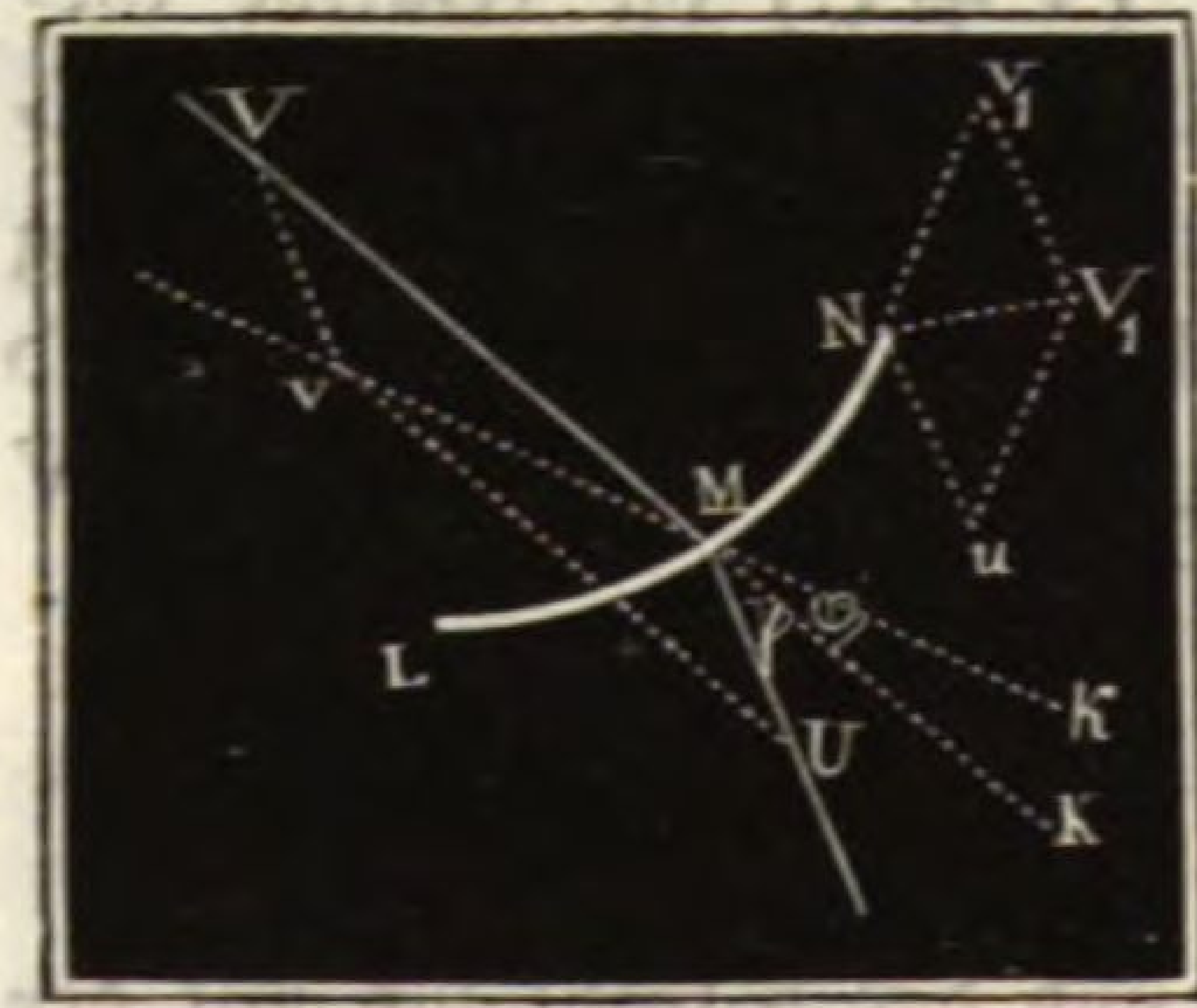
$$Q \cos \eta = \frac{w}{g} \Omega V v,$$

$$Q \sin \eta = o,$$

also

$$\left. \begin{array}{l} \eta = o \\ Q = \frac{w}{g} \Omega V v \end{array} \right\} \quad \ldots \ldots (688)$$

Die Fläche hat also in der Richtung vM der relativen Eintrittsgeschwindigkeit des Strahles einen Druck Q auszuhalten, welcher durch die vorstehende Formel dargestellt ist. Substituirt man darin für v seinen Werth aus Gl. (680); so erhält man den Druck Q als Funktion der absoluten Geschwindigkeiten V des Strahles und U der Fläche. Durch Gl. (681) ist alsdann ferner die Richtung zu bestimmen, in welcher sich der Druck Q äußert.



Der vorstehende Fall findet Anwendung bei der Beurtheilung der Wirkung des Stoßes eines flüssigen Strahles gegen die Schaufeln eines vertikalen Wasserrades. Wenn sich hierbei die Schaufel genau in der Richtung des einfallenden Wassers bewegt; so hat man nach Gl. (682) $v = V - U$ und demnach

$$Q = \frac{w}{g} \Omega V (V - U) \quad \ldots \ldots (689)$$

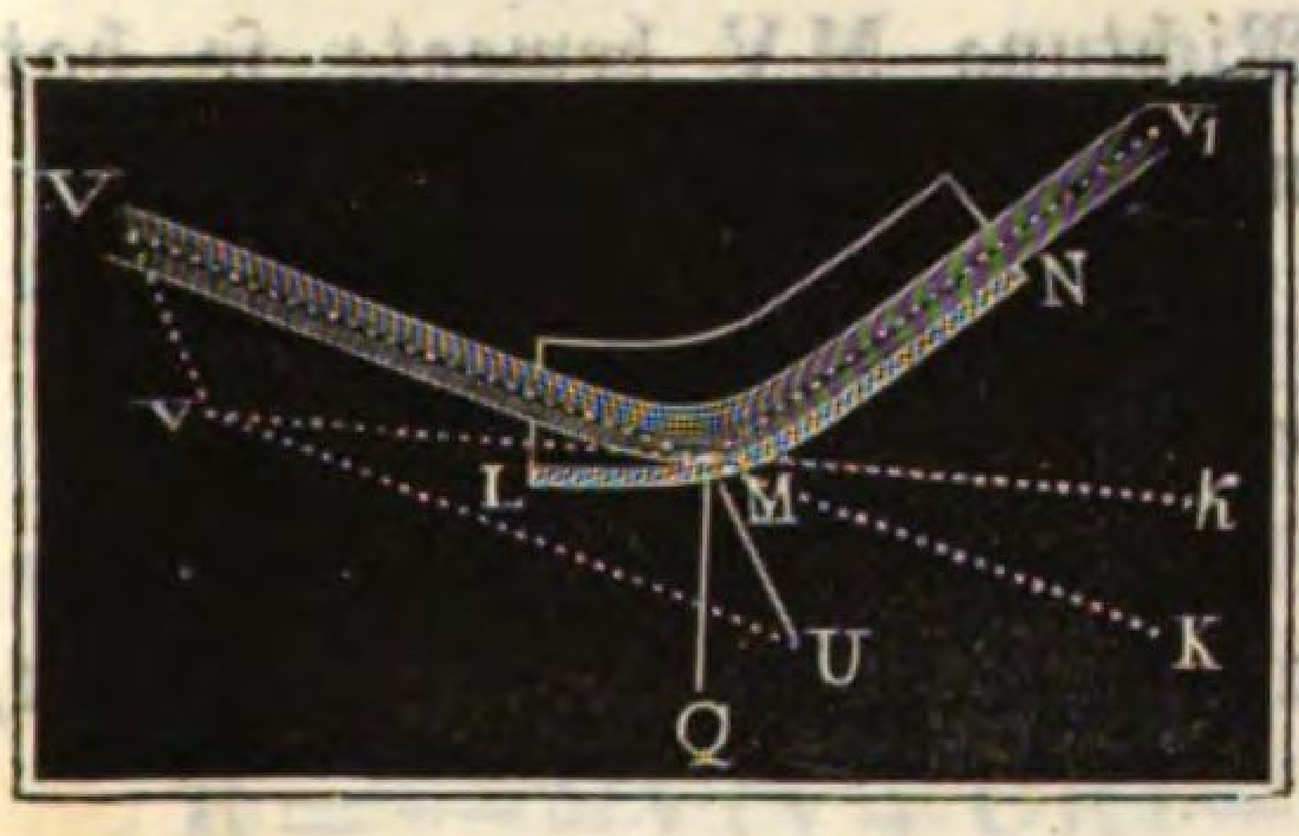
Wenn die Fläche ruhet, also $U = o$ und $v = V$ ist; so hat man

$$\left. \begin{array}{l} Q = \frac{w}{g} \Omega V^2 \\ \text{oder auch} \\ Q = 2 w \Omega H, \end{array} \right\} \quad \ldots \ldots (690)$$

worin H die der Geschwindigkeit V zukommende Fall- oder Druckhöhe darstellt. Dieser in der Richtung des Strahles sich äußernde Druck ist also gleich dem doppelten Gewichte einer Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt gleich dem des Strahles und deren Höhe gleich der Druckhöhe ist.

§. 159. Stoß eines flüssigen Strahles gegen eine bewegte Fläche, durch welche derselbe in einer gewissen Richtung abgelenkt wird, an der Fläche hingleitet und mit seiner relativen Eintrittsgeschwindigkeit auch wieder austritt.

Der Strahl VM trete mit der relativen Geschwindigkeit $v\mathrm{M} = v$ gegen die Fläche LMN, welche an den Seiten mit Rändern versehen ist, sodaß sich der Strahl nur nach Einer Seite herum biegen kann und bei N mit der relativen Geschwindigkeit $v_1 = v$, welche allen austretenden Massentheilchen sowol der Größe, wie der Richtung nach gleich sei, wieder austritt.



Ist nun der Neigungswinkel zwischen den positiven Richtungen der Geschwindigkeiten v und v_1, wie in §. 157, gleich ϑ, ferner der Neigungswinkel kMQ der Geschwindigkeit v gegen die Richtung des Druckes Q, wie vorhin, gleich η; so hat man nach den Gleichungen (687)

$$\left.\begin{aligned} Q\cos\eta &= \frac{w}{g}\,\Omega V v\,(1-\cos\vartheta), \\ Q\sin\eta &= \frac{w}{g}\,\Omega V v \sin\vartheta, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (691)$$

woraus

$$Q = \frac{w}{g}\,\Omega V v \sqrt{2(1-\cos\vartheta)} \quad \ldots\ldots (692)$$

und

$$\operatorname{tang}\eta = \frac{\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta} = \cot\frac{\vartheta}{2} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(180^0 - \vartheta)$$

$$\text{alſo } \eta = 90^0 - \frac{\vartheta}{2} \quad \ldots\ldots (692^a)$$

folgt. Aus dem letzteren Werthe des Winkels $kMQ = \eta$ ist leicht zu erkennen, daß die Richtung MQ des Druckes Q genau den Winkel vMv_1 halbirt, welcher zwischen der negativen Richtung der Einen und der positiven Richtung der anderen der beiden Geschwindigkeiten v und v_1 liegt.

Der vorstehende Fall würde eine Anwendung finden auf den Stoß des Wassers gegen die Schaufeln der horizontalen Wasserräder, wenn man diese Schaufeln, wie bei Turbinen, als sehr klein voraussetzt, sodaß die Wirkung der Schwere vernachlässigt werden kann, welche sich beim Fortgleiten des Wassers längs der Schaufeln bemerklich macht.

Wenn sich die gestoßene Fläche in der Richtung VM des Strahles bewegt; so hat man $v = V - U$, und wenn sich diese Fläche in direkt entgegengesetzter Richtung MV bewegt; so hat man $v = V + U$. Für diese beiden Fälle ergibt sich resp.

$$Q = \frac{w}{g} \Omega V (V \mp U) \sqrt{2(1 - \cos\vartheta)} \quad \ldots . (693)$$

und η stellt den Winkel KMQ dar. Wäre die Fläche in Ruhe, also $U = o$; so würde

$$Q = \frac{w}{g} \Omega V^2 \sqrt{2(1 - \cos\vartheta)}$$

sein.

Wenn man in den letzteren Fällen, in welchen die Richtungen von vM und VM zusammenfallen, den in der Richtung MQ sich äußernden Druck Q in seine zwei Komponenten P und S zerlegt, von welchen die erstere parallel zum Strahle VM und die letztere perpendikular zu dieser Richtung geneigt ist; so heißt P der Parallelstoß und S der Seitenstoß des Strahles. Da nun für diese Fälle Winkel $KMQ = kMQ = \eta$ ist; so hat man

$$P = Q\cos\eta \text{ und } S = Q\sin\eta,$$

d. i. unter Berücksichtigung der Werthe für $Q\cos\eta$ und $Q\sin\eta$ aus den Gleichungen (691)

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{w}{g} \Omega V (V \mp U)(1 - \cos\vartheta) \\ S &= \frac{w}{g} \Omega V (V \mp U) \sin\vartheta \end{aligned} \right\} \quad \ldots . (694)$$

Wäre das Stück MN der Fläche LMN eben, und zerlegte man den Druck Q in zwei Komponenten N und R, von welchen die erstere auf der Ebene MN normal steht, während die letztere zu NM parallel ist; so nennt man die erstere Komponente den Normalstoß gegen die fragliche Ebene MN. Da nun der Winkel $v_1 MQ = \vartheta + \eta$ ist; so hat man

$$N = Q \sin(\vartheta + \eta) = Q \sin\vartheta \cos\eta + Q \cos\vartheta \sin\eta.$$

Berücksichtigt man hierbei die Werthe von $Q\cos\eta$ und $Q\sin\eta$ aus den Gleichungen (691); so kommt

$$N = \frac{w}{g}\Omega V(V \mp U)\sin\vartheta) \quad \ldots \text{(695)}$$

Die zweite Komponente R des Druckes Q parallel zur Ebene NM ist

$$R = Q\cos(180^0 - \vartheta - \eta) = -Q\cos\vartheta\cos\eta + Q\sin\vartheta\sin\eta$$

oder wegen der Gleichungen (691)

$$R = \frac{w}{g}\Omega V(V \mp U)(1 - \cos\vartheta) \quad \ldots \text{(695}^a\text{)}$$

Da man schon aus Gl. (692ª) wußte, daß die Linie MQ den Winkel vMv_1 oder hier VMv_1 halbirte; so hätte man schon im voraus übersehen können, daß der Druck N=S und der Druck R=P werden mußte.

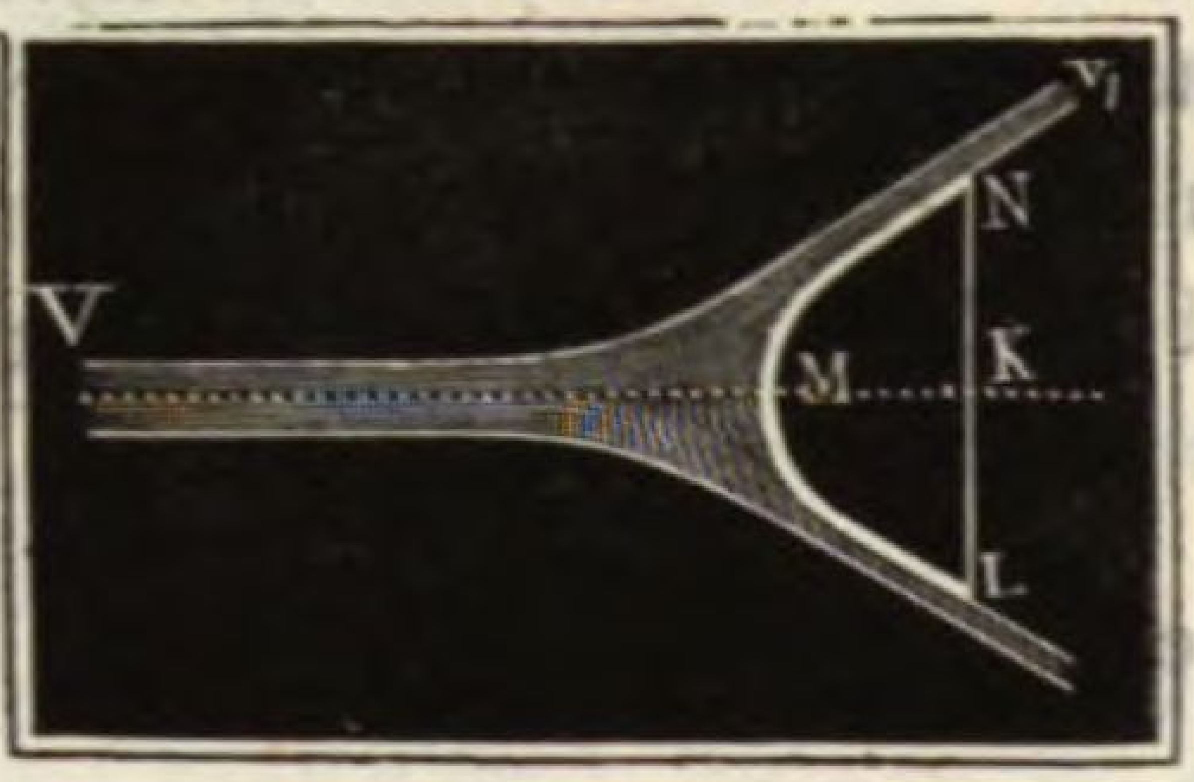
In den letzteren Gleichungen ist resp. das obere Zeichen — oder das untere Zeichen + zu nehmen, jenachdem sich die Fläche LMN mit dem Strahle oder in direkt entgegengesetzter Richtung bewegt.

Es ist noch darauf aufmerksam zu machen, daß die Resultate der Formeln (694) genau mit den auf anderem Wege gefundenen Formeln (537) des §s 123 übereinstimmen.

§. 160. Gerader Stoß eines flüssigen Strahles gegen eine um die Axe des Strahles symmetrische Fläche, an welcher derselbe hingleitet und dann wieder abfließt.

LMN sei eine starre Fläche, welche um die Axe MK sym-

metrisch ist. Der flüssige Strahl VM trifft dieselbe in der Richtung der Axe, breitet sich nach allen Seiten ungehindert um die Fläche aus und verläßt dieselbe bei NL in Richtungen, welche sämmtlich gegen die Axe MK die Neigung ϑ haben, und mit Geschwindigkeiten v_1, welche gleich der relativen Eintrittsgeschwindigkeit v sind. Es wird aber angenommen, daß sich die Fläche LMN selbst, wenn sie überhaupt eine selbstständige Bewegung hat, nur in der Richtung MK oder MV bewege, sodaß man resp. $v = V \mp U$ habe.



Denkt man sich durch die Axe VMK eine unendliche Menge von Ebenen gelegt, welche sich sämmtlich unter demselben, aber unendlich kleinen Winkel gegeneinander neigen; so wird dadurch der Strahl VM mit seinen Verzweigungen um die Fläche LMN in ebenso viel elementare Strahlen getheilt, deren unendlich geringer Querschnitt gleich ω sei. Auf einen jeden dieser elementaren Strahlen kann man ohne Weiteres die Betrachtungen des vorhergehenden Paragraphs in Anwendung bringen. Demnach hat man für den Parallelstoß p eines jeden solchen Strahles in der Richtung VM nach Gl. (694)

$$p = \frac{w}{g}\,\omega V(V \mp U)(1 - \cos\vartheta)$$

und für den Seitenstoß s desselben in perpendikularer Richtung zu VM nach Gl. (695)

$$s = \frac{w}{g}\,\omega V(V \mp U)\sin\vartheta.$$

Nun beachtet man, wenn q die Resultante der vorstehenden beiden Pressungen oder der Gesammtdruck des fraglichen elementaren Strahles gegen die starre Fläche ist, daß die Resultante aller Kräfte q oder auch die Resultante aller Kräfte p und s den Gesammtdruck des Strahles VM gegen die Fläche LMN darstellen wird. Von den Komponenten s sind aber je zwei einander direkt entgegengesetzt und außerdem gleich; demnach heben sich diese Kräfte

bei ihrer Zusammensetzung auf, und es bleibt nur die Summe der nach Ein und derselben Richtung VM wirkenden Komponenten *p* zurück. Diese Summe oder der Parallelstoß des ganzen Strahles VM gegen die gegebene Fläche ist offenbar

$$P = \frac{w}{g} \Omega V (V \mp U)(1 - \cos\vartheta) \quad \ldots . (696)$$

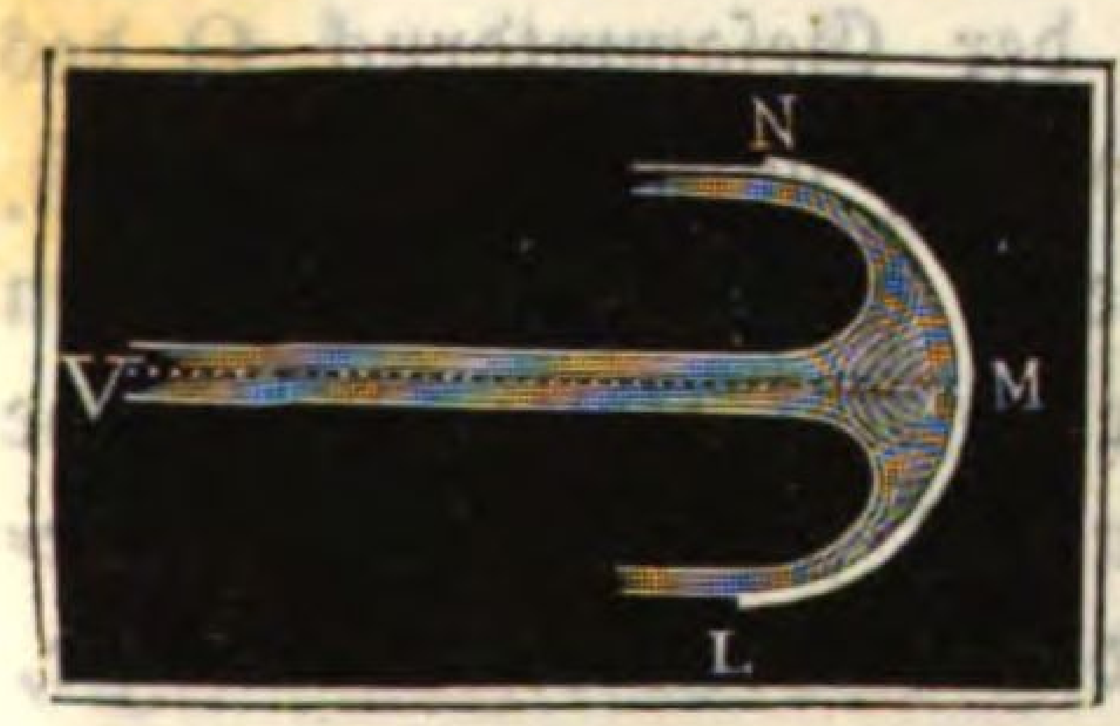
während der Seitenstoß $S = o$ ist.

Wäre die starre Fläche eine Ebene LMN, gegen welche der Strahl in perpendikularer Richtung stieße und unter einem rechten Winkel abgelenkt würde; so hätte man $\vartheta = 90^o$, also

$$P = \frac{w}{g} \Omega V (V \mp U), \quad \ldots . (697)$$

und wenn die Fläche ruhet,

$$P = \frac{w}{g} \Omega V^2 = 2 w \Omega H.$$



Wäre die starre Fläche nach dem Strahle zu konkav, und würde der Strahl bei seinem Austritte bei LN parallel zu VM, aber nach entgegengesetzter Seite ausgeführt; so hätte man $\vartheta = 180^o$, also

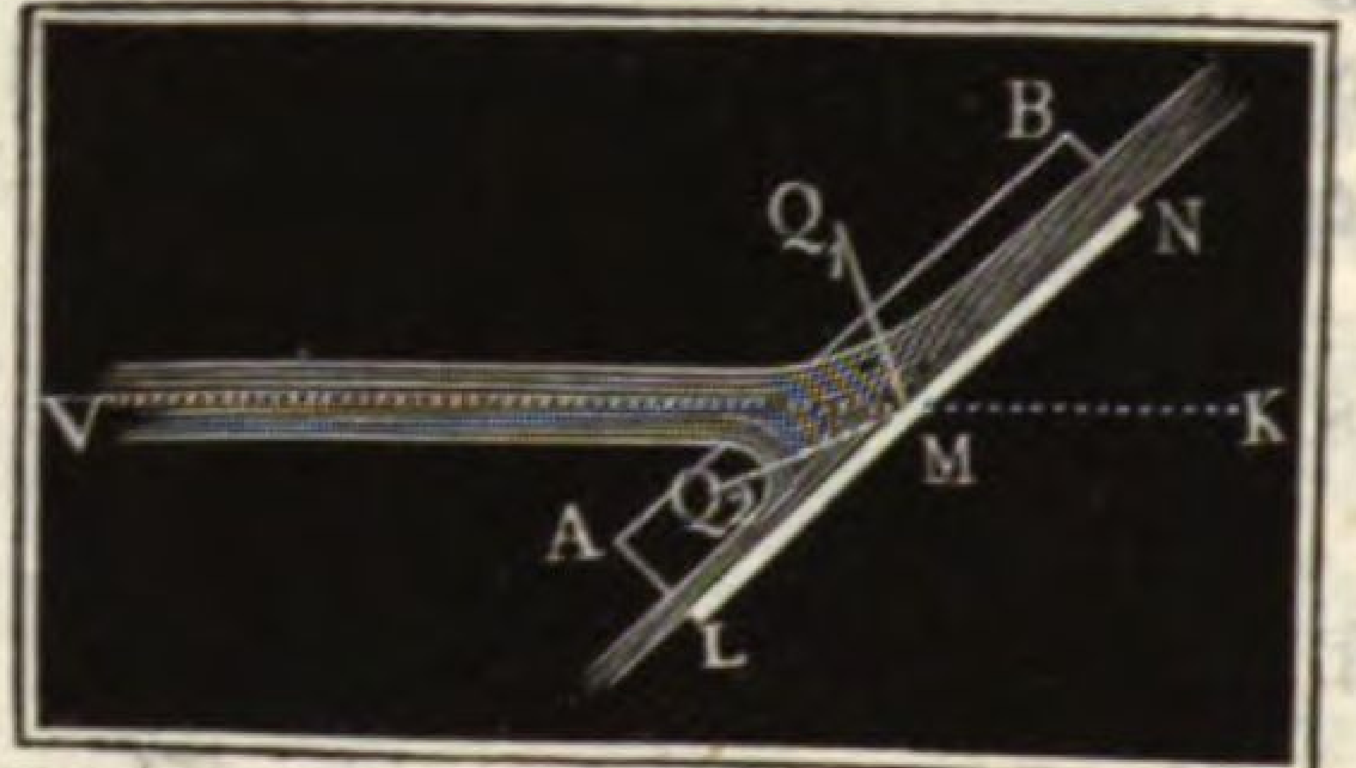
$$P = \frac{2w}{g} \Omega V (V \mp U); \quad \ldots . (698)$$

mithin für eine ruhende Fläche

$$P = \frac{2w}{g} \Omega V^2 = 4 w \Omega H.$$

§. 161. Schiefer Stoß eines flüssigen Strahles gegen eine ebene Fläche, wenn derselbe gezwungen ist, in zwei direkt entgegengesetzten Richtungen abzufließen.

Wenn der Strahl VM unter einem schiefen Winkel VML=α gegen eine ebene Fläche LMN trifft, welche an den Seiten mit Rändern, wie LABN, versehen ist; so wird sich derselbe in zwei Theile MN und ML theilen, welche in direkt entgegengesetzten Richtungen abfließen.



Man erkennt leicht im voraus, daß diese beiden Theile MN und ML ungleiche Querschnitte haben werden. Um dieselben zu bestimmen; so beachte man, daß der Druck Q_1 des Theiles VMN in der auf der Fläche LN normal stehenden Ebene VMN liegen wird, und daß ebenso der Druck Q_2 des Theiles VML in derselben normalen Ebene VML liegen wird. Demnach wird auch die Resultante Q dieser beiden Pressungen oder der Gesammtdruck des ganzen Strahles VM gegen die Fläche LN in der normalen Ebene LVN liegen. Nun erkennt man ferner, daß eine als absolut glatt gedachte ebene Fläche, wie LN, nur im Stande ist, einen Druck in normaler Richtung zu empfangen (vergl. §. 3.) und daraus folgt, daß der Gesammtdruck Q des Strahles VM auf der Ebene LN nothwendig normal stehen muß. Da diese Ebene mit vorstehenden Rändern, wie LABN, versehen ist; so wäre zwar in diesem Falle die absolut glatte Oberfläche von LN kein Hinderniß, daß der Druck Q sich unter einem beliebigen Winkel gegen den Einen oder den anderen Rand neigte, weil ja die auf der Oberfläche dieses Randes normal stehende Komponente des Druckes Q sehr gut von diesem Rande aufgenommen werden könnte; es wäre dann aber wenigstens erforderlich, daß die Richtung von Q in einer auf der geraden Linie LN perpendikular stehenden Ebene läge, sodaß sie nur keine Neigung gegen diese Linie LN besäße. Da wir jedoch bereits gesehen haben, daß der Druck Q auch in der Ebene LVN liegen müsse; so leuchtet ein, daß die fragliche Richtung von Q nur eine Normale auf der Ebene LN bilden könne.

Wenn aber die Resultante Q der beiden Kräfte Q_1 und Q_2 auf der Ebene LN normal stehen soll; so folgt, daß wenn N_1, R_1 und N_2, R_2 die Komponenten von Q_1 und Q_2 resp. normal

und parallel zur Ebene LN sind, die beiden Komponenten R_1 und R_2 einander gleich und direkt entgegengesetzt und daß $Q = N_1 + N_2$ sein müsse.

Nun hat man nach Gl. (695^a) für den Theil MN, dessen Querschnitt Ω_1 sei, und für welchen $\vartheta = \alpha$ ist,

$$R_1 = \frac{w}{g} \Omega_1 V (V \mp U)(1 - \cos\alpha),$$

ferner für den Theil ML, dessen Querschnitt Ω_2 sei, und für welchen $\vartheta = 180^0 - \alpha$ ist,

$$R_2 = \frac{w}{g} \Omega_2 V (V \mp U)(1 + \cos\alpha).$$

Setzt man diese beiden Werthe für R_1 und R_2 einander gleich, und berücksichtigt dabei die Beziehung $\Omega_1 + \Omega_2 = \Omega$; so kommt

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{(1 + \cos\alpha)\Omega}{2} \\ \Omega_2 &= \frac{(1 - \cos\alpha)\Omega}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \; (699)$$

woraus folgt, daß eine größere Quantität der Flüssigkeit in der Richtung MN unter dem stumpfen Winkel $180^0 - \alpha$, als in der Richtung ML unter dem spitzen Winkel α abfließen wird.

Der normale Stoß des Strahles gegen die Ebene ist nach Gl. (695) für den ersten Theil $N_1 = \frac{w}{g} \Omega_1 V (V \mp U) \sin\alpha$ und für den zweiten Theil $N_2 = \frac{w}{g} \Omega_2 V (V \mp U) \sin\alpha$, mithin im Ganzen

$$N = \frac{w}{g} \Omega V (V \mp U) \sin\alpha \qquad \ldots \; (700)$$

Dieser normale Stoß gegen die Ebene bildet hier, da dessen andere Komponente $N' = o$ ist, den Gesammtwerth des Druckes Q des Strahles gegen die Ebene. Zerlegt man denselben in zwei Komponenten P und S, von welchen die erstere dem Strahle parallel ist und die letztere auf dem Strahle perpendikular steht; so erhält man für den Parallelstoß im vorliegenden Falle

$$\left.\begin{aligned} P &= N \sin\alpha = \frac{w}{g}\,\Omega V (V \mp U) \sin^2\alpha \\ &\text{und für den Seitenstoß} \\ S &= N \cos\alpha = \frac{w}{g}\,\Omega V (V \mp U) \sin\alpha \cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots (701)$$

Bei der vorstehenden Untersuchung ist wesentlich vorausgesetzt, daß die Axe VM des Strahles in einer Normalebene auf der Fläche LN liege, sodaß der Winkel VML zwischen jener Axe und der Richtung des Einen Theiles, in welchem der Strahl abfließt, den Neigungswinkel α der Axe VM gegen die Ebene LN bildet.

Ist Dies nicht der Fall, bildet also LVN keine Normalebene auf der ebenen Fläche LN, sodaß also auch VML nicht den Neigungswinkel des Strahles gegen die Fläche LN, sondern nur gegen den Strahltheil ML darstellt; so wird der Gesammtdruck des Strahles nach wie vor in der Ebene LVN liegen (welche jetzt jedoch schief ist) und auf der Linie LN perpendikular stehen. Sein Werth ist, wenn man $\angle VML = \vartheta$ setzt, nach Gl. (700) durch

$$Q = \frac{w}{g}\,\Omega V (V \mp U) \sin\vartheta \quad \ldots (702)$$

dargestellt. Da die Richtung dieses Druckes in einer schiefen Ebene LVN liegt, deren Neigungswinkel gegen die ebene Fläche LN gleich ψ sei; so folgt, daß der Eine Rand LABN, welcher jetzt überhaupt nur nöthig ist und welcher als normal auf der Ebene LN vorausgesetzt wird, einen normalen Druck auszuhalten hat, welcher die zur Ebene LN parallele Komponente

$$R = Q \cos\psi = \frac{w}{g}\,\Omega V (V \mp U) \sin\vartheta \cos\psi \quad \ldots (703)$$

des Druckes Q bildet. Der anderen auf der Ebene LN normal stehenden Komponente

$$N = Q \sin\psi = \frac{w}{g}\,\Omega V (V \mp U) \sin\vartheta \sin\psi \quad \ldots (704)$$

widersteht dagegen die ebene Fläche LN selbst in normaler Richtung.

Für den Fall, daß der Winkel $VML = \vartheta$ ein rechter wäre, würde der Neigungswinkel ψ der Ebene LVN gegen die Ebene LN auch den Neigungswinkel α der Axe VM des Strahles gegen die Ebene LN darstellen, und man hätte statt der Gl. (702) bis (704)

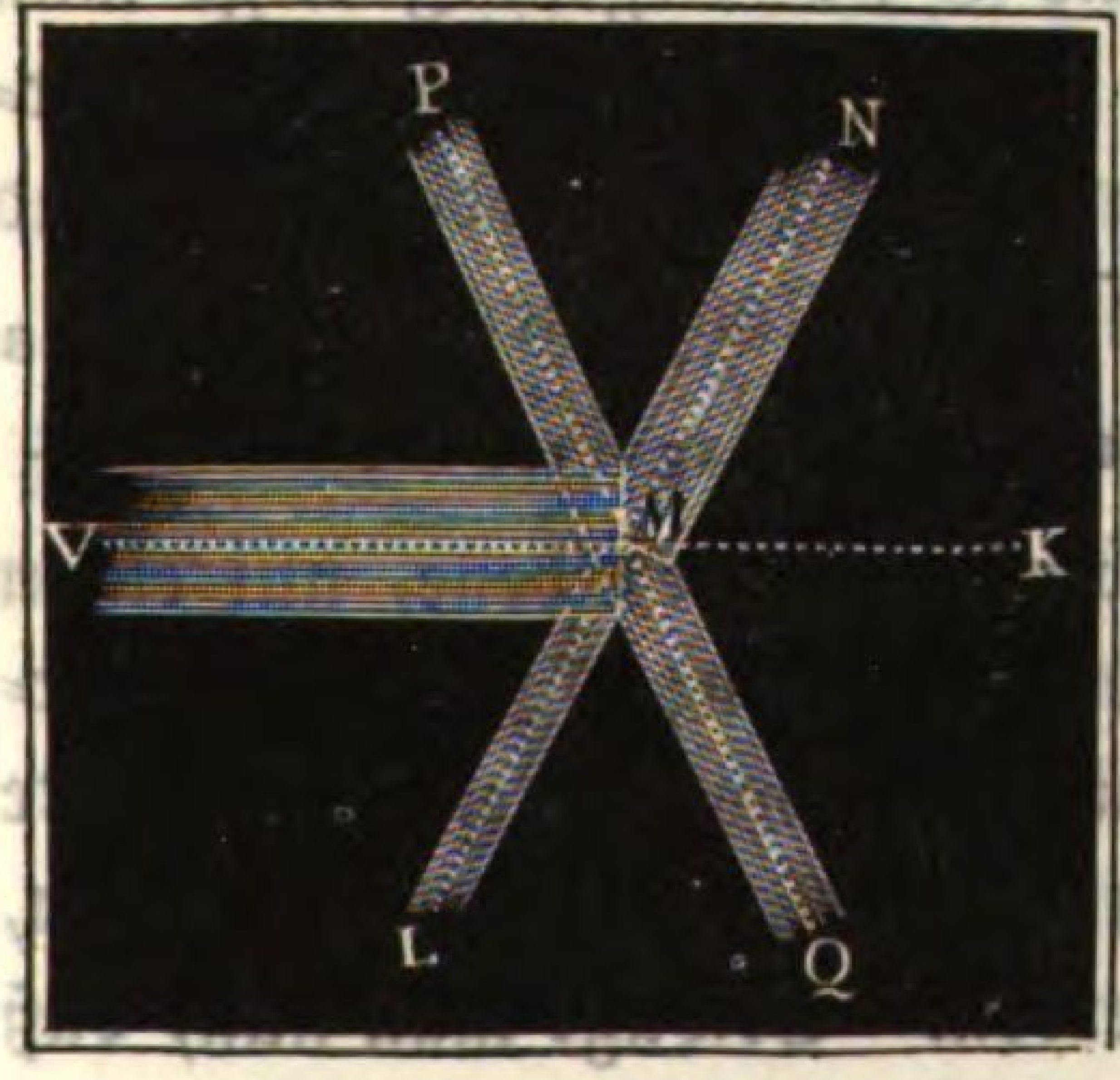
$$Q = \frac{w}{g} \Omega V (V \mp U) \quad \ldots \quad (705)$$

$$R = \frac{w}{g} \Omega V (V \mp U) \cos \alpha \quad \ldots \quad (706)$$

$$N = \frac{w}{g} \Omega V (V \mp U) \sin \alpha \quad \ldots \quad (707)$$

§. 162. Schiefer Stoß eines flüssigen Strahles gegen eine ebene Fläche, wenn derselbe Freiheit hat, sich nach allen Seiten über die Fläche zu verbreiten und abzufließen.

In dem jetzt zu betrachtenden Falle werden sich die Theilchen der Flüssigkeit nach den unzähligen Richtungen von Radien, deren Mittelpunkt M ist, auf der ebenen Fläche fortbewegen. Wenn LMN der Durchschnitt der gegebenen ebenen Fläche mit einer durch die Axe VM des Strahles gehenden und auf jener Fläche perpendikular stehenden Ebene ist; so kann man aus der Untersuchung des vorhergehenden Paragraphs schon im Allgemeinen schließen, daß die Flüssigkeitsfäden, welche sich unter dem stumpfesten hier möglichen Ablenkungswinkel VMN fortbewegen, die



stärksten, diejenigen aber, welche sich unter dem spitzesten Winkel VML fortbewegen, die schwächsten sein werden, während die perpendikular zu der Linie LN unter einem rechten Winkel abgelenkten Fäden MO und MP einen mittleren Querschnitt haben

werden. Wollte man bei der Entwickelung der hier gesuchten Formeln mit mathematischer Schärfe das Gesetz berücksichtigen, welches für die Stärke der um den Punkt M abfließenden Masse in den verschiedenen Richtungen besteht; so würde die Untersuchung sehr komplizirt werden. Für die Praxis erhält man jedoch sehr brauchbare Näherungswerthe, wenn man sich denkt, der Strahl VM theile sich bei M in vier Theile, von welchen der erste die Richtung MN, der zweite die entgegengesetzte Richtung ML und die übrigen beiden die auf LN perpendikularen und einander entgegengesetzten Richtungen MO und MP in der gegebenen Fläche einschlagen.

Es seien

Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 resp. die Querschnitte der nach MN, ML, MP, MO abgelenkten Theile des Strahles VM, dessen gesammter Querschnitt, wie vorhin, mit Ω bezeichnet werde,

Q_1, Q_2 resp. die Pressungen der Theile VMN und VML, deren Richtungen in der Normalebene LVN liegen, sodaß N_1, R_1 die Komponenten von Q_1 resp. normal zur gestoßenen Fläche und parallel zu NM, ferner N_2, R_2 die ähnlichen Komponenten von Q_2 resp. normal zur gestoßenen Fläche und parallel zu LM sind,

Q_3, Q_4 resp. die Pressungen der Theile VMP und VMO, deren Richtungen in der schiefen Ebene OVP liegen. Zerlegt man eine jede dieser Pressungen in drei Komponenten resp. normal zur gestoßenen Fläche, parallel zu PM oder OM und parallel zu LN; so seien diese drei Komponenten von Q_3 gleich N_3, R_3, r_3 und von Q_4 gleich N_4, R_4, r_4.

Da die gestoßene Fläche, als absolut glatte Ebene, nur einen Druck in normaler Richtung aufnehmen kann; so folgt zuvörderst, daß das System aller derjenigen Komponenten der Kräfte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, welche in die Eben eder gestoßenen Fläche fallen, eine Resultante gleich null haben werden. Erwägt man nun, daß die Komponente R_1 nach der Seite NM, ferner R_2, r_3 und r_4 nach entgegengesetzter Seite LM, während R_3 nach der Seite PM und R_4 nach entgegengesetzter Seite OM wirkt; so müssen vor allen Dingen die Bedingungen

$$R_1 = R_2 + r_3 + r_4 \quad \ldots \text{(708)}$$

und

$$R_3 = R_4 \qquad \ldots \text{(709}$$

erfüllt werden.

Neben diesen beiden Gleichungen existirt zwischen den vier unbekannten Größen Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 noch die vierte Bedingungsgleichung

$$\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4 = \Omega, \qquad \ldots \text{(710)}$$

und es bliebe nur noch die vierte anzugeben. Diese bietet sich aus der Natur der Flüssigkeiten am ungezwungensten dar, wenn man annimmt, die der gestoßenen Ebene parallelen Pressungen seien nach allen Richtungen um den Punkt M herum einander gleich, also

$$R_1 = R_3 \qquad \ldots \text{(711)}$$

Nun hat man, wenn α den Neigungswinkel VML des Strahles gegen die gestoßene Ebene bezeichnet, nach den Gleichungen (692), (695) und (695[a]), sobald man darin α an die Stelle von ϑ setzt, für den Strahltheil VMN

$$Q_1 = \frac{w}{g} \Omega_1 V (V \mp U) \sqrt{2(1 - \cos\alpha)},$$

$$N_1 = \frac{w}{g} \Omega_1 V (V \mp U) \sin\alpha,$$

$$R_1 = \frac{w}{g} \Omega_1 V (V \mp U)(1 - \cos\alpha);$$

ferner für den Strahltheil VML, wenn man $\vartheta = 180^0 - \alpha$ setzt,

$$Q_2 = \frac{w}{g} \Omega_2 V (V \mp U) \sqrt{2(1 + \cos\alpha)},$$

$$N_2 = \frac{w}{g} \Omega_2 V (V \mp U) \sin\alpha,$$

$$R_2 = \frac{w}{g} \Omega_2 V (V \mp U)(1 + \cos\alpha).$$

Für den Strahltheil VMP, welcher unter einem rechten Winkel, aber in der schiefen Ebene OVP abgelenkt wird, erhält man zuvörderst aus Gl. (692) für $\vartheta = 90^0$

$$Q_3 = \frac{w}{g} \Omega_3 V (V \mp U) \sqrt{2}.$$

Die Richtung dieses Druckes liegt in der schiefen Ebene OVP und halbirt den rechten Winkel VMP (s. Gl. (692^a) und die daran geknüpfte Bemerkung). Demnach sind die Komponenten von Q_3 resp. parallel zu PM und VM gleich $Q_3 \cos 45^0 = \frac{Q_3}{\sqrt{2}}$ und $Q_3 \sin 45^0 = \frac{Q_3}{\sqrt{2}}$. Die erstere stellt die Kraft R_3 dar, und die zweite ergibt, wenn sie in ihre beiden Komponenten normal zur gestoßenen Fläche und parallel zu LM zerlegt wird, die Kräfte N_3 und r_3, sodaß man, weil $\angle VML = \alpha$ ist,

$$R_3 = \frac{w}{g} \Omega_3 V (V \mp U),$$

$$N_3 = \frac{w}{g} \Omega_3 V (V \mp U) \sin \alpha,$$

$$r_3 = \frac{w}{g} \Omega_3 V (V \mp U) \cos \alpha$$

hat.

In ähnlicher Weise hat man für den Strahltheil VMO

$$Q_4 = \frac{w}{g} \Omega_4 V (V \mp U) \sqrt{2},$$

$$R_4 = \frac{w}{g} \Omega_4 V (V \mp U),$$

$$N_4 = \frac{w}{g} \Omega_4 V (V \mp U) \sin \alpha,$$

$$r_4 = \frac{w}{g} \Omega_4 V (V \mp U) \cos \alpha.$$

Durch diese Ausdrücke werden die obigen vier Bedingungsgleichungen (708) bis (711) zu den folgenden

$$\Omega_1 (1 - \cos \alpha) = \Omega_2 (1 + \cos \alpha) + (\Omega_3 + \Omega_4) \cos \alpha \quad . \; . \; . \; . \; (712)$$

$$\Omega_3 = \Omega_4, \quad . \; . \; . \; . \; (713)$$

$$\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4 = \Omega, \quad . \; . \; . \; . \; (714)$$

$$\Omega_1 (1 - \cos \alpha) = \Omega_3 \quad . \; . \; . \; . \; (715)$$

Aus diesen vier Gleichungen folgt

$$\left.\begin{aligned}\Omega_1 &= \frac{1+\cos\alpha}{2(2-\cos\alpha)}\,\Omega,\\ \Omega_2 &= \frac{1-3\cos\alpha+2\cos^2\alpha}{2(2-\cos\alpha)}\,\Omega,\\ \Omega_3 = \Omega_4 &= \frac{\sin^2\alpha}{2(2-\cos\alpha)}\,\Omega.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ (716)$$

Welche Werthe aber auch die Querschnitte Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 annehmen möchten, welche überhaupt zulässige Hypothese man also statt der vierten Bedingungsgleichung (711) oder (715) substituiren wollte, immer ist der aus den vier Kräften Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, welche zum mindesten den drei Gleichungen (708) bis (710) unterworfen sein müssen, resultirende Normaldruck N auf die gestoßene Fläche

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4,$$

d. i. weil nach den obigen Ausdrücken $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = \frac{w}{g} V(V \mp U)(\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4)\sin\alpha$ und $\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4 = \Omega$ ist,

$$N = \frac{w}{g}\,\Omega V (V \mp U)\sin\alpha \quad \ldots\ (717)$$

In paralleler Richtung zur gestoßenen Fläche existirt nach dem Obigen kein Druck, indem der vorstehende Werth von N den Gesammtdruck des Strahles VM darstellt, und man hat demnach $R = o$.

Zerlegt man diesen Druck in seine beiden Komponenten P und S resp. parallel und perpendikular zur Axe des Strahles VM; so ergibt sich für den Parallelstoß

$$\left.\begin{aligned} P &= N\sin\alpha = \frac{w}{g}\,\Omega V (V \mp U)\sin^2\alpha \\ &\text{und für den Seitenstoß} \\ S &= N\cos\alpha = \frac{w}{g}\,\Omega V (V \mp U)\sin\alpha\cos\alpha.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ (718)$$

Den obigen Werth des Normalstoßes N aus Gl. (717), welcher zugleich den Gesammtdruck des Strahles VM auf die gestoßene Fläche darstellt, gibt auch Navier*) an. Jedoch ist dessen Ableitung auf irrige Hypothesen gegründet, indem er annimmt, die nach allen Richtungen um den Punkt M sich verbreitenden Fäden der Flüssigkeit haben eine gleiche Stärke; ferner indem er bei der Entwickelung des Werthes von N nur die Komponente des Stoßes eines jeden Fadens parallel zur Axe VM berücksichtigt und die übrigen Komponenten ganz vernachlässigt, welcher letztere Umstand zur Folge hat, daß Naviers Werth von N nicht einmal der ersteren Hypothese entspricht; daher findet Navier denn auch statt des Parallelstoßes P aus Gl. (718) den Werth $\frac{w}{g}\,\Omega V(V \mp U)$.

Duchemin**) findet, indem er zwar nicht die Querschnitte aller abgelenkten Fäden als gleich annimmt, aber dennoch irrthümliche Prinzipien in die Untersuchung verwebt, für den Normalstoß N den Werth

$$2\frac{w}{g}\,\Omega V(V \mp U)\frac{\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha},$$

welcher sich von dem obigen aus Gl. (717) durch den Faktor $\frac{2\sin\alpha}{1+\sin^2\alpha}$ unterscheidet. Dabei führt Duchemin an, jener Werth stimme mit denen der Beobachtung von $\alpha=90^0$ bis $\alpha=45^0$ überein, sei aber für sehr spitze Einfallswinkel bald beträchtlich größer, bald merklich kleiner. Dieser Umstand erklärt sich, wenn man die Formel (717) für die der Wahrheit näher kommende hält, leicht, wenn man beachtet, daß der Faktor $\frac{2\sin\alpha}{1+\sin^2\alpha}$ von $\alpha=90^0$ bis $\alpha=45^0$ den Werth 1 bis 0,942 besitzt, also nur wenig von der Einheit abweicht, während die größten Abweichungen von der Einheit erst bei den kleineren Winkeln eintreten.

---

*) Résumé des leçons sur l'application de la mécanique. Seconde partie. No. 162.

**) Experimentaluntersuchungen über die Gesetze des Widerstandes der Flüssigkeiten. Deutsch von Schnuse. §. 52.

Weisbach *) entwickelt unter Einführung einer etwas willkürlichen Hypothese hinsichtlich der relativen Wirkung der Theile **VMP** und **VMO** gegen die Theile **VMN** und **VML** des Strahles, und unter Nichtbeachtung des Umstandes, daß die Ebene **OVP**, in welcher die ersteren beiden Theile liegen, gegen die Ebene **LONP** geneigt ist, für N den Werth

$$2 \frac{w}{g} \Omega V (V \mp U) \frac{\sin\alpha}{1 + \sin^2\alpha},$$

welcher von dem obigen und auch von dem des Duchemin abweicht, wogegen der genannte Schriftsteller für den Parallelstoß **P** denselben Werth findet, welchen Duchemin für den Normalstoß N angibt.

Die in den vorstehenden Paragraphen entwickelten Formeln über den Stoß isolirter Strahlen gegen starre Flächen, wobei vorausgesetzt ist, daß die Ausdehnung dieser Flächen wenigstens so groß sei, daß die Fäden der Flüssigkeit in parallelen Richtungen zu den letzten Elementen der gestoßen Flächen austreten können, jedoch wiederum nicht so groß, daß die Adhäsion der Flüssigkeit an dieselben, sowie das Gewicht der auf den Flächen befindlichen Flüssigkeit einen merklichen Einfluß äußern können, sind durch direkte Versuche, namentlich von Morosi, Bossut, Vince, Langsdorf, Michelotti und Anderen, bestätigt worden.

Damit die obigen theoretischen Resultate, besonders die für den geraden Stoß, mit denen der Erfahrung übereinstimmen, muß der Durchmesser der gestoßen Fläche wenigstens 4 mal so groß sein, als der des stoßenden Strahles.

Ist die Fläche kleiner; so vermindert sich die Wirkung des Stoßes, weil alsdann die Richtungen, in welchen die Flüssigkeit die Fläche verläßt, der Letzteren nicht parallel werden können. Langsdorf hat gefunden, daß wenn eine ebene Fläche, welche den direkten Stoß eines Strahles empfängt, nur ebenso groß ist, als der Querschnitt des Strahles selbst, der Stoß gegen diese Fläche etwa die Hälfte des durch Gl. (697) gegebenen Werthes beträgt.

---

*) Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik. Erster Theil. §. 388.

Vom Stoße und Widerstande einer unbestimmt begränzten unpreßbaren Flüssigkeit.

§. 163. Allgemeine Bemerkungen über den Stoß und den Widerstand einer unpreßbaren Flüssigkeit.

Wir betrachten im Nachfolgenden verschiedene Körper, deren Oberflächen entweder ganz oder zum Theil in eine unbestimmt begränzte Masse einer unpreßbaren Flüssigkeit getaucht sind. Wenn der Körper als ruhend und die Flüssigkeit als bewegt gedacht wird; so bezeichnet man die Wirkung der Letzteren auf den Ersteren gewöhnlich mit dem Namen des Stoßes der Flüssigkeit. Wird dagegen die Flüssigkeit als ruhend und der Körper als bewegt angenommen; so heißt die Wirkung der Ersteren ihr Widerstand.

Dadurch, daß ein ruhender Körper einer bewegten Flüssigkeit ausgesetzt oder ein Körper in einer ruhenden Flüssigkeit bewegt wird, werden die Massentheilchen der Flüssigkeit gezwungen, sich in Kurven um den Körper zu bewegen. Die solchergestalt sich bildenden krummlinigen Fäden der Flüssigkeit äußeren Pressungen auf den Körper, welche nach den vorhergehenden Untersuchungen über den Stoß isolirter Strahlen würden bestimmt werden können, wenn man deren Richtungen, Geschwindigkeiten und Querschnitte in allen Punkten genau kennte.

Die Resultante aller dieser Pressungen auf den Körper bildet das Maaß resp. für den Stoß oder den Widerstand der Flüssigkeit.

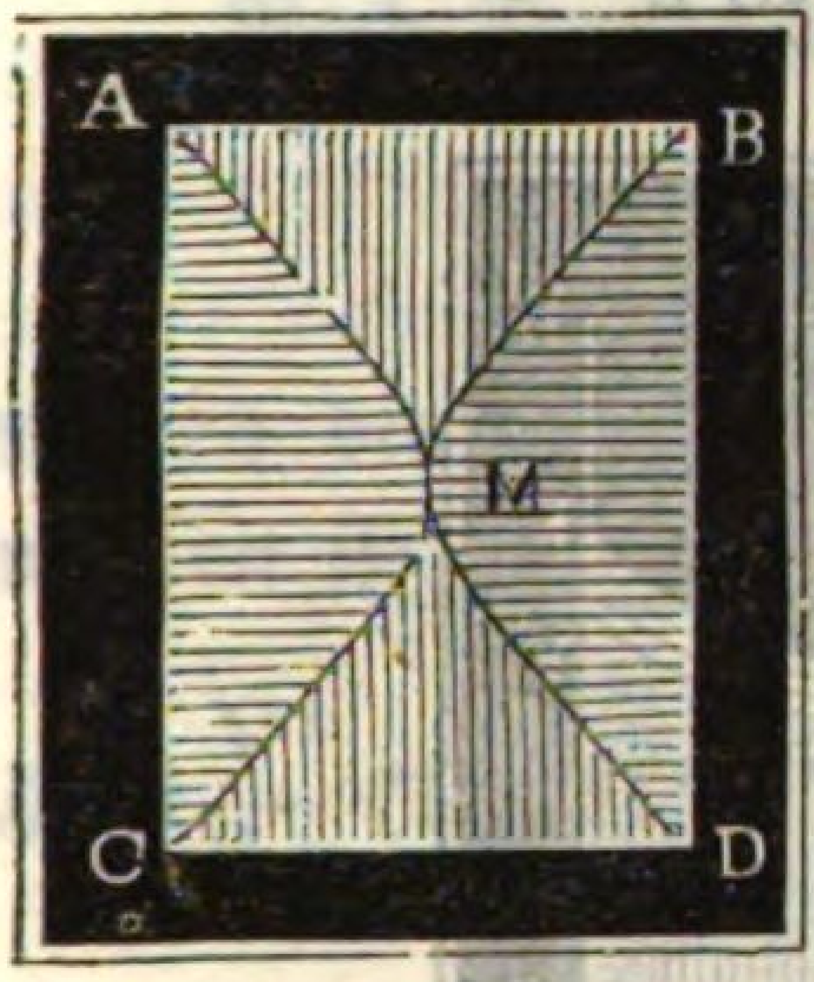
Wenn der Körper nur zum Theil in die unpreßbare Flüssigkeit eingetaucht ist; so wird der vermehrte hydraulische Druck auf die vordere eingetauchte Fläche des Körpers auch zur Folge haben, daß sich die Flüssigkeit an dieser Fläche über das Niveau der umgebenden Masse erhebt, während der verminderte Druck auf die hintere Fläche des Körpers eine Senkung des Spiegels der Flüssigkeit an dieser Stelle zur Folge hat.

§. 164. Richtung der Stromfäden um einen Körper, welcher dem Stoße oder Widerstande einer Flüssigkeit ausgesetzt ist.

Wenn ein starrer Körper dem Stoße eines Flüssigkeitsstro-

mes ausgesetzt ist; so wird die Flüssigkeit gezwungen, nach allen Seiten auszuweichen und sich in gekrümmten Fäden um den Körper herum zu bewegen. Für den Fall, daß der Körper ein gerades Prisma bilde, dessen Seitenlinien der Richtung des Stromes parallel seien, hat Duchemin*) folgende Beobachtungen gemacht.

Bei einem rechtwinkligen Parallelepipedum, dessen horizontale Breite AB kleiner ist, als seine vertikale Höhe AC, und welches ganz in die Flüssigkeit getaucht ist, theilt sich die Flüssigkeit an der Vorderfläche ABDC in vier



Haupttheile, und unmittelbar an dieser Fläche bewegt sich der erste Theil AMC der Stromfäden horizontal nach der Linken, der zweite Theil BMD horizontal nach der Rechten, der dritte Theil CMD vertikal abwärts und der vierte Theil AMB vertikal aufwärts. Der Punkt M liegt in der Mitte des Rechteckes ABDC. Die Linien AMC und BMD bilden Kurven, in welchen Strömungen stattfinden. Hierauf nehmen die an der Vorderfläche vorübergegangenen Stromfäden Richtungen an, welche nahezu den Seitenflächen des Prismas parallel sind. An der Hinterfläche treffen diese Fäden wieder zusammen, indem sie Kurven bilden, welche sich in ganz ähnlicher Weise von dem Umfange der Hinterfläche gegen deren Mittelpunkt neigen, wie Dies in obiger Figur dargestellt ist. Jedoch stellen sich hinter dem Körper Wirbel in der Flüssigkeit ein, in Folge deren der gleichmäßige Abfluß der Flüssigkeit erst in einiger Entfernung hinter der Hinterfläche des Körpers sich wiederherstellt.

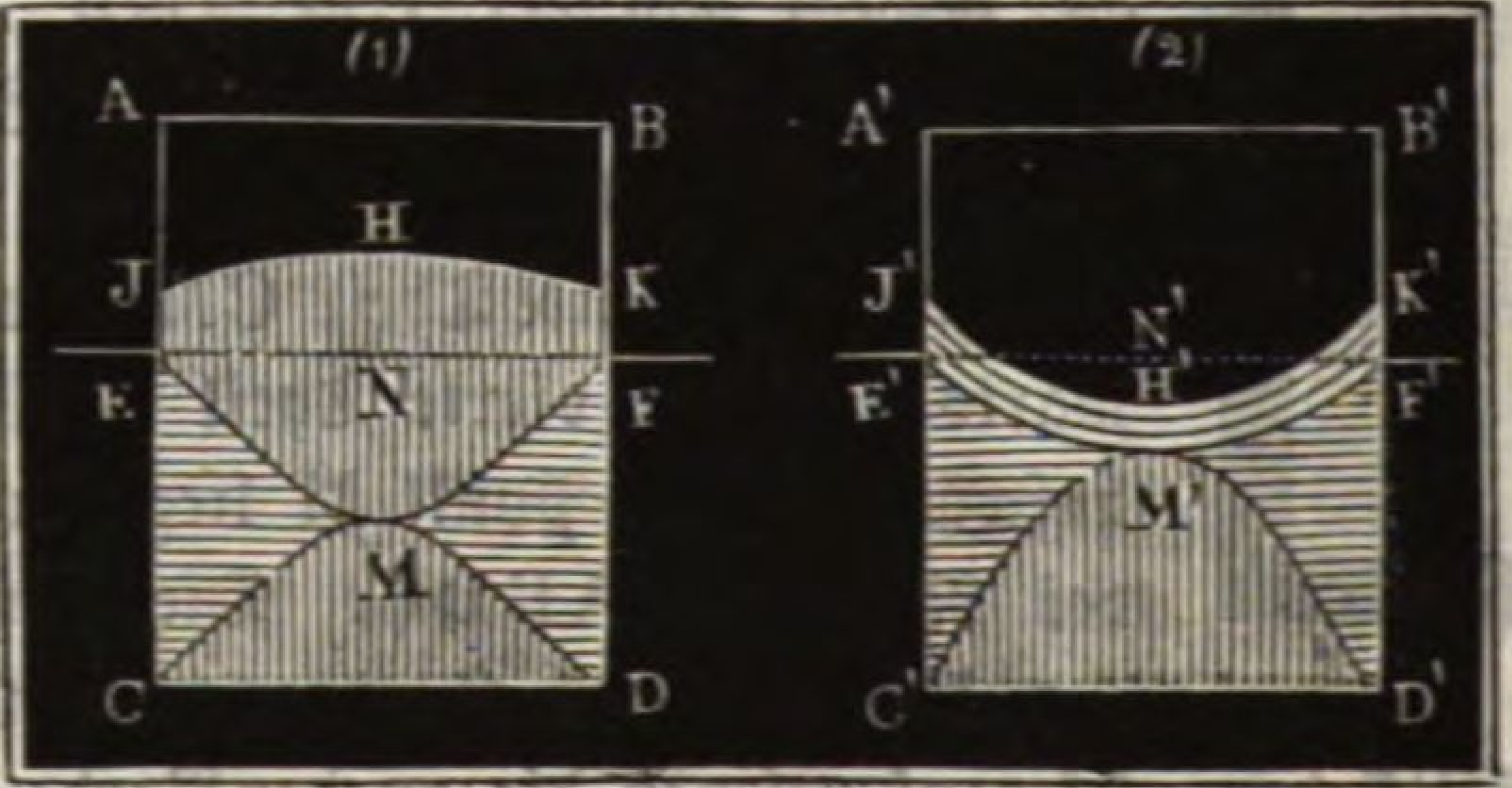
Wenn die horizontale Dimension AB des Querschnittes eines solchen Parallelepipedums größer ist, als dessen vertikale Dimension; so finden ganz ähnliche Erscheinungen statt, nur treten die beiden stetigen Kurven AMC und BMD an die Stelle der beiden Kurven AMB und CMD, sodaß die obige Figur immer noch den Hergang der Sache darstellt, wenn man CA und DB als die horizontalen Kanten des Querschnittes ansieht.

*) Experimentaluntersuchungen über die Gesetze des Widerstandes der Flüssigkeiten. Deutsch von Schnuse.

Wenn der Querschnitt ABDC ein Quadrat bildet; so gehen die Kurven AMD und BMC in die geradlinigen Diagonalen des Quadrates über.

Wäre der Querschnitt des geraden Prismas ein Kreis; so würden die Fäden unmittelbar an der Vorderfläche in den verschiedenen Richtungen der Radien dieses Kreises abgelenkt werden.

Sobald das gerade Prisma nur zum Theil, etwa bis EF, in die Flüssigkeit getaucht ist; so werden die Fäden der Flüssigkeit vor dem untergetauchten Theile EFDC (Fig. 1) der Vor-



derfläche gerade so abgelenkt, wie Dies nach dem Vorstehenden geschehen würde, wenn EFDC den Querschnitt eines ganz untergetauchten Prismas darstellte. Hieraus folgt aber, daß derjenige Theil EMF der abgelenkten Fäden, welcher an der Vorderfläche vertikal aufwärts steigt, sich über das herrschende Niveau EF der umgebenden Flüssigkeit bis JHK, nämlich soweit erheben wird, bis die bei der Durchschreitung der Linie EF stattfindende Geschwindigkeit jener Fäden durch die entgegenwirkende Kraft der Schwere vernichtet ist. Demnach wird z. B. NH gleich der Höhe sein, welche der in N stattfindenden Geschwindigkeit des Fadens MN als Fallhöhe zukommt.

Ist nun

V die Geschwindigkeit des Stromes, in welchen das Prisma getaucht ist,

H die dieser Geschwindigkeit zukommende Fallhöhe,

v die Geschwindigkeit des mittelsten Fadens MH im Punkte N,

h die Erhebung NH dieses Fadens über das Niveau EF der umgebenden Flüssigkeit,

$e = \frac{1}{2}\,\overline{EC}$ die halbe Höhe des eingetauchten Theiles **EFDC** des Prismas,

g die Geschwindigkeit, welche die Schwere den Körpern in der Zeiteinheit mittheilt;

so hat man

$$h = \frac{v^2}{2g} \quad \ldots . (719)$$

Nach Duchemins Beobachtungen ist aber

$$v = V\sqrt{1 + 1{,}237 . e}\,, \quad \ldots . (720)$$

worin die Größe e nothwendig nach rheinländischen Fußen zu messen ist; mithin hat man wegen Gl. (719)

$$h = \frac{V^2}{2g}(1 + 1{,}237 . e) = H(1 + 1{,}237 . e) \quad \ldots . (721)$$

für die größte Erhebung der Flüssigkeit an der Vorderfläche des Prismas. Die nach dieser Formel berechneten Resultate stimmen auch mit den Beobachtungen von Dubuat und Bossut sehr nahe überein.

Was das Verhalten der Flüssigkeit an der Hinterfläche eines nur zum Theil eingetauchten Prismas betrifft; so stellt sich hier das Niveau der umgebenden Flüssigkeit umso vollkommener her, je länger das Prisma ist. Im Allgemeinen steht jedoch die Flüssigkeit in der vertikalen Mittellinie der Hinterfläche etwas tiefer, als das herrschende Niveau. Für eine ganz dünne rechtwinklige Platte, deren Vorderfläche **ABDC** (Fig. 1) ist, stellt **A′B′D′C′** (Fig. 2) die Hinterfläche mit den darin herrschenden vom Umfange nach der Mitte gerichteten Strömungen dar. Die Bewegung der Stromfäden an den Hinterflächen der Körper ist übrigens bei weitem nicht so regelmäßig, als an den Vorderflächen, und wird durch Wirbel, welche sich hinter dem Körper bilden, bedeutend gestört.

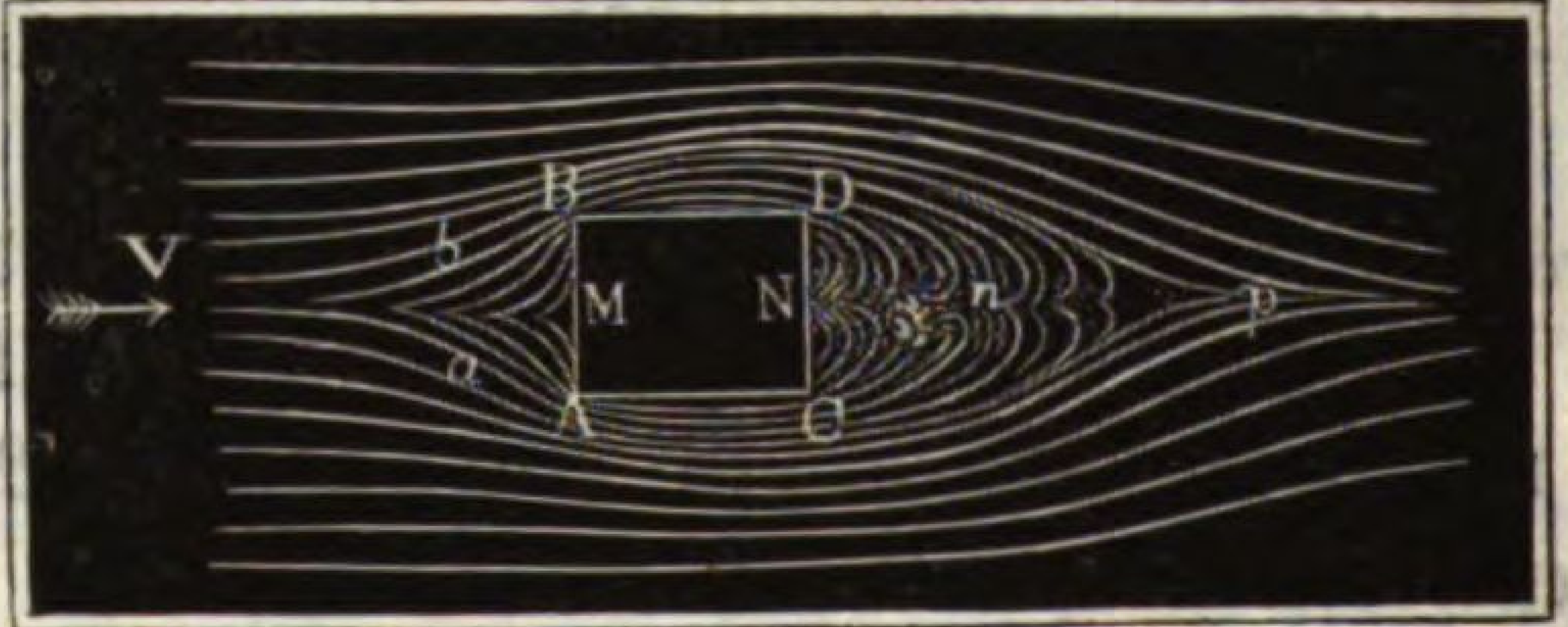
Die vorstehenden Resultate und Formeln behalten sehr nahe auch dann noch Gültigkeit, wenn der Körper mit der Geschwindigkeit V in einer ruhenden Flüssigkeit bewegt wird.

Ist sowol der Körper, wie die Flüssigkeit in Bewegung, so

jedoch, daß Beide sich entweder nach derselben oder nach direkt entgegengesetzten Seiten bewegen; so hat man in den Formeln (720) und (721) statt V den Werth der relativen Geschwindigkeit der Flüssigkeit in Beziehung zu der des Körpers, oder umgekehrt, zu substituiren.

§. 165. Bestimmung des Gesammtstoßes oder Gesammtwiderstandes einer unbestimmt begränzten Flüssigkeit gegen einen starren Körper.

Wenn sich ein ruhender Körper **ABDC** in einer bewegten Flüssigkeit befindet; so wird irgend ein von seiner natürlichen Richtung abgelenkter dem Körper nahe liegender Stromfaden die allgemeine Form der Linie **VBD***n* annehmen, welche in dem Theile V*b* konvex, in dem Theile *b*BD*n* jedoch konkav gegen den



Körper gekrümmt ist, und sich in der Nähe des Punktes *n* in eine wirbelnde Bewegung verliert. Die weiter von dem Körper entlegenen Stromfäden werden in ihren unteren Theilen eine regelmäßigere Gestalt annehmen und indem sie bei *p* in die allgemeine Stromrichtung übergehen, dem Körper wieder eine konvexe Seite zukehren.

Kennte man nun die Gestalt der Kurve **VBD***n*, sowie die Variation, welche der Querschnitt oder die Geschwindigkeit des hierdurch dargestellten Stromfadens von V bis *n* erleidet, ferner das Gesetz, welchem diese Größen für sämmtliche abgelenkte Stromfäden unterworfen sind, und endlich die Abhängigkeit, in welcher dieselben von der besonderen Gestalt des Körpers **ABDC** und von dem größeren oder kleineren Profile des Stromes stehen; so würde man mit Hülfe der in den §§. 122 und 123 entwickelten Prinzipien im Stande sein, die Wirkungen zu bestimmen, welche ein jeder Stromfaden und somit die ganze Masse der abgelenkten

Flüssigkeit auf den Körper ausübte. Wenigstens würden hierdurch rationelle Formeln zu erlangen sein, welche nur einer Korrektion durch die Erfahrung bedürften. Es leuchtet nämlich ein, daß wenn *b* der Wendepunkt der Kurve V*b*BD*n* ist, der konvexe Theil V*b* jenes Stromfadens eine Vermehrung und der konkave Theil *b*BD*n* eine Verminderung des hydraulischen Druckes auf den Körper hervorbringen, und daß die Resultante aller dieser Pressungen von sämmtlichen Stromfäden die Größe des auf den Körper ausgeübten Stoßes darstellen wird. Außerdem hätte man hierbei noch die Wirkung der Adhäsion der Flüssigkeit an den Körper zu berücksichtigen, woraus noch eine andere Vermehrung des Druckes in der Richtung VM hervorgeht.

Leider ist die praktische Beobachtung der hierher gehörigen Phänomene noch nicht so weit gediehen, daß man mit einiger Sicherheit den Zusammenhang der oben erwähnten Größen durchschauen und in der angedeuteten Weise eine umfassende Theorie dieser Erscheinungen begründen könnte.

Im Allgemeinen erkennt man, wenn man sein Augenmerk auf die Variation des hydraulischen Druckes von dem Einen Punkte der Oberfläche des Körpers ABDC zu dem anderen richtet, daß wenn gar keine Ablenkung der Stromfäden stattfände, der Körper Pressungen erleiden würde, welche denen gleich wären, die er bei derselben Lage in einer ruhenden Flüssigkeit erfahren würde. Vermöge dieser Pressungen würde der Körper durchaus kein Bestreben haben, sich in irgend einer horizontalen Richtung zu bewegen, da sich dieselben, wie man aus der Hydrostatik weiß, in eine einzige vertikal von unten nach oben wirkende, dem Gewichte der durch den Körper verdrängten Flüssigkeit gleiche Kraft zusammensetzen. In Folge der konvexen Krümmung der Stromfäden in den Theilen V*b* und V*a* wird sich nun aber der hydraulische Druck gegen die Mitte M der Vorderfläche vermehren. Von *b* bis B und *a* bis A, wo jene Stromfäden gegen den Körper konkav werden, wird der durch die Ablenkung hervorgebrachte Druck nach außen gerichtet sein, und Dies wird zur Folge haben, daß der hydraulische Druck gegen den Umfang der Vorderfläche abnimmt und kleiner wird, als er in einer ruhenden Flüssigkeit sein würde. Das letztere Resultat ist durch die Beobachtungen von Dubuat und durch die von Duchemin be-

stätigt worden, obgleich Letzterer durch eine Mißdeutung der Angaben des von ihm gebrauchten Instrumentes einen von dieser Behauptung abweichenden Schluß zieht.

Ebenso wird die konkave Krümmung der Stromfäden in den Theilen BD und AC bewirken, daß der hydraulische Druck auf die Seitenflächen BD und AC des Körpers geringer ist, als der hydrostatische Druck. Auch dieses Resultat entspricht den Beobachtungen der beiden eben gedachten Experimentatoren.

Endlich leuchtet ein, daß durch eine gleiche Ursache, nämlich wegen der konkaven Krümmung der Theile D*n* und C*n* der Stromfäden, der hydraulische Druck gegen die Hinterfläche CD des Körpers kleiner sein wird, als der hydrostatische. Dubuats und Duchemins Versuche liefern auch hierzu eine Bestätigung, wiewol Letzterer durch irrthümliche Folgerungen zu dem Resultate gelangt, daß der hydraulische Druck gegen die Hinterfläche, wie überhaupt rings um den Körper, mit Ausnahme der mittleren Stellen in den Seitenflächen BD und AC, den hydrostatischen Druck übertreffe.

Wäre hiernach Q der gesammte hydrostatische Druck gegen die vordere und hintere vertikale Projektion irgend eines dem Stoße eines flüssigen Stromes ausgesetzten Körpers, ferner P′ die durch die Ablenkung der Stromfäden bewirkte Vermehrung des Druckes gegen die vordere Projektion, und P″ die hierdurch bewirkte Verminderung des Druckes gegen die hintere Projektion; so hat man $Q + P'$ für den Gesammtdruck gegen die vordere und $Q - P''$ für den Gesammtdruck gegen die hintere Projektion; demnach für die Gesammtwirkung P der Flüssigkeit auf den Körper

$$P = P' + P'' \quad \ldots . (722)$$

Nun sei allgemein

V die Geschwindigkeit des Stromes,

H die dieser Geschwindigkeit zukommende Druckhöhe $\frac{V^2}{2g}$,

w das Gewicht einer Volumeinheit der Flüssigkeit,

A die vertikale Projektion des eingetauchten Körpers auf eine zur Stromrichtung perpendikulare Ebene,

m ein aus der Erfahrung abzuleitender Koeffizient für den Gesammtdruck P′ auf die vordere Projektion des Körpers, wel-

cher aus der Ablenkung und aus der Adhäsion der Flüssigkeit hervorgeht,

n ein ähnlicher Koeffizient für die Verminderung P″ des Druckes gegen die hintere Projektion,

ϱ der Widerstandskoeffizient zur Bestimmung der gesammten Wirkung P der Flüssigkeit auf den Körper.

Wäre die Vorderfläche des vorläufig als prismatisch angenommenen Körpers eine auf der Richtung der Strombewegung perpendikular stehende Ebene, und dächte man sich, diese Ebene würde von einem isolirten Strahle getroffen, dessen Querschnitt = A wäre, die Fäden dieses Strahles würden auch sämmtlich parallel zu jener Ebene abgelenkt und verließen dieselbe mit der ursprünglichen Geschwindigkeit V; so weiß man aus §. 160, Gl. (697), daß der durch den Stoß des Strahles in paralleler Richtung zu demselben hervorgebrachte Druck durch die Formel

$$\frac{w}{g} AV^2 = 2wAH$$

ausgedrückt werden würde.

Von der Wirkung eines solchen isolirten Strahles unterscheidet sich nun zwar die Wirkung einer unbegränzten Flüssigkeit sehr, indem 1) der Querschnitt der durch den Körper abgelenkten Stromfäden viel größer ist, als die Vorderfläche A des Körpers; 2) indem die an der Vorderfläche abgelenkten Fäden durchaus nicht eine zu dieser Fläche parallele Richtung annehmen; 3) indem die Geschwindigkeit der abgelenkten Fäden durch die Einwirkung der umgebenden Flüssigkeit und durch die Adhäsion an den Körper nicht in allen Punkten gleich der ursprünglichen Geschwindigkeit V des Stromes ist; dessenungeachtet wird man doch so lange, als eine genauere Theorie die Hand bietet, den vorstehenden Ausdruck bei den durch Versuche darzustellenden empirischen Formeln als Basis benutzen können, indem man bei der wenigstens stattfindenden Analogie der beiden Fälle annimmt, der Stoß einer unbegränzten Flüssigkeit gegen Körper, welche dem gegebenen ähnlich sind, variire wie die Größe der Fläche A und wie das Quadrat der Geschwindigkeit V, oder statt dieses Quadrates, wie die Geschwindigkeitshöhe H. Ist demnach *m* ein durch Versuche

für Körper von verschiedenen Gestalten zu ermittelnder Koeffizient; so kann man setzen

$$P' = mwA \cdot \frac{V^2}{2g} = mwAH \quad \ldots . (723)$$

Analog dem Vorstehenden kann man zur Bestimmung der durch die Ablenkung der Flüssigkeit hervorgebrachten Verminderung des Druckes gegen die Hinterfläche des Körpers

$$P'' = nwA \cdot \frac{V^2}{2g} = nwAH \quad \ldots . (724)$$

setzen.

Bezeichnet man nun die Summe $m+n$ der vorstehenden beiden Koeffizienten mit ϱ; so erhält man wegen Gl. (722) für den Gesammtstoß der Flüssigkeit gegen den Körper

$$P = \varrho wA \cdot \frac{V^2}{2g} = \varrho wAH \quad \ldots . (725)$$

Alles in dem gegenwärtigen Paragraphe Vorgetragene behält auch nahezu Gültigkeit für den Fall, wo die Flüssigkeit ruhet und der Körper sich mit der Geschwindigkeit V bewegt, oder auch dann noch, wenn sich sowol die Flüssigkeit, wie der Körper bewegt, und die relative Geschwindigkeit Beider = V ist.

Es versteht sich jedoch von selbst, daß in den letzteren beiden Fällen die Koeffizienten m, n und ϱ nicht genau die früheren Werthe beibehalten werden, sondern aus besondern Beobachtungen für die letzteren Umstände abgeleitet sein müssen. Auch ist für den Fall, wo sich der Körper in der Flüssigkeit bewegt, noch zu bemerken, daß eine gewisse Quantität des Fluidums vermöge seiner Adhäsion an den Körper von Letzterem bei seiner Bewegung mit fortgerissen wird, und solchergestalt ein neues Hinderniß der Bewegung bildet. Das Volum dieser Quantität beträgt bei Kugeln etwa 0,585 bis 0,6 von dem Volum der Kugeln selbst.

In den Nachfolgenden Paragraphen werden wir die praktischen Erfahrungen über die Werthe des Widerstandskoeffizienten ϱ unter verschiedenen Verhältnissen mittheilen.

Zur Bestimmung der Koeffizienten m und n, aus welchen die durch die Ablenkung der Flüssigkeit hervorgehende Vermeh-

rung und Verminderung des hydrostatischen Druckes resp. gegen die Vorder- und Hinterfläche des Körpers zu erkennen sein würde, gibt es noch keine vollständig befriedigenden Beobachtungen. Duchemin, indem er den ganzen Unterschied zwischen dem Stoße eines isolirten Strahles gegen eine hinlänglich große ebene Fläche und dem Stoße einer unbegränzten Flüssigkeit gegen die Vorderfläche eines geraden Prismas vernachlässigt, setzt beide Fälle einander gleich und nimmt für solche prismatische Körper ohne weiteres $m=2$. Dabei hat er ganz unbeachtet gelassen, daß selbst bei einem isolirten Strahle der Werth von m abnimmt, wenn die Größe der gestoßenen Fläche unter einen gewissen Werth herabsinkt und daß nach der Bemerkung am Ende des §s 162 m sogar $=1$ werden würde, wenn die gestoßene Fläche nicht größer ist, als der Querschnitt des Strahles. Bei Berücksichtigung dieses Umstandes würde man gewiß der Wahrheit viel näher kommen, wenn man für den Stoß einer unbegränzten Flüssigkeit gegen die Vorderfläche eines Prismas $m=1$ setzte.

Bei der Bestimmung des Koeffizienten n für den Druck gegen die Hinterfläche findet Duchemin, wie schon früher erwähnt, sogar eine negative Größe, woraus hervorgehen würde, daß an der Hinterfläche keine Verminderung, sondern eine Vermehrung des Druckes stattfände. Dieses Resultat hat seinen Grund in einer unrichtigen Abschätzung der Wirkung eines Wasserstromes auf die Pitotsche Röhre, vermittelst welcher die Beobachtungen angestellt sind (s. §. 181).

§. 166. Gerader Stoß und Widerstand des unbegränzten Wassers gegen dünne ebene Flächen bei geradliniger und gleichförmiger Bewegung.

Wenn das Wasser in Bewegung und die Ebene in Ruhe ist; so kann man nach den Beobachtungen von Thibault und Rouse so lange

$$\varrho=1,85$$

annehmen, bis umfassendere Versuche genauere Werthe dieses Koeffizienten für die verschiedenen Verhältnisse der Dimensionen der Fläche und der Geschwindigkeit des Wasserstromes erkennen lassen.

Wenn das Wasser in Ruhe und die Ebene in Bewegung ist; so kann man nach den Beobachtungen von Piobert, Morin und Didion etwa

$$\varrho = 1{,}3 \text{ bis } 1{,}5$$

setzen, wobei angenommen ist, daß dieser Koeffizient nicht sehr von demjenigen abweiche, welcher den Widerstand der atmosphärischen Luft unter gleichen Verhältnissen mißt.

§. 167. Gerader Stoß und Widerstand des unbegränzten Wassers gegen prismatische Körper.

Wenn das Wasser in Bewegung und der Körper in Ruhe ist, und man bezeichnet mit l die Länge des Körpers, während A, wie früher, dessen Querschnitt ist; so hat man nach direkten Messungen von Dubuat

$$\text{für } \frac{l}{\sqrt{A}} = 0, \quad 1, \quad 3, \quad 6,$$

$$\varrho = 1{,}865, \ 1{,}451, \ 1{,}323, \ 1{,}360.$$

Da nun Dubuat und auch Duchemin gefunden haben, daß der Stoß auf die Vorderfläche A eines prismatischen Körpers von dessen Länge l ziemlich unabhängig ist, während die Größe, um welche sich der Druck gegen die Hinterfläche in Folge der Ablenkung der Flüssigkeit vermindert, mit zunehmender Länge schwächer wird; so folgt aus den vorstehenden Resultaten, daß wenn die Länge eines solchen Prismas seine mittlere Breite $\sqrt{A}$ um das Dreifache überschreitet, die Adhäsion der Flüssigkeit an die Seitenwände anfängt, vor der zuletzt erwähnten Größe die Oberhand zu gewinnen, in Folge welcher der Gesammtdruck auf das Prisma wieder anfängt zu wachsen.

Wenn das Wasser in Ruhe und der Körper in Bewegung ist; so hat man nach Marguerin bei geringen Geschwindigkeiten für Würfel durchschnittlich

$$\varrho = 1{,}27.$$

Die Versuche von Beaufoy mit rechtwinkligen Prismen von etwa 1 Quadratfuß Querschnitt und 10 Fuß Länge ergeben

bei Geschwindigkeiten von 12,7 Fuß in der Sekunde $\varrho = 1,44$
" " " 6,4 " " " " $\varrho = 1,50$
" " " 1,6 " " " " $\varrho = 1,58$

Duchemin hat für die beiden vorstehenden Fälle vermittelst zweier empirischen Formeln, welche er seinen eigenen und den Beobachtungen von Dubuat und Marguerin angepaßt hat, folgende Tabelle berechnet

Verhältniß der Länge des Körpers zu seinem Durchmesser.	Werth von ϱ	
	für bewegtes Wasser.	für ruhendes Wasser.
0	1,864	1,254
0,5	1,847	1,269
1	1,479	1,282
1,5	1,389	1,295
2	1,342	1,305
2,5	1,323	1,315
3	1,329	1,325
4	1,335	1,342
5	1,359	1,356
6	1,367	1,368
7	1,377	1,379
8	1,387	1,388

wobei nur noch zu bemerken ist, daß die Werthe von ϱ aus der dritten Spalte für ruhendes Wasser nach der Formel

$$\varrho = 1,254\left(1 + \frac{0,227l}{9a + l}\right) \quad \ldots \quad (726)$$

berechnet sind, worin l die Länge und a den Durchmesser des als Zylinder gedachten Körpers bezeichnet.

§. 168. Schiefer Stoß des bewegten Wassers gegen eine dünne ebene Fläche.

B sei die Größe der gestoßenen schiefen Fläche, und die Richtung der in Bewegung begriffenen Flüssigkeit neige sich unter dem Winkel α gegen die Ebene dieser Fläche. Bezeichnet man alsdann mit ϱ den Werth 1,864 des Koeffizienten für den Fall eines geraden Stoßes des Wassers gegen die Fläche; so gibt Duchemin

zur Bestimmung des Stoßes der Flüssigkeit parallel zu dessen Bewegung die Formel

$$\left.\begin{aligned} P &= \left(1 - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{6{,}48} + \frac{\cos^2\alpha}{3{,}52}\right)\frac{2\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}\,\varrho\,.\,w B\,\frac{V^2}{2g} \\ &= \left(1 - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{6{,}48} + \frac{\cos^2\alpha}{3{,}52}\right)\frac{2\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}\,\varrho\,.\,w B H \end{aligned}\right\} \ldots . (727)$$

welche er durch die Versuche von Thibault verifizirt.

Der Normalstoß gegen die schiefe Ebene, deren Eine Komponente die vorstehende Kraft ist, wird durch

$$N = \frac{P}{\sin\alpha} = \left(1 + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{6{,}48} + \frac{\cos^2\alpha}{3{,}52}\right)\frac{2\sin\alpha}{1+\sin^2\alpha}\,\varrho\,.\,w B\,\frac{V^2}{2g} \ldots . (728)$$

dargestellt.

Die Werthe des Koeffizienten

$$\left(1 - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{6{,}48} + \frac{\cos^2\alpha}{3{,}52}\right)\frac{2\sin\alpha}{1+\sin^2\alpha}$$

aus der letzteren Formel für den Normalstoß N, um welchen sich die Wirkung des schiefen Stoßes von der des geraden in normaler Richtung zur Fläche unterscheidet, sind in der nachfolgenden von Duchemin gegebenen Tabelle enthalten.

Einfallswinkel α	Werth des obigen Koeffizienten.
90°	1
68	0,9828
59,25	0,9846
44,80	1,0037
30	0,9170
24,25	0,8282
23,75	0,8186
20,29	0,7426

§. 169. Widerstand des ruhenden Wassers gegen eine in schiefer Richtung geradlinig bewegte dünne ebene Fläche.

Wenn B wieder die Größe der schiefen Fläche und α den Winkel bezeichnet, unter welchem sich die Richtung der Bewegung

der Fläche gegen deren Ebene neigt, während ϱ den Werth 1,254 des Widerstandskoeffizienten aus der Tabelle des §s 167 für den Fall einer geraden Bewegung der Ebene im Wasser darstellt; so findet Duchemin die Formel

$$P = \frac{2\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}\varrho . \mathfrak{w} B \frac{V^2}{2g} = \frac{2\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}\varrho . \mathfrak{w} BH \quad \ldots . (729)$$

mit den Beobachtungen von Bossut, Vince, Hutten und Thibault im Einklange. Es versteht sich hierbei von selbst, daß P den Widerstand des Wassers in einer der Bewegung der schiefen Ebene direkt entgegengesetzten Richtung, also die in diese Richtung fallende Komponente des normalen Widerstandes des Wassers gegen die Fläche darstellt. Dieser Normalwiderstand würde demnach

$$N = \frac{P}{\sin\alpha} = \frac{2\sin\alpha}{1+\sin^2\alpha}\varrho . \mathfrak{w} B \frac{V^2}{2g} \quad \ldots . (730)$$

sein.

Für den Koeffizienten

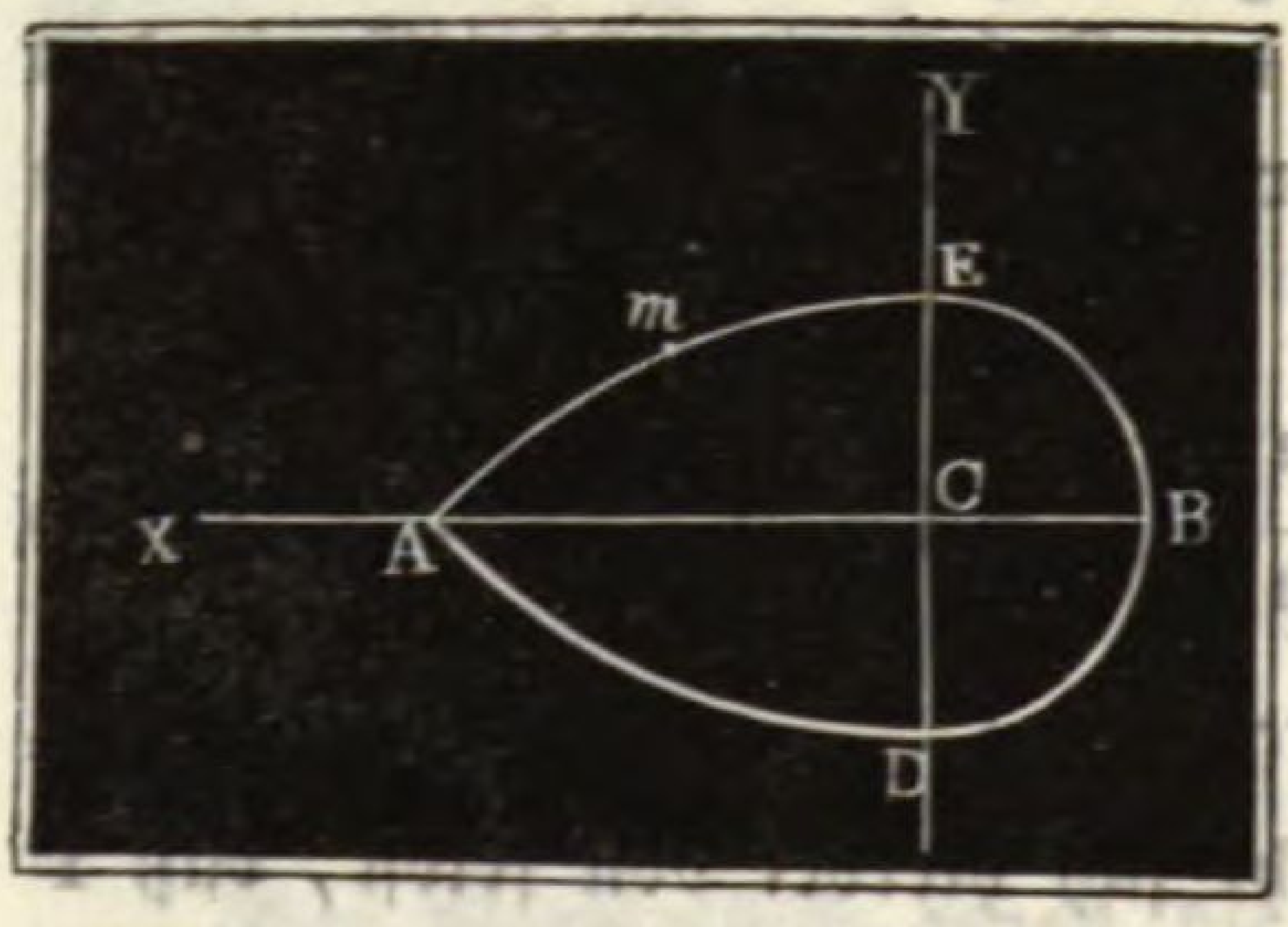
$$\frac{2\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}$$

aus der Formel (729) für den in paralleler Richtung zur Bewegung geleisteten Widerstand P gibt Duchemin die folgende Tabelle

Einfallswinkel α	Werth des obigen Koeffizienten.
90°	1
80	0,9846
70	0,9379
60	0,8571
50	0,7395
40	0,5848
30	0,4000
20	0,2095
10	0,0586

§. 170. Widerstand des unbegränzten ruhenden Wassers gegen einen geradlinig bewegten Körper, dessen Vordertheil durch eine krumme konvexe Oberfläche begränzt ist.

DAE sei eine ebene Kurve, durch welche das Vordertheil



eines Körpers entweder in der Weise erzeugt ist, daß sich diese Kurve um eine in ihrer Ebene liegende Axe **AB** drehet, oder indem sie sich perpendikular zu ihrer Ebene fortbewegt, sodaß die hierdurch beschriebene Oberfläche entweder zu den Umwälzungsflächen oder zu den zylindrischen Flächen gehört. **BA** sei die Richtung, nach welcher der Körper in ruhendem Wasser mit der Geschwindigkeit **V** bewegt werde, und **DE** sei der Durchschnitt des größten auf **BA** perpendikular stehenden Querschnittes des Körpers mit der Ebene **DAE**.

Es sei unter Beibehaltung der übrigen früheren Bezeichnungen, wenn man zur Bestimmung der Kurve **AE** die Linie **CA** als Axe der x und **CE** als Axe der y annimmt,

φ der Neigungswinkel irgend eines Elementes m der Kurve **AE** gegen die Axe **AC**,

s die Länge des Bogens **A**m, während x und y die Koordinaten des Punktes m vom Anfangspunkte **C** aus sind,

$\triangle$**A** die Größe der Projektion eines sehr kleinen bei m liegenden Elementes der durch die Kurve **DAE** erzeugten Fläche, auf die Ebene des größten Querschnittes **DE**,

A die Größe dieses größten Querschnittes **DE** selbst,

α der Neigungswinkel des bei **A** liegenden Kurvenelementes gegen die Axe **AC**,

l die größte Länge **AB** des Körpers in der Richtung der Bewegung,

a der größte Durchmesser **DE** in der Ebene **DAEB** perpendikular zu **AB** und

$r = \frac{a}{2} = \overline{CE}$.

Duchemin findet es durch die Versuche vieler Experimentatoren bestätigt, daß der Widerstand der unbegränzten Flüssigkeit in der der Bewegung des Körpers direkt entgegengesetzten Richtung **AB** für irgend ein bei m liegendes Flächenelement des Vordertheiles, dessen Projektion $\triangle$**A** ist, der Größe

$$V^2 \frac{\sin^3\varphi}{\sin^2\alpha} \triangle A$$

proportional sei, und daß man für diesen Widerstand gegen das fragliche Flächenelement

$$\varrho w \frac{V^2}{2g} \frac{\sin^3\varphi}{\sin^2\alpha} \triangle A$$

setzen könne, worin ϱ den Werth des nach Formel (726) berechneten oder aus der dritten Spalte der in §. 167 mitgetheilten Tabelle entnommenen Widerstandskoeffizienten bezeichnet.

Nimmt man die mit Σ bezeichnete Summe des vorstehenden Ausdruckes für das ganze Vordertheil, d. h. für denjenigen Theil **DAE** der Oberfläche des Körpers, welcher zwischen der Spitze **A** und dem größten auf der Richtung der Bewegung perpendikular stehenden Querschnitte **DE** liegt; so erhält man für den gesammten Widerstand der Flüssigkeit

$$P = \varrho w \frac{V^2}{2g\sin^2\alpha} \Sigma \sin^3\varphi . \triangle A \quad \ldots . (731)$$

Zugleich schließt Duchemin aus verschiedenen Beobachtungen, daß die Form des Hintertheiles **DBE** des Körpers nur einen sehr unbedeutenden Einfluß auf den Werth des vorstehenden Widerstandes habe.

Sieht man die Ordinate y des Punktes m als die unabhängig Veränderliche und die Länge s des Bogens **A**m als eine Funktion von y an; so hat man

$$\frac{ds}{dy} = \frac{1}{\sin\varphi} \text{ oder } \sin\varphi = \frac{1}{\left(\frac{ds}{dy}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}$$

$\sin\alpha$ ist der Werth dieses letzteren Ausdruckes von $\sin\varphi$, wenn man darin $y = o$ setzt.

Hiernach kann die Formel (731) auch geschrieben werden

$$P = \varrho w \frac{V^2}{2g\sin^2\alpha} \Sigma \frac{\triangle A}{\left(\frac{ds}{dy}\right)^3} \quad \ldots . (732)$$

Wäre die durch die Kurve **AE** erzeugte Fläche eine Um-

wälzungsfläche von der Axe AC; so würde ein bei m liegendes Element jener Kurve von der Länge ds bei seiner Umwälzung um die letztere Axe eine Zone beschreiben, welche überall dieselbe Neigung gegen die Axe hat, und deren Projektion auf die Ebene des Querschnittes A

$$\triangle A = 2\pi y . dy$$

ist. Substituirt man diesen Ausdruck für $\triangle A$ in die obige Gl. (732); so kommt für Körper, deren Vordertheil durch eine Umwälzungsfläche begränzt ist,

$$P = 2\pi \varrho w \frac{V^2}{2g \sin^2 \alpha} \Sigma \frac{y dy}{\left(\frac{ds}{dy}\right)^3}$$

d. i., wenn man beachtet, daß die durch Σ angedeutete Summe hier von $y = o$ bis $y = r$ zu nehmen ist,

$$P = 2\pi \varrho w \frac{V^2}{2g \sin^2 \alpha} \int_o^r \frac{y dy}{\left(\frac{ds}{dy}\right)^3} \quad \ldots . (733)$$

Wäre dagegen die durch die beiden kongruenten Kurven AE und AD erzeugte Fläche eine zylindrische Oberfläche, welche dadurch entstanden wäre, daß sich jene Kurven parallel zu einer auf ihrer Ebene perpendikular stehenden Linie fortbewegt hätten; so würde, wenn man die Höhe des Körpers in perpendikularer Richtung zu der Ebene DAE mit h bezeichnet, irgend ein Element der Kurve AE von der Länge ds ein Flächenelement beschreiben, dessen Projektion auf die Ebene des Querschnittes A

$$\triangle A = h dy$$

ist. Nimmt man diesen Ausdruck in Berücksichtigung des ähnlich liegenden Elementes der zweiten Kurve AD doppelt, und substituirt denselben alsdann in Gl. (732); so erhält man für Körper, deren Vordertheil durch eine zylindrische Oberfläche begränzt ist,

$$P = 2 \varrho w h \frac{V^2}{2g \sin^2 \alpha} \Sigma \frac{dy}{\left(\frac{ds}{dy}\right)^3},$$

oder da die durch Σ angedeutete Summe von $y=o$ bis $y=r$ genommen werden muß,

$$P = 2 \varrho w h \frac{V^2}{2g \sin^2 \alpha} \int_o^r \frac{dy}{\left(\frac{ds}{dy}\right)^3} \quad \dots . (734)$$

§. 171. Widerstand des ruhenden Wassers gegen eine geradlinig bewegte Kugel.

In diesem Falle hat man mit Bezugnahme auf die allgemeinen Gleichungen des vorhergehenden Paragraphs für die erzeugende Kurve AE die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

oder

$$x = \sqrt{r^2 - y^2},$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}},$$

und daher, weil

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \text{ ist,}$$

$$\sin \varphi = \frac{ds}{dy} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}},$$

und für $y=o$

$$\sin \alpha = 1.$$

Substituirt man diese Werthe in die allgemeine für Rotationskörper geltende Formel (733); so kommt für den gesuchten Widerstand des ruhenden Wassers gegen eine geradlinig bewegte Kugel

$$P = 2 \pi \varrho w \frac{V^2}{2g} \int_o^r \frac{(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} y dy}{r^3} = \frac{2}{5} r^2 \pi \varrho w \frac{V^2}{2g},$$

oder da die Fläche des größten Querschnittes $r^2 \pi = A$ ist,

$$P = \frac{2}{5} r^2 \pi \varrho w \frac{V^2}{2g} = \frac{2}{5} \varrho w A \frac{V^2}{2g}, \quad \dots . (735)$$

sodaß der Widerstand gegen eine Kugel unter sonst gleichen Umständen nur $\frac{2}{5}$ von dem eines Zylinders beträgt, welcher um die Kugel beschrieben ist und sich in der Richtung seiner Axe bewegt. Dieses Resultat ist durch die Versuche von Borda, Vince und Hutton bestätigt worden.

Da man hier, wo $l=a=2r$ ist, nach Gl. (726)

$$\varrho=1{,}28, \text{ also } \frac{2}{5}\varrho=0{,}512$$

hat; so wird Gl. (735)

$$P=0{,}512 \,.\, w A \frac{V^2}{2g}, \quad \ldots \quad (736)$$

eine Formel, welche mit den Versuchen von Borda und Newton übereinstimmt.

§. 172. Widerstand des ruhenden Wassers gegen einen in der Richtung seiner Axe bewegten Kegel.

In diesem Falle, wobei angenommen ist, daß die Spitze des Kegels voranschreite, wird die Kurve AE, welche die Kegeloberfläche durch Umwälzung um die Axe AB erzeugt, eine Gerade, welche sich unter dem Winkel α gegen AB neigt und für welche man, da $CE=r$ ist,

$$x=\frac{r-y}{\operatorname{tang}\alpha},$$

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{\operatorname{tang}\alpha},$$

$$\frac{ds}{dy}=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{\operatorname{tang}^2\alpha}}=\frac{1}{\sin\alpha}$$

hat.

Hierdurch wird die Gl. (733) für den gesuchten Widerstand

$$P=2\pi\varrho w\frac{V^2}{2g}\sin\alpha\int_0^r y\,dy=\varrho w r^2\pi\frac{V^2}{2g}\sin\alpha=\varrho w A\frac{V^2}{2g}\sin\alpha$$

$$\ldots \quad (737)$$

Hierin bezeichnet A die Grundfläche des Kegels und ϱ den

Widerstandskoeffizienten nach Gl. (726), wenn man darin für a den Durchmesser DE der Basis und für l die Höhe AC des Kegels substituirt.

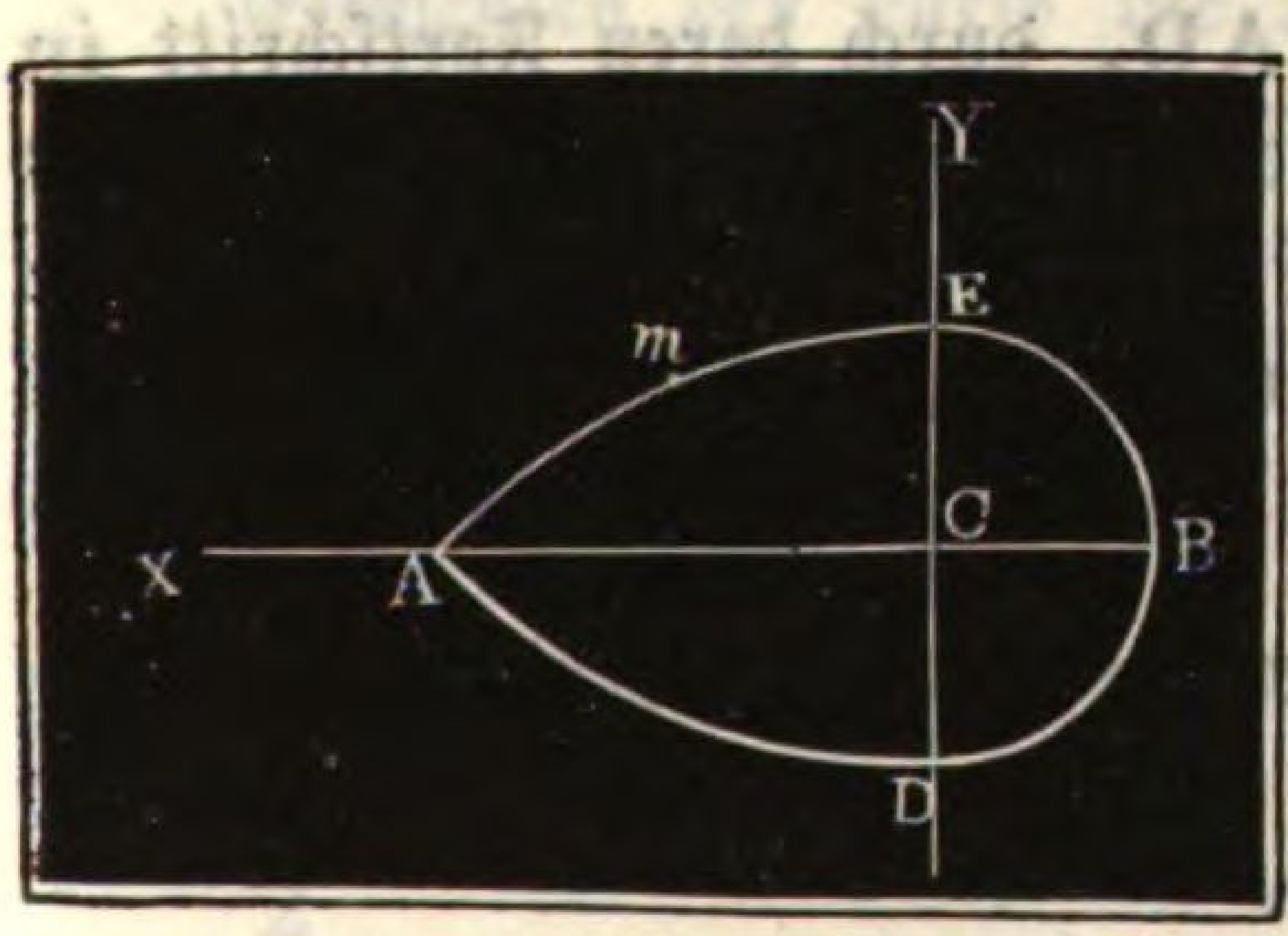
Bewegte man unter sonst gleichen Umständen denselben Kegel dergestalt in der Richtung seiner Axe, daß die auf dieser Axe perpendikular stehende Grundfläche voranschritte; so würde nach den Prinzipien des §s 170

$$\varrho w A \frac{V^2}{2g}$$

der Widerstand sein, welchen die Flüssigkeit dem Kegel entgegensetzte, worin ϱ denselben Werth hätte, wie in Gl. (737). Hieraus folgt, daß sich der zuerst betrachtete Widerstand, welchen der Kegel bei voranschreitender Spitze erfährt, zu dem letzteren Widerstande, welchen der Kegel bei voranschreitender Grundfläche erleidet, wie $\sin\alpha : 1$ verhält. Dieses Resultat findet sich durch die Beobachtungen von Borda und Hutton bestätigt.

§. 173. Widerstand des ruhenden Wassers gegen einen geraden Zylinder mit kreisförmiger Basis, welcher sich perpendikular zu seiner Axe bewegt.

Wenn das Vordertheil des in §. 170 betrachteten Körpers eine zylindrische Oberfläche ist, welche dadurch entstanden ist, daß sich die beiden kongruenten Kurven AE und AD in einer auf ihrer Ebene perpendikular stehenden Richtung fortbewegen; so gilt für den Widerstand, welchen ein solcher Körper bei seiner Bewegung nach BA im ruhenden Wasser erleidet, die Formel (734).



Sind nun AE und AD Viertelkreise, deren Mittelpunkte in C liegen; so hat man unter Substitution der in §. 171 bereits angegebenen Werthe für $\frac{ds}{dy}$ und $\sin\alpha$ in Gl. (734) als Ausdruck für den gesuchten Widerstand

$$P = 2\varrho w h \frac{V^2}{2g} \int_0^r \frac{(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} dy}{r^3},$$

oder da

$$\int \frac{(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} dy}{r^3} = \frac{y(5r^2 - 2y^2)\sqrt{r^2 - y^2}}{8r^3} + \frac{3r}{8} \arcsin \frac{y}{r},$$

mithin

$$\int_0^r \frac{(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} dy}{r^3} = \frac{3}{8} \frac{\pi}{2} r = 0{,}589\, r$$

ist,

$$P = 0{,}589 \,.\, \varrho w \,.\, 2rh \frac{V^2}{2g} = 0{,}589 \,.\, \varrho w A \frac{V^2}{2g}, \quad \ldots \; (738)$$

worin A die Fläche $2rh$ des durch die Axe des Zylinders gehenden Durchschnittes bezeichnet.

Das vorstehende Resultat hat durch einige Versuche von Borda seine Bestätigung gefunden.

§. 174. Widerstand des ruhenden Wassers gegen einen Keil, dessen Schärfe voranschreitet.

Wenn die Kurven AE und AD, durch deren Fortschritt in perpendikularer Richtung zur Ebene DAE das Vordertheil des Körpers beschrieben ist, gerade Linien bilden, welche sich unter dem Winkel α gegen die Linie AC neigen; so stellt dieses Vordertheil einen Keil dar, für welchen man nach Gl. (734) und bei gehöriger Substitution des entsprechenden Werthes von $\frac{ds}{dy} = \frac{1}{\sin\alpha}$ aus §. 172

$$P = 2\varrho w h \frac{V^2}{2g} \sin\alpha \int_0^r dy$$

d. i.

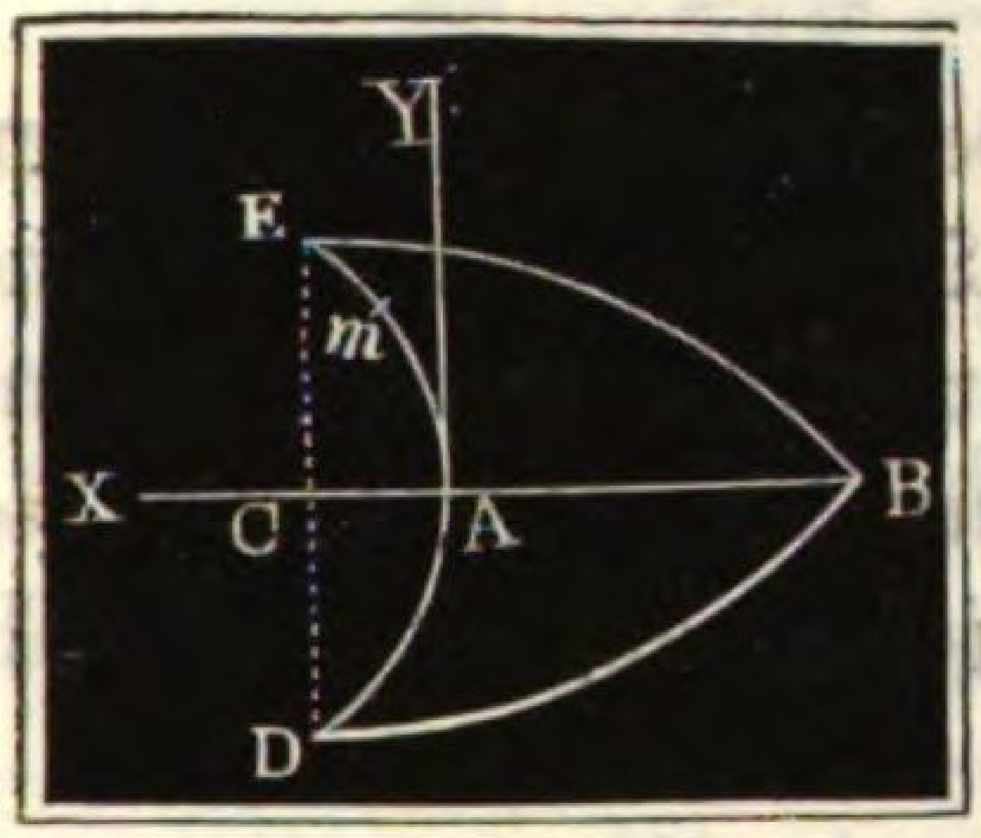
$$P = 2\varrho w h r \frac{V^2}{2g} \sin\alpha = \varrho w A \frac{V^2}{2g} \sin\alpha \quad \ldots \; (739)$$

erhält. Hierin bezeichnet $A = 2hr$ die der Schärfe des Keiles gegenüberliegende rechtwinklige Basis desselben, und ϱ hat den Werth aus Gl. (726), wenn man darin für l die Dimension AB und für a die Dimension DE nimmt.

Das vorstehende Resultat ist mit den Versuchen von Borda im Einverständnisse.

§. 175. Widerstand des ruhenden Wassers gegen einen geradlinig bewegten Körper, dessen Vordertheil durch eine konkave Umwälzungsfläche begränzt ist.

Für einen Körper der vorstehenden Art, wo das Vordertheil DAE konkav ist und eine durch die Kurve AE erzeugte Umwälzungsfläche von der Axe AB bildet, sei A der Anfangspunkt der Koordinatenaxen AX und AY, ferner



φ der Neigungswinkel irgend eines Elementes m der Kurve AE gegen die Axe BA,

s die Länge des Bogens Am, während x und y die Koordinaten des Punktes m vom Anfangspunkte A aus sind,

$\triangle A$ die Größe der Projektion des sehr kleinen bei m liegenden Elementes der durch die Kurve AE erzeugten Fläche auf die Ebene des größten Querschnittes DE,

A die Größe dieses größten Querschnittes DE selbst,

l die größte Länge CB des Körpers in der Richtung der Bewegung,

a der größte Durchmesser DE in der Ebene BED, perpendikular zu AB,

$r = \frac{a}{2} = \overline{\text{CE}}$.

Bewegt sich nun der Körper in der Richtung BA; so schließt Duchemin, daß der Widerstand der Flüssigkeit in entgegengesetzter Richtung der Bewegung für jedes Flächenelement der Fläche DAE, dessen Projektion auf die Ebene DE gleich $\triangle A$ ist, der Größe

$$V^2 (\sin\varphi + \cos\varphi) \triangle A$$

proportional sei, und daß man für diesen elementaren Widerstand

$$\varrho w \frac{V^2}{2g} (\sin\varphi + \cos\varphi) \triangle A$$

setzen könne, worin ϱ den Werth des Widerstandskoeffizienten aus Gl. (726) hat, wenn man darin $t = \overline{CB}$ und $a = \overline{DE}$ substituirt.

Stellt nun Σ eine für die ganze Ausdehnung der Fläche DAE genommene Summe dar; so hat man für den gesammten Widerstand der Flüssigkeit in einer der Bewegung des Körpers direkt entgegengesetzten Richtung

$$P = \varrho w \frac{V^2}{2g} \Sigma (\sin\varphi + \cos\varphi) \triangle A \qquad \ldots . (740)$$

Sieht man bei der Bestimmung der Kurve AE und der daraus erzeugten Umwälzungsfläche die Ordinate y als die unabhängig veränderliche Größe an; so wird ein jedes Element jener Kurve von der Länge ds bei seiner Umwälzung um die Axe AB eine Zone beschreiben, deren Projektion auf die Ebene DE

$$\triangle A = 2\pi y\, dy$$

ist. Hierdurch geht die obige Gleichung in

$$P = 2\pi \varrho w \frac{V^2}{2g} \int_0^r (\sin\varphi + \cos\varphi) y\, dy \qquad \ldots . (741)$$

über. Die Werthe von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ in dieser Gleichung sind bekanntlich

$$\sin\varphi = \frac{1}{\left(\frac{ds}{dy}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{\left(\frac{dx}{dy}\right)}{\left(\frac{ds}{dy}\right)} = \frac{\left(\frac{dx}{dy}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}.$$

Wäre die Kurve AE ein mit dem Radius r_1 beschriebener Kreisbogen; so hätte man

$$x = r_1 - \sqrt{r_1^2 - y^2},$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{r_1^2 - y^2}},$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{r_1^2 - y^2}}{r_1}, \quad \cos\varphi = \frac{y}{r_1};$$

mithin nach Gl. (741)

$$P = 2\pi\varrho w \frac{V^2}{2g} \int_0^r \frac{1}{r_1} (y\sqrt{r_1^2 - y^2} + y^2)\, dy$$

$$= \frac{2}{3}\pi\varrho w \frac{V^2}{2g} \left(\frac{r^3 - (r_1^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} + r_1^3}{r_1} \right).$$

Setzt man nun den Zentrumswinkel des Bogens AE oder AD gleich β und berücksichtigt, daß $\frac{r}{r_1} = \sin\beta$ und $\pi r^2 = A$ ist; so reduzirt sich der vorstehende Ausdruck auf

$$P = \frac{2}{3}\varrho w A \frac{V^2}{2g} \left(\frac{1 + \sin^3\beta - \cos^3\beta}{\sin^2\beta} \right) \quad \ldots (742)$$

Die Resultate dieser Formel stimmen mit den Versuchen von Dubuat und Thibault überein.

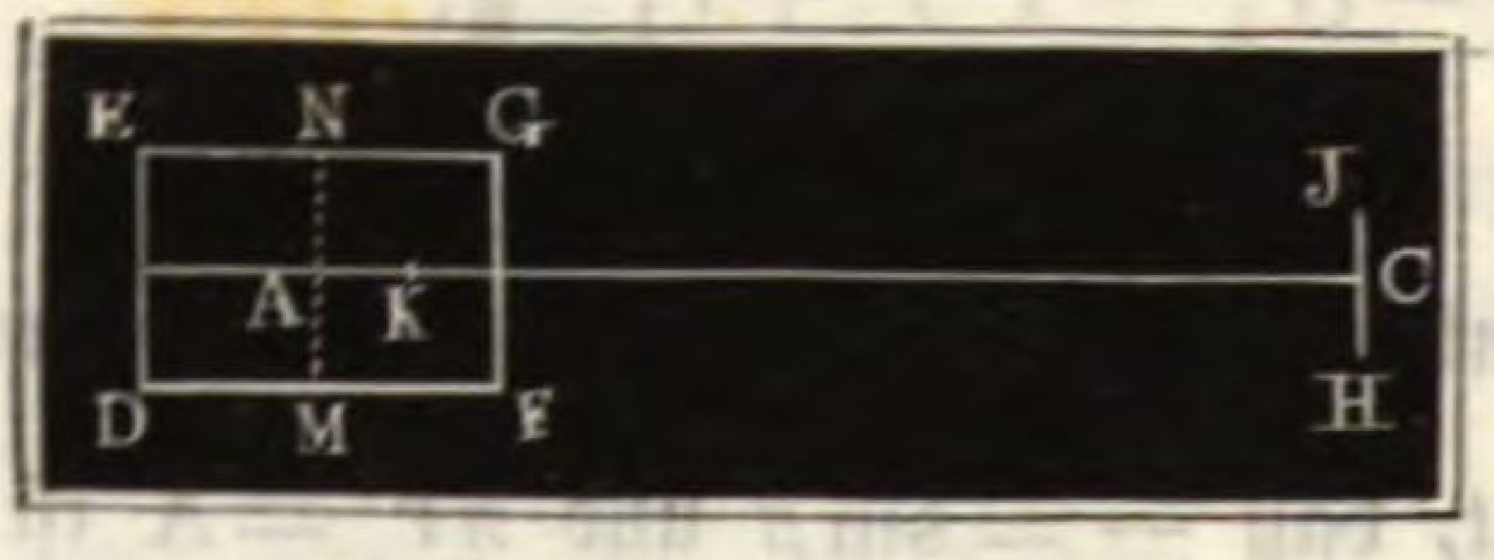
Wenn man in dem vorstehenden Werthe des Widerstandes P alle übrigen Größen als konstant ansieht, und nur den Zentrumswinkel β des Bogens AE variiren läßt; so findet man, daß das Maximum jenes Widerstandes erreicht wird, wenn β etwa $= 60^0$ ist, oder wenn sich die Linien CA und CE wie 1 : 3,464 verhalten. Auch dieses Resultat wird durch die Beobachtungen bestätigt.

§. 176. Widerstand des ruhenden Wassers gegen einen im Kreise gleichförmig herumbewegten Körper.

Die früheren Formeln für den Widerstand einer ruhenden Flüssigkeit gegen einen darin bewegten Körper beziehen sich immer nur auf den Fall, wo dieser Körper in einer geraden Linie nach der jedesmal näher bezeichneten Richtung mit gleichförmiger

Geschwindigkeit fortschreitet. Geht nun aber diese Bewegung in der Richtung eines Kreisumfanges vor sich, wie wenn der Körper mit dem Mittelpunkte dieses Kreises durch eine starre unbiegsame Linie verbunden wäre, welche um den Mittelpunkt drehbar ist; so stellt sich der in der Tangente des Kreisumfanges wirkende Widerstand der Flüssigkeit wegen der fortwährenden Änderung, welche die Richtungen der abgelenkten Stromfäden erleiden, etwas größer heraus, als bei der geradlinigen Bewegung des Körpers.

Um jenen Widerstand zu bestimmen; so sei HJ die feste Axe im Raume, um welche sich der gegebene Körper bewegt, DEGF sei die Projektion des Vordertheiles des Körpers auf eine durch die Umdrehungsaxe HJ gelegte und durch die vorderste Spitze des Körpers gehende Ebene, A



sei der Mittelpunkt der Projektion DEGF, und wenn man in dieser Figur die Linie MN durch den Punkt A parallel zu der Umdrehungsaxe HJ zieht; so sei K der Schwerpunkt des Theiles MNGF jener Projektion, welcher auf der Seite der Umdrehungsaxe liegt. Ferner bezeichne

A die Fläche der Projektion DEGF,

V die Geschwindigkeit des Mittelpunktes A dieser Projektion in dem Umfange des um C mit dem Halbmesser CA beschriebenen Kreises,

$f =$ CA den Abstand des Mittelpunktes A von der Rotationsaxe,

$e =$ AK den Abstand des Schwerpunktes K der Figur MNGF von dem Mittelpunkte A,

a den Durchmesser der Projektion DEGF in dem Falle, wo diese Projektion ein Kreis und der Körper ein Rotationskörper um eine in A auf DEGF perpendikular stehende Axe ist,

$r = \frac{a}{2}$,

α die Neigung des vordersten Elementes der Vorderfläche des Körpers im Punkte A gegen die Richtung der Bewegung, also gegen ein in A auf der Projektion DEGF errichtetes Perpendikel,

l die Länge des Körpers in der Richtung des eben erwähnten Perpendikels,

δ eine Größe, welche die Dicke der parallel zu der vorderen Fläche des Körpers abgelenkten Wasserfäden darstellt, und $=\frac{1}{2}a\sin\alpha$ oder $=r\sin\alpha$ ist, wenn das Vordertheil des Körpers eine Umwälzungsfläche bildet, und $=\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{A}}\,.\sin\alpha$, wenn Dies nicht der Fall ist,

ϱ den Widerstandskoeffizienten nach Gl. (726) für ein geradlinig bewegtes Prisma von der Basis DEGF und der Länge l,

P den Widerstand, welchen der Körper erfahren würde, wenn er sich mit der Geschwindigkeit V in tangentialer Richtung zu seiner Bahn geradlinig fortbewegte, ein Widerstand, welcher nach den Formeln der §§. 166 bis 175 zu bestimmen ist,

P′ den Widerstand, welchen der Körper bei seiner kreisförmigen Bahn wirklich erleidet und welcher, als durch den Mittelpunkt A wirkend, gedacht wird.

Durch Vergleichung der Beobachtungsresultate vieler Experimentatoren hat Duchemin gefunden, daß man als empirische Formel, welche übrigens auf eine rationelle Betrachtung der Wirkung der von der ausweichenden Flüssigkeit hervorgebrachten Zentrifugalkraft gegründet ist,

$$\mathrm{P}'=\mathrm{P}\left[1+\frac{3{,}2488\,.\,\delta}{\varrho(f-e)}\right] \quad \ldots\ldots (743)$$

setzen könne.

Wäre der in Rede stehende Körper z. B. eine dünne rechtwinklige Platte von den Dimensionen DE $=b$ und EG $=c$, und läge ihre Oberfläche in einer Ebene, welche durch die Rotationsaxe HJ ginge; so würde man

$$e=\overline{\mathrm{AK}}=\frac{1}{4}c,$$

$$\alpha=90^{0},\ \delta=\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{A}}=\frac{1}{2}\sqrt{bc},$$

$$\varrho=1{,}254 \text{ (vergl. §. 167)}$$

und demnach

$$P' = P\left(1 + 1{,}295\frac{\sqrt{A}}{f - \frac{1}{4}c}\right) \quad \ldots\ldots (744)$$

haben, worin außerdem

$$P = \varrho w A \frac{V^2}{2g} = 1{,}254 w A \frac{V^2}{2g}$$

ist.

Wenn dieselbe dünne ebene Platte eine Neigung gegen die Richtung ihrer Bewegung besäße und zwar so, daß ihre Ebene durch die Linie AC ginge; so werde der Neigungswinkel dieser Ebene gegen die Richtung der Bewegung durch α dargestellt, die Größe der schräg liegenden Platte sei B, also ihre Projektion $DEGF = A = B \sin\alpha = bc \sin\alpha$, indem b und c die Dimensionen der schrägen Plattenfläche B darstellen. Hiernach würde man

$$e = \frac{1}{4}c,$$

$$\delta = \frac{1}{2}\sqrt{A} \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{B \sin^3\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{bc \sin^3\alpha},$$

$$\varrho = 1{,}254;$$

mithin

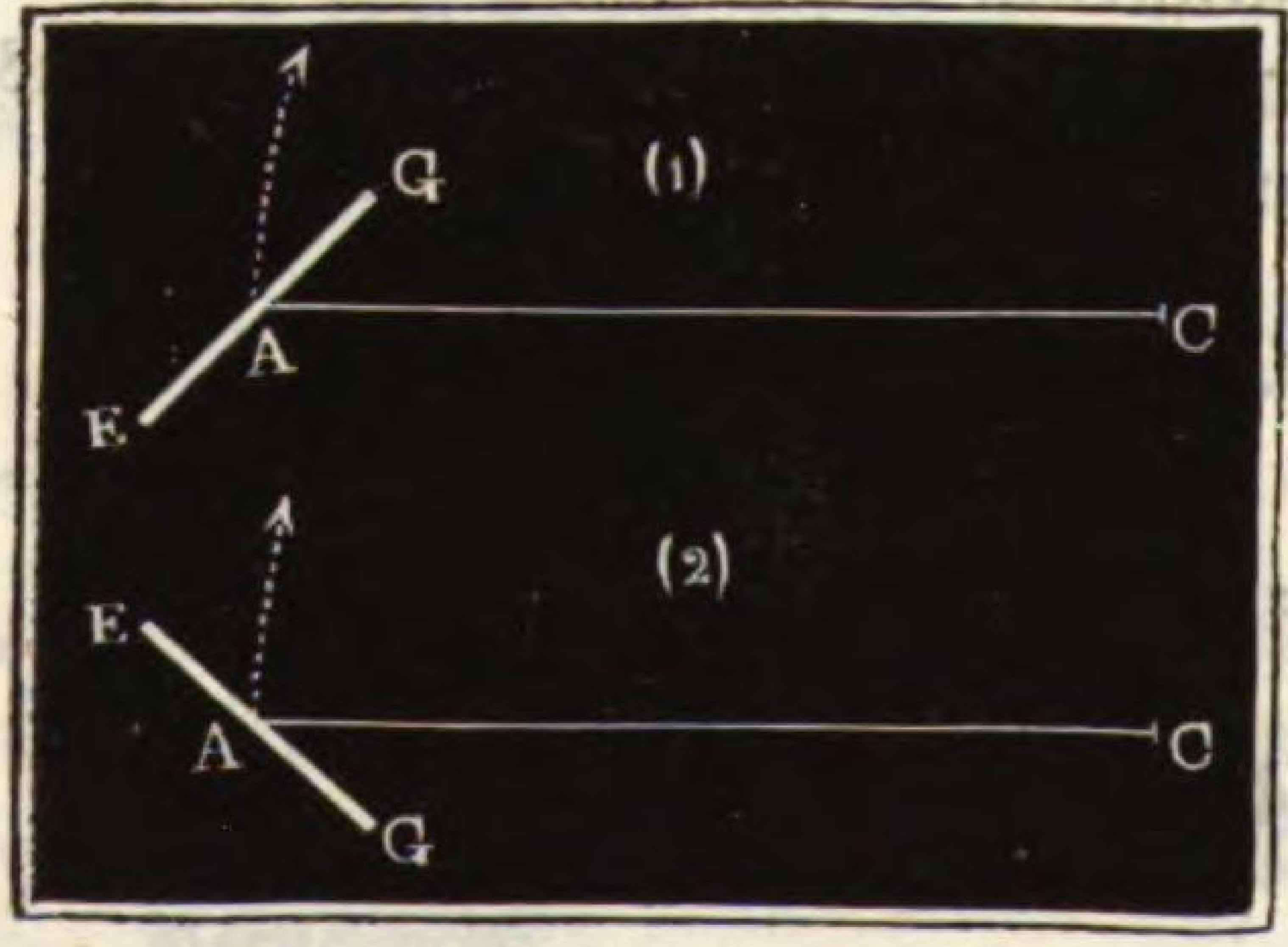
$$P' = P\left(1 + 1{,}295\frac{\sqrt{B \sin^3\alpha}}{f - \frac{1}{4}c}\right) \quad \ldots\ldots (745)$$

haben, worin aber nach Gl. (729)

$$P = \frac{2\sin^2\alpha}{1 + \sin^2\alpha}\varrho \cdot w B \frac{V^2}{2g}$$

ist.

Ginge die geneigte Ebene der Platte DEGF nicht durch die Linie AC, sondern durch die mit der Rotationsaxe HJ parallele Linie MN; so sind die beiden in den seitstehenden Figuren dargestellten Fälle zu unterscheiden, in welchen der Hebelarm CA entweder **hinter** der Platte, wie in Fig. (1), oder **vor** der Platte, wie in Fig. (2), liegt.



Wenn der Neigungswinkel der beiden vorstehenden Platten gegen die auf AC perpendikular stehende Richtung der Bewegung $=\alpha$ ist; so müßte zwar nach den allgemeinen Auseinandersetzungen des gegenwärtigen Paragraphs, indem man

$$e=\frac{1}{4}c\cos\alpha,$$

$$\delta=\frac{1}{2}\sqrt{A}.\sin\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{B.\sin^3\alpha},$$

$$\varrho=1{,}254$$

setzte, die Formel

$$P'=P\left(1+1{,}295\,\frac{\sqrt{B\sin^3\alpha}}{f-\frac{1}{4}c\cos\alpha}\right)$$

beiden Fällen zugleich genügen; die Erfahrung lehrt jedoch, daß der Widerstand bei der Bewegung nach Fig. (1) etwas größer ist, als der nach Fig. (2), und daß der kurz zuvor betrachtete Widerstand für die Anordnung, auf welche sich Gl. (745) bezieht, zwischen den vorstehenden beiden liegt, wenn in allen Fällen die bewegte Platte dieselbe Größe B und dieselbe Neigung α gegen die Richtung der Bewegung hat. Bezeichnet man den nach Gl. (745) bestimmten Widerstand mit P′, ferner den für die Fig. (1) mit P″ und den für die Fig. (2) mit P‴; so kann man nach Duchemin

$$P''=P'(1+1{,}03\sin\alpha\cos\alpha) \quad \ldots (746)$$

und

$$P'''=P'(1-0{,}52\sin\alpha\cos\alpha) \quad \ldots (747)$$

annehmen.

Wäre der im Kreise sich drehende Körper eine Kugel vom Halbmesser r; so würde, weil hier $\alpha=90^0$ ist,

$$\delta=\frac{1}{2}a=r,$$

ferner der Abstand des Schwerpunktes des Halbkreises vom Mittelpunkte

$$e=\frac{4r}{3\pi}$$

und endlich nach Gl. (726) für $a = l$

$$\varrho = 1{,}28$$

sein. Demnach würde man für den gesuchten Widerstand nach Gl. (743)

$$P' = P\left[1 + \frac{3{,}2488 r}{1{,}28\left(f - \frac{4 r}{3 \pi}\right)}\right]$$

oder

$$P' = P\left[1 + 2{,}538\left(\frac{r}{f - \frac{4 r}{3 \pi}}\right)\right] \quad . \; . \; . \; . \; (748)$$

haben, worin wegen Gl. (736)

$$P = 0{,}512 . w A \frac{V^2}{2g}$$

ist. Diese Formel schließt sich den Versuchen von Borda ganz gut an.

§. 177. Widerstand des ruhenden Wassers gegen schwimmende Körper.

Über den Widerstand, welchen das Wasser den auf seiner Oberfläche schwimmenden Körpern bei ihrer Bewegung entgegensetzt, lassen die bis jetzt angestellten Beobachtungen mehr Unsicherheit zurück, als die in den vorstehenden Paragraphen mitgetheilten Erfahrungen über den Widerstand einer nach allen Seiten unbegränzten Flüssigkeit gegen einen darin bewegten Körper. Man kann den Inbegriff der aus den jetzt bekannten Versuchen mit schwimmenden Körpern zu ziehenden Lehren etwa in Folgendem zusammenfassen.

Wenn man die in den früheren Paragraphen eingeführten Bezeichnungen auf den untergetauchten Theil des schwimmenden Körpers im Zustande der Ruhe anwendet, sodaß also besonders A den größten Querschnitt dieses unter dem Wasserspiegel liegenden Theiles in normaler Richtung auf der Bewegung des Körpers bezeichnet; so kann der fragliche Widerstand P nahezu durch Formeln dargestellt werden, welche den für ganz eingetauchte

Körper gegebenen gleich sind, vorausgesetzt, daß die Gestalt des untergetauchten Theiles mit der des zuletzt gedachten Körpers übereinstimme. Jedoch zeigt es sich besonders bei denjenigen Körpern, deren Vordertheile nach vorn schmaler werden, daß dieselben einen etwas geringeren Widerstand erfahren, wenn sie schwimmen, als wenn sie mit gleichem benetzten Querschnitte ganz untergetaucht sind.

Für prismatische Körper mit gerader Basis, welche in der Richtung ihrer Axe schwimmen, kann man nach Duchemin

$$P = \varrho w A \frac{V^2}{2g} \quad \ldots \text{(749)}$$

setzen, worin ϱ den Werth des Widerstandskoeffizienten aus Gl. (726) oder aus der dritten Spalte der in §. 167 gegebenen Tabelle hat.

Wenn ein solcher prismatischer Körper mit einem zylindrischen Vordertheile versehen ist, dessen horizontaler Durchschnitt einen Halbkreis bildet; so kann man statt der Formel (738) nach den Beobachtungen von Bossut die folgende

$$P = 0{,}5 \varrho w A \frac{V^2}{2g} \quad \ldots \text{(750)}$$

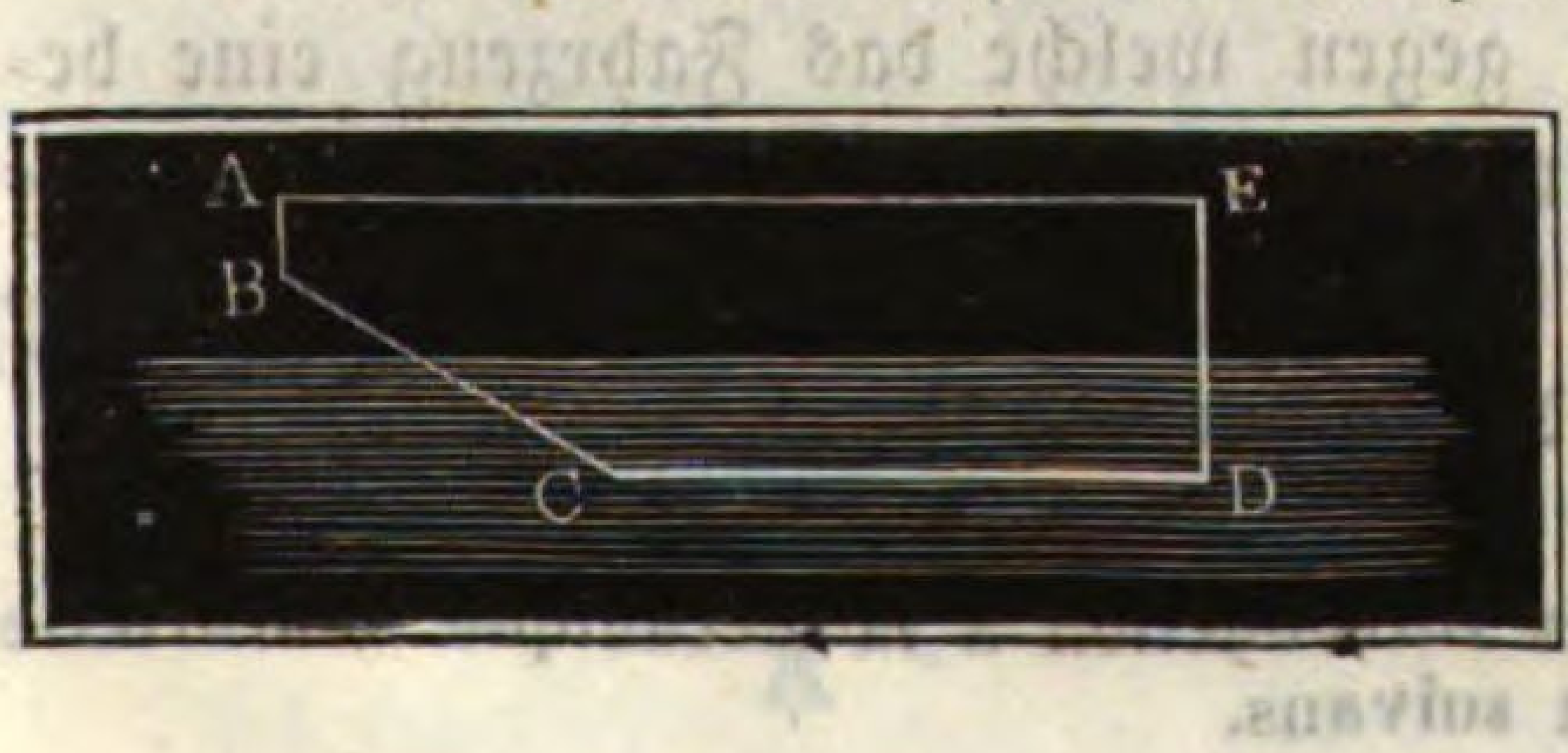
annehmen, worin ϱ ebenfalls nach Gl. (726) zu berechnen ist.

Hat der prismatische Körper ein keilförmiges Vordertheil, dessen vordere Kante vertikal steht, und bei welchem sich eine jede Seitenfläche unter dem Winkel α gegen die horizontale Axe des Körpers neigt; so hat man nach Duchemin statt der Formel (739 die nachstehende

$$P = 0{,}75 \varrho w A \frac{V^2}{2g} \sin\alpha \quad \ldots \text{(751)}$$

in Anwendung zu bringen.

Bei einem Vordertheile, welches durch eine geneigte Ebene BC unterschnitten ist, hat man, wenn sich die Ebene BC unter einem Winkel von 43° gegen den Horizont neigt, nach Bossuts Beobachtungen



$$P = 0{,}55\, \varrho\, w\, A\, \frac{V^2}{2g} \quad \ldots . (752)$$

und wenn sich jene Ebene unter einem Winkel von 25° 26′ gegen den Horizont neigt,

$$P = 0{,}43\, \varrho\, w\, A\, \frac{V^2}{2g} \quad \ldots . (753)$$

zu setzen.

Durch die Anbringung eines keilförmigen Hintertheiles, dessen Länge gleich der doppelten Breite war, an Einen der vorstehend betrachteten Körper vermindert sich der Widerstand P etwa um $\frac{1}{10}$.

Für Körper, welche die Form der besten auf dem Meere gehenden Fahrzeuge besitzen, hat man nach den Beobachtungen von Bossut und Morin bei mäßigen Geschwindigkeiten bis zu 5 Fuß in der Sekunde den äußerst geringen Werth von

$$\left.\begin{array}{l} P = 0{,}22\, w\, A\, \frac{V^2}{2g} \\ \text{bis } 0{,}27\, w\, A\, \frac{V^2}{2g} \end{array}\right\} \quad \ldots . (754)$$

gefunden. Mit zunehmender Geschwindigkeit des Fahrzeuges wächst der Werth des Koeffizienten nach den Beobachtungen von Macneill, Russel und Morin in dieser Formel übrigens sehr bedeutend und kann sogar für Geschwindigkeiten von etwa 9 bis 10 Fuß in der Sekunde den doppelten Werth erreichen. Bei noch größeren Geschwindigkeiten nimmt jener Koeffizient jedoch wieder ab und wird am schwächsten für Geschwindigkeiten von etwa 15 Fuß in der Sekunde. Die Ursachen in dieser anscheinend sehr auffallenden Beobachtung liegen darin, daß das in Bewegung begriffene Fahrzeug eine Wellenbewegung in der Oberfläche des Wassers erzeugt, gegen welche das Fahrzeug eine besondere, von seiner absoluten Geschwindigkeit abhängige Lage annimmt, in welcher dasselbe bald mehr, bald weniger dazu geeignet ist, den Wellenberg zu durchschneiden *).

---

*) Mehreres hierüber siehe in der Introduction à la mécanique industrielle par Poncelet. No. 393 et suivans.

§. 178. Widerstand des ruhenden Wassers in einem engen Kanale gegen einen schwimmenden Körper.

Die Formeln des vorhergehenden Paragraphs für den Widerstand, welchen ein schwimmender Körper durch die Flüssigkeit erleidet, setzen voraus, daß die Oberfläche des Wassers nach allen Richtungen, sowie die Tiefe desselben, unbegränzt oder doch im Vergleich zu den entsprechenden Dimensionen des Körpers sehr groß seien. Ist Dies jedoch nicht der Fall, wie z. B. bei der Bewegung von Fahrzeugen in engen Flüssen oder Kanälen; so nimmt der Widerstand einen etwas größeren Werth an, weil das Wasser alsdann nicht mehr mit derselben Leichtigkeit nach den Seiten und unter den Körper hindurch ausweichen kann.

Nach der Diskussion Dubuats über die Versuche von Bossut, d'Alembert und Condorcet kann man sich der Formeln des vorhergehenden Paragraphs solange bedienen, als die obere Breite des Kanales 4,5 mal so groß ist, als die Breite des eingetauchten Theiles des schwimmenden Körpers, und der Querschnitt des Kanales 6,46 mal so groß, als der Querschnitt des oben gedachten Körpertheiles. Für kleinere Dimensionen des Kanales sei

A der größte Querschnitt des untergetauchten Körpertheiles,

A′ der benetzte Querschnitt des Kanales,

P der Widerstand nach Gl. (749) für einen in einer unbegränzten Flüssigkeit schwimmenden geraden prismatischen Körper,

P′ dieser Widerstand in dem gegebenen engen Kanale,

P″ dieser Widerstand in dem engen Kanale, sobald der vorstehende Körper mit einem mehr oder weniger zugeschärften Vorder- und Hintertheile versehen ist,

q das Verhältniß des Widerstandes für den mit Vorder- und Hintertheil begabten Körper zu dem Widerstande P eines umschriebenen geraden Prismas ohne Vorder- und Hintertheil, beide für den Fall eines Flußbettes von unbegränzten Dimensionen.

Alsdann kann man mit Dubuat für den Widerstand eines geraden Prismas im engen Kanale

$$P' = \frac{8{,}46}{\frac{A'}{A} + 2} \cdot P \quad \ldots . \quad (755)$$

setzen. Der Faktor von P wird in der That $=1$, wenn $A'=6,46A$ ist; derselbe wird $=2,82$, wenn $A'=A$ ist oder wenn der schwimmende Körper den ganzen Querschnitt des Kanales anfüllt, in welchem Falle sich vor dem Körper ein Stau bildet, in Folge dessen der Körper gehoben wird und das Wasser unterhalb entweicht.

Wenn bei einer geringen Wassertiefe die Breite des Kanales größer ist, als das 4,5fache der Breite des schwimmenden Körpers; so hat man nach Dubuat in der vorstehenden Formel die Fläche A' dergestalt anzunehmen, als wenn der Kanal auf die letztere Breite reduzirt wäre. In ähnlicher Weise hat man bei geringer Breite, aber hinlänglicher Tiefe des Kanales, die Letztere auf das 1,5fache der Höhe der größten Einsenkung des schwimmenden Körpers zu reduziren, um danach die Fläche A' für Formel (755) zu berechnen.

Für einen Körper mit Vorder- und Hintertheil hat man in einem engen Kanale nach Dubuat den Widerstand

$$P'' = P'\left[1 - 0,183(1-q)\left(\frac{A'}{A} - 1\right)\right] \quad \ldots \; (756)$$

Das Verhältniß $\frac{A'}{A}$ in diesem Ausdrucke darf jedoch den Werth 6,46 nicht überschreiten, indem man für solche Fälle immer einfach $P'' = qP'$, oder da alsdann auch $P' = P$ wird, $P'' = qP$ hat.

Bei den Versuchen, auf welche sich die beiden Formeln (755) und (756) gründen, ist der schwimmende Körper vermittelst eines dem Kanale entlang gespannten Seiles gezwungen worden, stets dieselbe Lage gegen die Oberfläche des Wassers beizubehalten, und derselbe ist durchaus verhindert worden, sich nach vorn oder hinten überzuneigen, wie es abwechselnd stattfindet, wenn jener Körper der darauf angebrachten bewegenden Kraft frei folgen kann. Aus diesem Grunde werden die aus jenen Formeln für enge Kanäle sich ergebenden Widerstände etwas größer sein, als diejenigen, welche derselbe schwimmende Körper erfährt, wenn er ohne den beschriebenen Zwang in dem Kanale fortgetrieben wird.

Messung der Ausflußmenge und der Geschwindigkeit des Wassers in offenen Flußbetten.

§. 179. Direkte Messung der Ausflußmenge in einem offenen Flußbette.

Durch die in den §§. 143 ff. gegebenen Formeln ist man zwar in den Stand gesetzt, sowol die Ausflußmenge für die Zeiteinheit, sowie die Geschwindigkeit des Wassers in den verschiedenen Punkten irgend eines Querschnittes eines offenen Wasserstromes zu berechnen; jedoch setzt Dies voraus, daß man die Figur des benetzten Theiles des Flußbettes, sowie das Gefälle desselben genau kenne. Besäße man die letztere Kenntniß nicht, oder wäre die Gestalt des Flußbettes von der Art, daß man sich von der Anwendung der fraglichen Formeln nur einen geringen Grad von Genauigkeit versprechen könnte, oder hätte man endlich die Absicht, genaue Beobachtungen über die Gesetze der Strombewegung anzustellen, um danach jene Formeln selbst zu prüfen und zu korrigiren; so müßte man direkte Mittel anwenden, um die wirklich stattfindende Ausflußmenge oder die in verschiedenen Punkten herrschende Geschwindigkeit zu bestimmen.

Käme es nun zuvörderst darauf an, die von einem Flusse in einer gewissen Zeit, z. B. in der Sekunde, gelieferte Wassermenge unmittelbar zu messen; so würde Dies bei kleineren Gewässern mit einem größeren oder geringeren Grade von Genauigkeit dadurch geschehen können, daß man das Flußbett durch einen Damm oder eine Wand schlösse, in welcher sich eine möglichst kleine Ausflußöffnung befände, auf welche man dann die Formeln für den Ausfluß des Wassers aus Gefäßen in Anwendung bringen könnte. Das Wasser würde sich vor diesem Damme aufstauen, nach Verlauf einiger Zeit eine konstante Druckhöhe vor der Öffnung annehmen und sich im Beharrungszustande aus dieser Öffnung ergießen. Man brauchte alsdann nur die über der Öffnung stattfindende Druckhöhe zu messen und den Kontraktionskoeffizienten für die Ausflußöffnung zu kennen, um vermittelst dieser Größen nach den früheren Formeln die Ausflußmenge der Öffnung, welche auch die des Stromes ist, für die Zeiteinheit zu berechnen.

Es leuchtet ein, daß zu diesem Zwecke Überfallöffnungen we-

niger genaue Resultate liefern werden, als Öffnungen in dünnen Wänden, welche möglichst tief unter dem Wasserspiegel liegen, besonders wenn der Fluß nicht so hoch aufgestauet werden kann, daß die Geschwindigkeit in dem Querschnitte vor der Öffnung gegen die Ausflußgeschwindigkeit in dieser Öffnung vernachlässigt werden kann, was offenbar darauf hinausläuft, daß die Fläche der Ausflußöffnung sehr klein sei im Vergleich zu dem aufgestaueten Querschnitte des Stromes.

Wäre eine ganz unter dem Spiegel des aufgestaueten Wassers liegende Ausflußöffnung so klein gegen den Querschnitt des Baches, daß man die Flüssigkeit vor der Öffnung als ruhend ansehen könnte, und ergösse sich das Wasser durch diese Öffnung frei in die Luft; so könnte man zur Bestimmung der Ausflußmenge oder der Ausflußgeschwindigkeit in der Öffnung die Resultate der §§. 84 ff. in Anwendung bringen. Wäre Dies jedoch nicht der Fall; so müßte man dabei die Betrachtungen der §§. 151 ff. zu Rathe ziehen.

Um die Unsicherheiten zu vermeiden, welche bei dem vorstehenden Verfahren unter manchen Umständen besonders aus der Ungewißheit über den wahren Werth des Kontraktionskoeffizienten für die Ausflußöffnung hervorgehen, hat de Prony folgendes Mittel zur direkten Messung der Ausflußmenge eines fließenden Gewässers in Vorschlag gebracht.

Quer durch das Flußbett wird ein Kasten gebauet, welcher sowol in seiner vorderen, wie in seiner hinteren Wand eine Öffnung besitzt. Vermöge dieser beiden Öffnungen, von denen in Rücksicht auf Zweckmäßigkeit die erstere möglichst groß, die zweite möglichst klein sei, und von denen die erstere durch ein leicht bewegliches Schütz geöffnet und rasch geschlossen werden kann, ist man im Stande, den ganzen Fluß durch den Kasten zu leiten. Wenn sich solchergestalt der Strom durch den Kasten ergießt, und den Beharrungszustand angenommen hat, was sich an einem in dem Kasten aufgestellten Marqueur erkennen läßt; so wird der Spiegel vor dem Kasten höher stehen, als in dem Kasten, und in dem Kasten höher, als unterhalb desselben, und es wird sich durch die untere Öffnung in der Zeiteinheit dieselbe Wassermasse ergießen, welche der Strom im natürlichen Zustande in derselben Zeit liefert.

Kennte man nun die Geschwindigkeit des Wassers in dieser unteren Öffnung; so würde das Produkt aus der Fläche dieser Öffnung in die genannte Geschwindigkeit die gesuchte Ausflußmenge für die Zeiteinheit ergeben. Um aber diese Geschwindigkeit oder gleich direkt die derselben entsprechende Ausflußmenge unabhängig von der Druckhöhe im Kasten, sowie von der Gestalt der Ausflußöffnung und von der darin stattfindenden Kontraktion zu finden; so bemerkt man, daß wenn plötzlich die vordere Einflußöffnung des Kastens verschlossen würde, das Wasser sich im ersten Augenblicke noch mit derselben Geschwindigkeit durch die untere Ausflußöffnung ergießen und erst allmählig bei dem Herabsinken des Spiegels im Kasten mit geringerer Geschwindigkeit durch dieselbe sich bewegen würde. Hat man nun ein Mittel, das Gesetz zu bestimmen, nach welchem die Geschwindigkeit oder die Ausflußmenge mit der Zeit t variirt, kann man also die in jedem ferneren Augenblicke stattfindende Geschwindigkeit oder Ausflußmenge als eine Funktion von t angeben; so wird man die Ausflußmenge im ersten Augenblicke, wo die vordere Einflußöffnung plötzlich geschlossen wurde, bestimmen können, indem man in der letzteren Funktion $t=o$ setzt.

Das eben erwähnte Gesetz ist folgendermaaßen näherungsweise zu ermitteln. Man beobachtet unter plötzlicher Schließung der vorderen Einflußöffnung den Stand des Wasserspiegels im Kasten zuvörderst in dem Augenblicke der Schließung, für welchen die Zeit $t=o$ sei, dann am Ende der beliebig anzunehmenden Zeiträume t', t'', t''', t^{V} . . . Da sich der Spiegel in dem Kasten in den meisten Fällen nicht vollkommen horizontal stellen wird; so wird man genöthigt sein, die Beobachtung desselben am Ende jener Zeiträume vermittelst aufgestellter Marqueure gleichzeitig an mehreren Stellen des Kastens vorzunehmen. Durch die beobachteten Höhenunterschiede ist man bei der als bekannt vorausgesetzten Gestalt des Kastens ferner im Stande, die Volumen q', q'', q''', q^{V} . . . . zu berechnen, welche resp. in den Zeiten t', t'', t''', t^{V} . . . aus dem Kasten geflossen sind. Es wird bei dieser Berechnung natürlich ein großer Nutzen sein, wenn der horizontale Querschnitt des Kastens überall konstant ist.

Ist jetzt q das Volum, welches sich während der Zeit t, vom Augenblicke der Schließung der oberen Einflußöffnung an

gerechnet, aus dem Kasten ergossen hat; so wird q eine Funktion von t sein, welcher man allgemein die Form

$$q = At + Bt^2 + Ct^3 + Dt^4 + \quad \ldots . (757)$$

geben kann, indem man mit A, B, C, D . . . noch näher zu bestimmende Konstanten bezeichnet.

In dem Zeitelemente dt am Ende der Zeit t fließt aus dem Kasten das elementare Wasservolum dq; mithin würde sich in der Zeiteinheit das Volum $\frac{dq}{dt}$ aus dem Kasten ergießen, wenn der Ausfluß am Ende der Zeit t konstant bliebe. Für dieses Volum hat man nach der obigen Gleichung

$$\frac{dq}{dt} = A + 2Bt + 3Ct^2 + 4Dt^3 + \ldots$$

Setzt man in dem letzteren Ausdrucke $t = o$; so erhält man die Ausflußmenge, welche der Kasten im Anfange der Zeitrechnung, also im Augenblicke der Schließung der vorderen Öffnung für die Zeiteinheit liefern würde, wenn der Ausfluß von diesem Augenblicke an konstant bliebe, und das hierdurch dargestellte Volum bildet offenbar die Ausflußmenge, welche sich in dem früheren Beharrungszustande in der Zeiteinheit durch den Kasten ergoß oder welche der Strom in der Zeiteinheit liefert. Demnach hat man, wenn man diese Ausflußmenge durch Q bezeichnet,

$$Q = A \quad \ldots . (758)$$

Es kommt jetzt bloß noch darauf an, den ersten Koeffizienten A aus der Gleichung (757) zu bestimmen. Dies geschieht näherungsweise, indem man auf der rechten Seite jener Gleichung ebenso viel Glieder beibehält, als man Beobachtungen am Ende der Zeiten t', t'', t''' . . . angestellt hat und unter Substitution der zusammengehörigen Werthe von t' und q', t'' und q'', t''' und q''' etc. in die Gleichung (757) die nachstehenden Formeln

$$\begin{aligned} q' &= At' + Bt'^2 + Ct''^2 + \ldots \\ q'' &= At'' + Bt''^2 + Ct'''^2 + \ldots \\ q''' &= At''' + Bt'''^2 + Ct'''^2 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

bildet. Da die Zahl dieser Gleichungen alsdann ebenso groß ist, als die Anzahl der unbekannten Größen A, B, C . . .; so wird man die Letzteren und mithin auch die Größe A bestimmen können.

Angenommen, man hätte nur eine einzige Beobachtung am Ende der Zeit t' vorgenommen; so würde man

$$q' = At'; \text{ also}$$

$$A = Q = \frac{q'}{t'} \quad \ldots . (759)$$

zu setzen haben, wodurch der erste Näherungswerth für die Ausflußmenge Q gegeben wäre.

Für zwei Beobachtungen würde man

$$q' = At' + Bt'^2$$
$$q'' = At'' + Bt''^2;$$

also

$$A = Q = \frac{q't''^2 - q''t'^2}{t't''(t''-t')} \quad \ldots . (760)$$

haben.

Für drei Beobachtungen würde sich

$$q' = At' + Bt'^2 + Ct'^3$$
$$q'' = At'' + Bt''^2 + Ct''^3$$
$$q''' = At''' + Bt'''^2 + Ct'''^3;$$

folglich

$$A = Q = \frac{q't''^2t'''^2(t'''-t'') - q''t'^2t'''^2(t'''-t') + q'''t'^2t''^2(t''-t')}{t't''t'''(t'''-t'')(t'''-t')(t''-t')} \quad \ldots . (761)$$

ergeben, u. s. f.

Je mehr Beobachtungen man angestellt hat, desto genauer wird sich das durch Gl. (757) bezeichnete Gesetz und damit die wahre Ausflußmenge des Stromes darstellen.

Wenn die Beobachtungen in gleichen Zeitinterwallen angestellt sind, wodurch das Experiment übrigens häufig etwas erschwert wird, sodaß man

$$t'' = 2t', \; t''' = 3t', \; t^{v} = 4t' \text{ etc.}$$

hat; so vereinfachen sich die vorstehenden Formeln dergestalt, daß man für eine einzige Beobachtung, wie vorhin,

$$A = Q = \frac{1}{t'} q' \quad \ldots \ldots (762)$$

ferner für zwei Beobachtungen

$$A = Q = \frac{1}{t'}\left(2q' - \frac{q''}{2}\right), \quad \ldots \ldots (763)$$

für drei Beobachtungen

$$A = Q = \frac{1}{t'}\left(3q' - 3\,\frac{q''}{2} + \frac{q'''}{3}\right) \quad \ldots \ldots (764)$$

und allgemein für n Beobachtungen

$$A = Q = \frac{1}{t'}\left[nq' - \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \frac{q''}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cdot \frac{q'''}{3} - \ldots \pm \frac{q^{(n)}}{n}\right] \quad \ldots \ldots (765)$$

hat.

Es leuchtet ein, daß es behuf Anwendung der vorstehenden Methode zur Bestimmung der Ausflußmenge des Kastens für die Zeiteinheit im Augenblicke des Schließens der vorderen Öffnung durchaus nicht darauf ankommt, daß der Spiegel des Unterwassers unterhalb des Kastens während der ganzen Zeit der Beobachtung auf konstanter Höhe erhalten werde. Es ist nur nothwendig, daß sich die Ausflußgeschwindigkeit in der unteren Öffnung des Kastens nach einem stetigen Gesetze mit der Zeit ändere, was dann immer stattfinden wird, wenn nicht zu gewissen in die Beobachtungsreihe fallenden Augenblicken plötzliche Änderungen im ganzen Systeme vor sich gehen, d. h. Änderungen, durch welche in ungemein kleinen Zeiträumen große Unterschiede hervorgebracht werden können.

Hiernach könnte man den Bau des obigen Meßkastens dergestalt vornehmen, daß der ganze Strom beim Schließen der oberen Öffnung für die Dauer der Beobachtungen oberhalb des Kastens aufgestauet würde und während dieser Zeit gar keinen Abfluß hätte. Ebenso gut könnte man aber auch den Strom bei der Schließung der gedachten Öffnung durch das Aufziehen anderer Seitenöffnungen um den Kasten herum leiten; nur müßte

man in diesem Falle durch eine angemessene Verlängerung der Seitenwände des Kastens über dessen untere Wandfläche hinaus dafür sorgen, daß der an den Seiten abfließende Strom nicht plötzlich von außen gegen die untere Ausflußöffnung des Kastens stürzte, und dadurch eine bedeutende Änderung des Ausflußgesetzes hervorbrächte.

Derartige plötzliche Störungen durch das Unterwasser, welches die Ausflußöffnung von außen überdeckt, würde man vermeiden, wenn man den Meßkasten durch eine mit der oberen und unteren parallele Wand in zwei Behälter theilte, welche durch eine Öffnung miteinander kommunizirten. Nach eingetretenem Beharrungszustande würde der Spiegel im oberen Behälter höher stehen, als im unteren. Schlösse man nun gleichzeitig die Einflußöffnung in den oberen und die Ausflußöffnung aus dem unteren Behälter, welche beide in diesem Falle möglichst groß sein müssen, während die Durchflußöffnung in der Zwischenwand möglichst klein sein muß; so würde sich der Spiegel im oberen Behälter senken, während sich der im unteren Behälter höbe. Sowol auf die Senkung des Einen, wie auf die Hebung des anderen Spiegels würde man die obigen Formeln in Anwendung bringen können.

Man erkennt leicht aus den Schwierigkeiten, mit welchen die Ausführung der im gegenwärtigen Paragraphe beschriebenen Operationen behuf Bestimmung der Ausflußmenge eines offenen Stromes verbunden sind, daß sich dieselben nur auf kleinere Gewässer anwenden lassen. Bei größeren Flüssen ist man genöthigt, durch direkte Mittel die Geschwindigkeit zu messen, welche in den verschiedenen Punkten Ein und desselben Querprofiles stattfindet, um alsdann vermittelst der erhaltenen Resultate und des daraus zu erkennenden Gesetzes, sowie vermittelst der gleichfalls aufzunehmenden Form des fraglichen Querschnittes die **mittlere** Geschwindigkeit zu berechnen, welche in jenem Querschnitte herrscht, woraus sich denn durch Multiplikation mit der Fläche des Querschnittes die gesuchte Ausflußmenge für die Zeiteinheit ergibt.

Bei solchen direkten Geschwindigkeitsmessungen, welche auch oft in anderen Rücksichten, als bloß um daraus die Ausflußmenge zu berechnen, vorgenommen werden müssen, bedient man sich verschiedener Instrumente, welche den allgemeinen Namen der

Stromgeschwindigkeitsmesser oder Hydrometer tragen, und von denen die wichtigsten im Nachfolgenden nach den ihnen zu Grunde liegenden Prinzipien betrachtet werden sollen.

§. 180. Geschwindigkeitsmessungen mittelst Schwimmer.

Das einfachste Mittel, die Geschwindigkeit der Wasserfäden an der Oberfläche eines fließenden Gewässers zu messen, besteht darin, daß man irgend einen schwimmenden Körper der Wirkung der Strömung frei überläßt und die Zeit beobachtet, während welcher derselbe eine gewisse Länge durchläuft. Damit der Widerstand der Luft keinen wesentlichen Einfluß auf die Bewegung des schwimmenden Körpers habe, darf derselbe nur so wenig, als es zu seiner Beobachtung eben nothwendig ist, über den Wasserspiegel hervorragen. Außerdem darf seine Ausdehnung nach unten nicht zu bedeutend sein, weil sich die unteren Wasserfäden eines Flusses langsamer bewegen, als die oberen (vergl. §. 149) und demnach der Körper gleichzeitig von Wasserfäden affizirt werden würde, welche verschiedene Geschwindigkeiten besäßen. Aus den vorstehenden Gründen wendet man zu diesen Geschwindigkeitsmessungen in der Regel hohle Metallkugeln an, welche mit Schrot so weit belastet werden können, daß nur ein sehr kleiner, eben noch sichtbarer Theil ihrer Oberfläche über dem Wasserspiegel hervorragt. Derartige Kugeln heißen in Beziehung auf den vorliegenden Zweck Schwimmkugeln.

Es leuchtet ein, daß schwimmende Körper in kurzer Zeit die Geschwindigkeit des sie umgebenden Wassers annehmen müssen, da dieselben, solange sie sich langsamer bewegen, einen Druck in der Richtung der Bewegung empfangen werden, und im Falle sie sich etwa rascher bewegten, als das Wasser, einen Widerstand in entgegengesetzter Richtung erleiden würden.

Auf dasselbe Prinzip gründet sich die Anwendung des von den Schiffern zur Messung der Geschwindigkeit des Schiffes im ruhenden Meereswasser gebrauchten Logs. Dieser Apparat besteht gewöhnlich in einem dreieckigen Brette, an dessen Ecken drei Fäden befestigt sind, welche nahe vor dem Brette in einen einzigen Faden, die Loglinie, zusammenlaufen. Sobald das Log über Bord geworfen und die Linie festgehalten wird, stellt es sich

im Wasser aufrecht und würde, wenn es fortgezogen werden sollte, von dem Wasser den größtmöglichen Widerstand erfahren. Demnach wird dasselbe, wenn an der Linie durchaus keine Kraft wirkt, an derselben Stelle im Wasser verharren, während sich das Schiff fortbewegt. Läßt man also die Loglinie frei nachgleiten und beobachtet die Zeit, während welcher eine gewisse Länge der Linie über Bord gezogen wird; so kann man aus diesen beiden Größen die Geschwindigkeit des Schiffes, d. h. den von dem Schiffe in der Zeiteinheit zurückgelegten Weg, leicht berechnen.

Es bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung, wie das Log auch zur Messung der Geschwindigkeit eines Wasserstromes angewandt werden könnte, falls das Ufer des Flusses nicht zugänglich wäre, um längs desselben den Weg zu messen, welchen eine ganz freie Schwimmkugel in einer gewissen Zeit zurücklegen würde. Übrigens muß sowol in diesem, wie in dem vorhergehenden Falle bemerkt werden, daß die Aufrechterhaltung des Logs im Wasser, sowie die Erhaltung einer möglichst geradlinigen Richtung der Loglinie immer eine gewisse Spannung der Letzteren erforderlich macht, welche als Zugkraft auf das schwimmende Brett wirkt und im ersteren Falle verhindert, daß dasselbe vollkommen ruhig an derselben Stelle verharre, und im letzteren Falle, daß dasselbe genau die Geschwindigkeit des Stromes annehme. Man wird bei der Anwendung des Logs immer resp. die Geschwindigkeit des Schiffes oder des Stromes etwas schwächer finden, als sie wirklich ist.

Um auf eine der früheren ähnliche Weise die Geschwindigkeit des Wassers in einer gewissen Tiefe unter dessen Oberfläche zu messen, wendet man ein System von zwei Kugeln an, welche durch einen Faden oder durch möglichst dünne gegliederte Stäbe miteinander verbunden sind. Die Eine dieser beiden Kugeln, welche in einer gewissen Tiefe unter dem Spiegel des Flusses schwimmen und die Geschwindigkeit der daselbst befindlichen Stromfäden annehmen soll, ist möglichst groß; die andere dagegen, welche nur an der Oberfläche des Wassers mittreiben soll, um den Apparat überall sichtbar zu machen, ist dagegen so klein, als nur irgend möglich, damit dieselbe von der Geschwindigkeit der oberen Wasserschichten möglichst wenig affizirt wird und auf die Bewegung der unteren Kugel keinen merklichen Einfluß ausübt. Wenn man beide Kugeln durch dünne Drathglieder miteinander

verbindet, um sie in einem gewissen vertikalen Abstande voneinander zu erhalten; so geschieht die Gliederung der Verbindungskette nur deshalb, um Gelegenheit zu haben, den fraglichen Abstand nach Umständen größer oder kleiner machen zu können. Die untere Kugel wird mit so viel Schrot gefüllt, daß der ganze Apparat aufrecht schwimmt und von der oberen kleineren Kugel nur ein geringer Theil der Oberfläche aus dem Wasser hervorragt.

Wenn der vorstehende Meßapparat vom Strome fortgetrieben wird; so geschieht Dies mit einer Geschwindigkeit, welche der Geschwindigkeit der in der Tiefe der unteren Kugel befindlichen Stromfäden nahezu gleich ist, und man braucht daher nur, wie vorhin, die Zeit zu beobachten, während welcher eine gewisse Stromstrecke durchlaufen wird, um daraus die Geschwindigkeit des Wassers in der gedachten Tiefe abzuleiten.

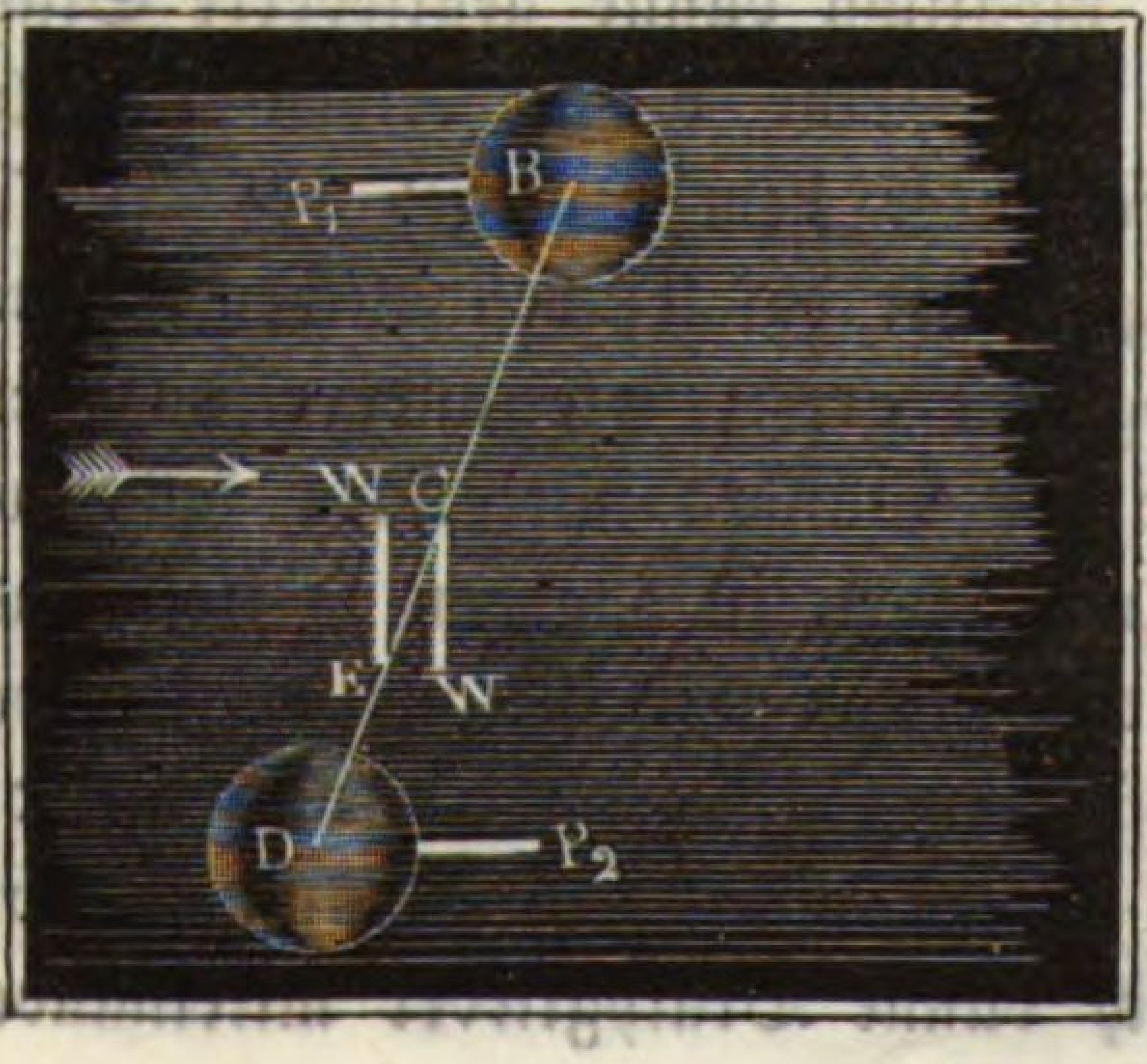
Nachdem man durch irgend ein Mittel die an der Oberfläche stattfindende Geschwindigkeit des Wassers bereits kennen gelernt hat; so kann man die in einer gewissen Tiefe herrschende Geschwindigkeit auch dadurch bestimmen, daß man in dem zuletzt beschriebenen Systeme der beiden Schwimmkugeln die obere so groß, wie die untere annimmt, und die Geschwindigkeit beobachtet, welche der Apparat im Strome annimmt. Denn es sei

V_1 die Geschwindigkeit des Stromes an der Oberfläche, wo sich die obere Kugel befindet,

V_2 die Geschwindigkeit des Stromes in der Tiefe der unteren Kugel,

U die Geschwindigkeit, welche der Apparat annimmt,

A die Fläche eines größten Kreises einer jeden Kugel,



w das Gewicht einer Volumeinheit des Wassers,

k_1, k_2 zwei konstante Koeffizienten.

Es leuchtet ein, daß wenn die Bewegung der Kugeln gleichförmig geworden ist, sämmtliche auf dieselben wirkenden Kräfte sich gegenseitig im Gleichgewichte erhalten müssen. Diese Kräfte sind 1)

die vertikal abwärts gerichtete Wirkung der Schwere in die Masse der Kugeln oder das Gewicht des ganzen Apparates, 2) der vertikal aufwärts gerichtete Auftrieb des Wassers, welcher dem vorstehenden Gewichte an Größe gleich ist, 3) der Stoß des schneller fließenden Wassers an der Oberfläche gegen die obere Kugel in horizontaler und direkter Richtung der Bewegung, 4) der Widerstand des langsamer fließenden Wassers gegen die untere Kugel in horizontaler, aber der Bewegung direkt entgegengesetzter Richtung.

Da die ersten beiden in entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte einander gleich sind; so müssen es auch die letzten beiden Kräfte sein. Für die letzteren Kräfte hat man aber mit Bezugnahme auf die Formel (736) resp.

$$k_1 w A \frac{(V_1 - U)^2}{2g} \text{ und } k_2 w A \frac{(U - V_2)^2}{2g},$$

indem man beachtet, daß die relative Geschwindigkeit des Wassers in Beziehung zur oberen Kugel $V_1 - U$ und die relative Geschwindigkeit der unteren Kugel in Beziehung zu der des Wassers $U - V_2$ ist. Der Koeffizient k_1 bezieht sich auf den Stoß des Wassers gegen eine ruhende Kugel und der Koeffizient k_2 auf den Widerstand des Wassers gegen eine bewegte Kugel. Der letztere Koeffizient ist nach Gl. (736) gleich 0,512; der erstere wird hiervon etwas verschieden sein, und diese Verschiedenheit wird dadurch noch etwas vergrößert, daß die obere Kugel nicht wie die untere in einer rings herum unbegränzten Flüssigkeit sich befindet. Abstrahirt man jedoch von dem besonders bei schwachen Geschwindigkeiten sehr geringen Unterschiede der beiden Koeffizienten k_1 und k_2; so erhält man durch Gleichsetzung der obigen beiden Kräfte

$$(V_1 - U)^2 = (U - V_2)^2$$

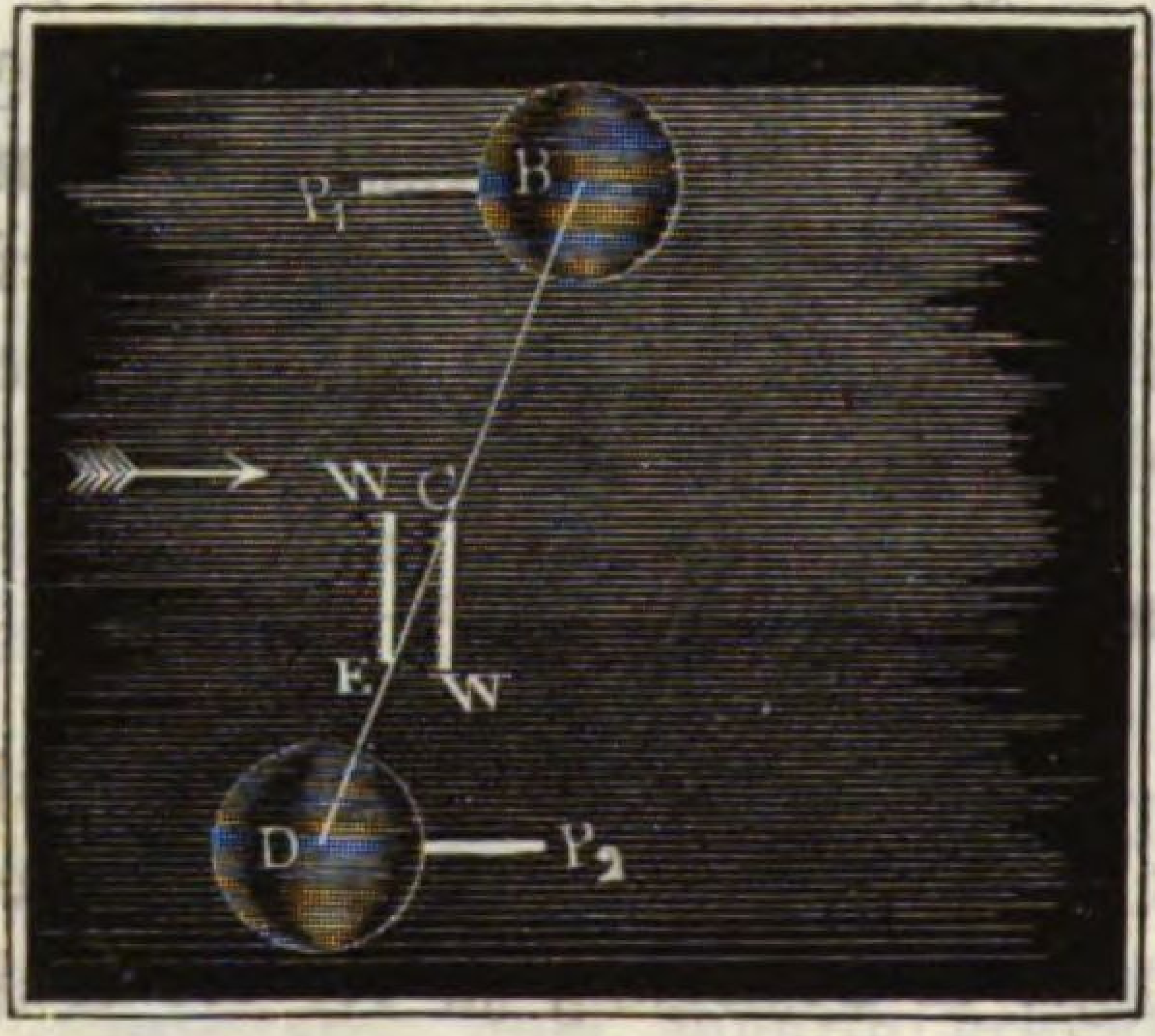
oder

$$U = \frac{V_1 + V_2}{2} \quad \ldots \ldots (766)$$

Hieraus ergibt sich, daß die Geschwindigkeit U des Apparates nahezu das arithmetische Mittel zwischen den beiden Geschwindigkelten V_1 und V_2 sein wird. Kennt man also bereits den Werth der Geschwindigkeit V_1 des Wassers an der Oberfläche und hat man den von U durch Beobachtung gefunden; so bestimmt sich die Geschwindigkeit V_2 des Wassers in der Tiefe der unteren Kugel durch die Formel

$$V_2 = 2U - V_1 \quad \ldots . (767)$$

Der Umstand, daß sich die oberen Schichten der Flüssigkeit rascher bewegen, als die unteren, wird zur Folge haben, daß die Mittellinie der beiden Kugeln, sobald sie vom Strome fortgetrieben werden, nicht genau vertikal steht, sondern sich nach vorn überneigt. Die Neigung dieser Linie gegen die Vertikale läßt sich leicht aus der Bedingung ableiten, daß die oben genannten vier Kräfte, welche auf das System der beiden Kugeln wirken, sich im Gleichgewichte erhalten müssen. Denn bezeichnet



W das Gewicht der beiden Kugeln mit der Verbindungskette, dessen Schwerpunkt in **E** liege,

c den Abstand **BD** der Mittelpunkte der beiden Kugeln,

e den Abstand **CE** des gemeinschaftlichen Schwerpunktes **E** von der Mitte der Linie **BD**,

γ den Neigungswinkel der Linie **BD** gegen die Vertikale,

P_1 den Stoß des Wassers gegen die obere Kugel, welcher durch den Mittelpunkt **B** dieser Kugel gerichtet ist, und

P_2 den Widerstand des Wassers gegen die untere Kugel, welcher ebenfalls durch den Mittelpunkt dieser Kugel gerichtet ist;

so erkennt man, daß der Auftrieb des Wassers, vermöge dessen der ganze Apparat schwimmend erhalten wird, eine Kraft $= W$ ist, welche vertikal von unten nach oben durch den Mittelpunkt **C** der Linie **BD** wirkt.

Nimmt man nun die Momente der obigen vier Kräfte, welche in der Figur nach den Richtungen **WE**, **WC**, P_1B, P_2D wirken, in Beziehung zum Punkte **C**, und setzt die Summe derjenigen, welche eine Drehung des Apparates nach der Einen Seite um den Punkt **C** zu bewirken streben, gleich der Summe der übrigen, welche eine Drehung nach der entgegengesetzten Seite zu bewirken streben; so erhält man die Gleichung

$$W e \sin\gamma = P_1 \frac{c}{2}\cos\gamma + P_2 \frac{c}{2}\cos\gamma,$$

woraus

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{c(P_1 + P_2)}{2eW}$$

folgt. Nimmt man hierin

$$P_1 = P_2 = kwA\frac{(V_1 - U)^2}{2g} = kwA\frac{(U - V_2)^2}{2g},$$

d. i., weil $U = \frac{V_1 + V_2}{2}$ ist,

$$= kwA\frac{(V_1 - V_2)^2}{8g}$$

an; so kommt

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{kwcA(V_1 - V_2)^2}{8geW} \quad \ldots \quad (768)$$

Endlich muß hier noch des sogenannten Schwimmstabes, welcher nach Cabeo, der ihn zuerst anwandte, auch den Namen des Cabeoschen Stabes erhalten hat, gedacht werden. Dieser aus einzelnen hohlen Zylindern, vermittelst welcher eine größere oder geringere Länge dargestellt werden kann, zusammengeschraubte Stab wird in dem unteren Stücke mit Schrot so lange beschwert, bis er ganz in die Flüssigkeit eintaucht und nur mit der obersten Spitze über den Spiegel hervorragt. In diesem Zustande überläßt man denselben dem Strome und beobachtet die Geschwindigkeit, welche er annimmt.

Setzt man nun voraus, die von oben nach unten in derselben Vertikalen variirende Geschwindigkeit der Stromfäden nehme gleichförmig mit der Tiefe unter dem Spiegel ab, und der Stoß des bewegten Wassers gegen ein Längenelement des ruhenden Stabes sei unter sonst gleichen Verhältnissen und bei gleichen Geschwindigkeiten gleich dem Widerstande des ruhenden Wassers gegen dasselbe Element im bewegten Zustande; so geht aus der Bedingung, daß sich alle auf den Stab wirkenden Kräfte im Gleichgewichte erhalten müssen, leicht hervor, daß die Geschwindigkeit des Stabes das arithmetische Mittel aus den Geschwindigkeiten sämmtlicher den Stab umgebenden Wassertheilchen sein

wird. Der Cabeosche Stab kann demnach unmittelbar dazu dienen, die **mittlere** Geschwindigkeit zu bestimmen, welche in einem gewissen Theile Ein und derselben Vertikalen herrscht.

So einfach die vorstehend beschriebenen Methoden zur Messung der Geschwindigkeit in den verschiedenen Punkten eines Stromes sind; so leiden dieselben doch an einigen wesentlichen Mängeln, wodurch ihnen unter gewissen Umständen die Brauchbarkeit ganz genommen werden kann.

Diese Mängel bestehen Einestheils darin, daß man Gelegenheit haben muß, die Bewegung der Schwimmer auf ziemlich lange Strecken zu beobachten, um sowol von der Gleichförmigkeit der ihnen ertheilten Bewegung, wie von der Vermeidung bedeutender Fehler, welche bei der Messung sehr kleiner Zeiträume leicht entstehen, überzeugt zu sein; demnach würden die Schwimmer durchaus nicht anwendbar sein, wenn man die Geschwindigkeit in einem Flußbette oder Gerinne von sehr kleiner Länge bestimmen wollte. Ferner setzt die Anwendung eines Schwimmers voraus, daß die Geschwindigkeit in der Stromlinie, welche derselbe durchläuft, überall dieselbe sei; wo Dies nicht der Fall wäre, würde man durch die Beobachtung des Schwimmers nur ein mittleres Resultat aus den Geschwindigkeiten erhalten, welche auf der ganzen Länge der durchlaufenen Linie stattfinden. Endlich ist der Gebrauch eines Schwimmers noch von einer Unbequemlichkeit begleitet, welche darin besteht, daß derselbe keinen a priori vorzuschreibenden Weg verfolgt, sondern durch den Strom nach einer Linie fortgetrieben wird, in welcher sich die häufig krummlinigen Stromfäden bewegen und die stärkste Strömung erzeugen.

Überhaupt ist es nicht möglich, durch einen Schwimmer eine Geschwindigkeit zu messen, welche in irgend einem bestimmten **Punkte** des Flußbettes stattfindet.

§. 181. Geschwindigkeitsmessungen vermittelst Instrumente, an welchen die statische Wirkung des Stoßes der Flüssigkeit zur Anwendung gebracht wird.

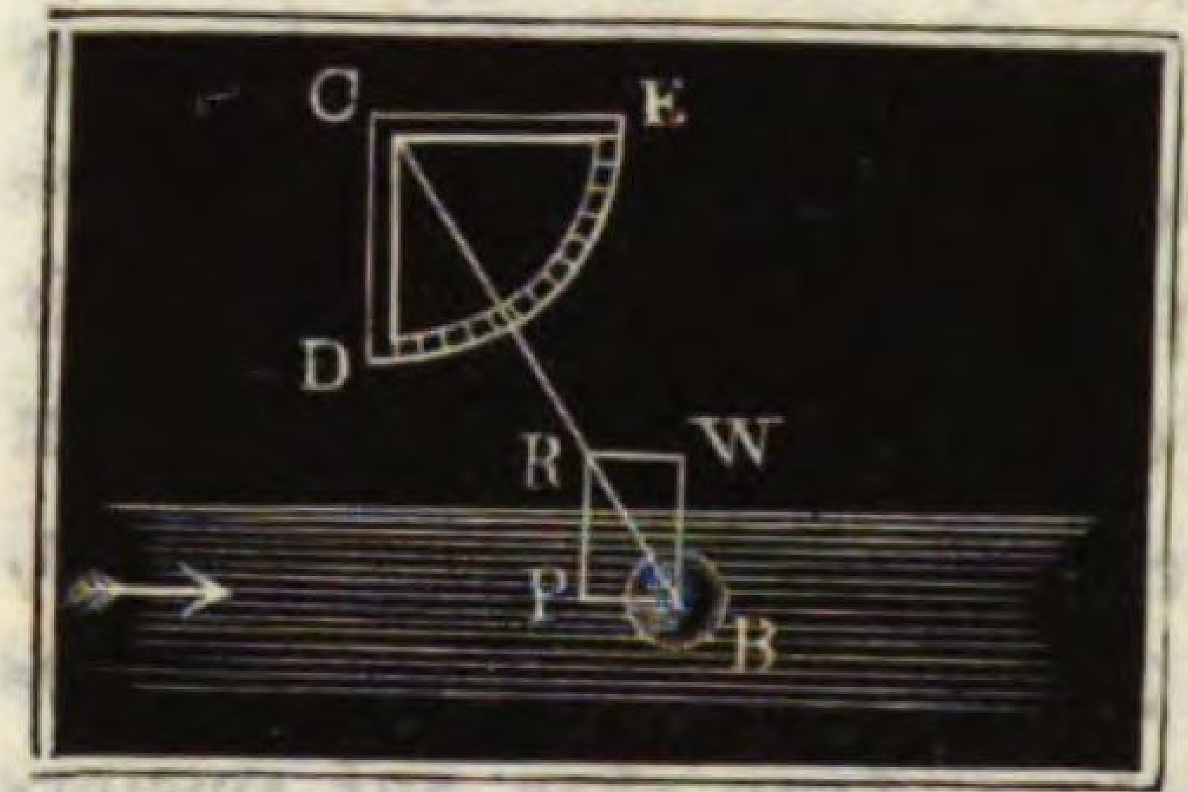
Die Instrumente, deren man sich bedient, um die Geschwindigkeit zu bestimmen, welche in einem gegebenen Punkte einer Flüssigkeit stattfindet, gründen sich sämmtlich auf das Prinzip,

daß man die an jenem Punkte vorbeistreichenden Flüssigkeitsfäden auf eine bestimmte Weise von ihrer Richtung ablenkt und dann den mechanischen Effekt beobachtet, welcher durch eine solche Ablenkung hervorgebracht wird. Der letztgedachte Effekt wird mit der Größe der Geschwindigkeit des Stromes in einer gewissen Beziehung stehen, welche, wenn sie bekannt ist, dazu dienen kann, diese Geschwindigkeit zu bestimmen. Der Effekt, welchen die abgelenkten Fäden hervorzubringen vermögen, kann aber auf zweierlei Art gemessen werden: entweder erstens durch die statische Wirkung derselben auf ein in Ruhe befindliches System von Körpern, indem sich hierbei direkt der von der Flüssigkeit ausgeübte Druck oder Widerstand kund gibt, oder zweitens durch die dynamische Wirkung jener Fäden, indem man die Größe der Bewegung beobachtet, welche dadurch einem gewissen Körpersysteme mitgetheilt wird.

Bei den Instrumenten der ersteren Art setzt man irgend eine ebene oder krumme Oberfläche dem Strome aus, und indem man die durch die Ablenkung der Flüssigkeitsfäden gedrückte Fläche durch ein System von Hebeln, Fäden, Gewichteno der Federn in Ruhe erhält, mißt man den Druck, welchen jene Fläche empfängt. Nachdem dieser Druck bekannt ist, kommt es noch auf die Beziehung an, welche zwischen demselben und der Geschwindigkeit der Flüssigkeitsfäden vor deren Ablenkung besteht. Da aber die letztere Beziehung theils von der besonderen Form der gestoßenen Fläche, theils von dem absoluten Werthe der Stromgeschwindigkeit auf eine Weise abhängig ist, welche selbst a priori nicht geschlossen werden kann, sondern durch Versuche ermittelt werden muß; so erkennt man, daß alle jene Instrumente erst dann eine praktische Brauchbarkeit gewinnen, wenn man Gelegenheit gehabt hat, Probeversuche in Strömen von bekannter Geschwindigkeit mit denselben anzustellen oder die erwähnte Beziehung zwischen dem Widerstande der gestoßenen Fläche und der Stromgeschwindigkeit vermittelst anderweitiger Beobachtungsmethoden vorher zu bestimmen.

Zu den bemerkenswerthesten Hydrometern der vorstehenden Art gehören die folgenden.

Der Stromquadrant oder das hydrometrische Pendel. Das bei diesem Instrumente in Anwendung gebrachte Prin-



zip besteht darin, daß eine Kugel B, welche spezifisch schwerer ist, als die Flüssigkeit, und vermittelst eines Fadens CB an einem festen Punkte C aufgehängt ist, dem Stoße der Flüssigkeit ausgesetzt wird, was zur Folge hat, daß die Richtung des Fadens CB von der Vertikalen CD um einen gewissen Winkel DCB abweicht, welcher durch den Quadranten CDE gemessen werden kann. Nimmt man nun an, der Werth des Druckes P, welchen die Kugel in der Richtung PB der Strombewegung empfängt, sei bekannt; so findet sich die Beziehung zwischen diesem Drucke und dem Winkel $DCB = \gamma$ folgendermaaßen.

Es sei W das Gewicht der Kugel B, M das Volum derselben, w das Gewicht einer Volumeinheit der Flüssigkeit, also wM der in vertikaler Richtung von unten nach oben wirkende Auftrieb der Flüssigkeit; alsdann ist die Resultante der letzteren beiden vertikalen Kräfte eine in der Richtung WB von oben nach unten wirkende Kraft $= W - wM$. Diese und die in der Richtung PB des Stromes wirkende Kraft P wird durch die Spannung des Fadens CB im Gleichgewichte erhalten. Setzt man daher die beiden Kräfte $W - wM$ und P nach dem Prinzipe des Parallelogrammes der Kräfte zusammen; so muß die Resultante RB in die Richtung des Fadens CB fallen, dessen eigenes Gewicht, als sehr unbedeutend gegen das der Kugel, hierbei vernachlässigt wird.

Setzt man nun voraus, die Richtung PB der Strombewegung sei horizontal; so muß man nach dem Vorstehenden offenbar

$$\frac{P}{W - wM} = \tang\gamma$$

haben. Wenn A ein größter Kreis der Kugel, V die Geschwindigkeit des Stromes und k einen aus Versuchen zu bestimmenden Koeffizienten bezeichnet; so kann man nach Gl. (736)

$$P = kwA\frac{V^2}{2g}$$

setzen, wodurch sich die vorstehende Gleichung nach gehöriger Reduktion in

$$V = \sqrt{\frac{2g(W - wM)\tang\gamma}{kwA}} \quad \ldots . (769)$$

verwandelt.

Da g, w, W, A und M konstante Größen sind, und auch der Koeffizient k aus dem Werthe von P ein von der Geschwindigkeit V wenig abhängender Faktor ist; so wird der ganze Werth von $\sqrt{\frac{2g(W - wM)}{kwA}}$ eine unveränderliche Größe sein, welche durch Probeversuche mit dem obigen Instrumente in Strömen von bekannter Geschwindigkeit ermittelt werden kann. Bezeichnet man dieselbe mit $\varkappa$; so hat man einfach

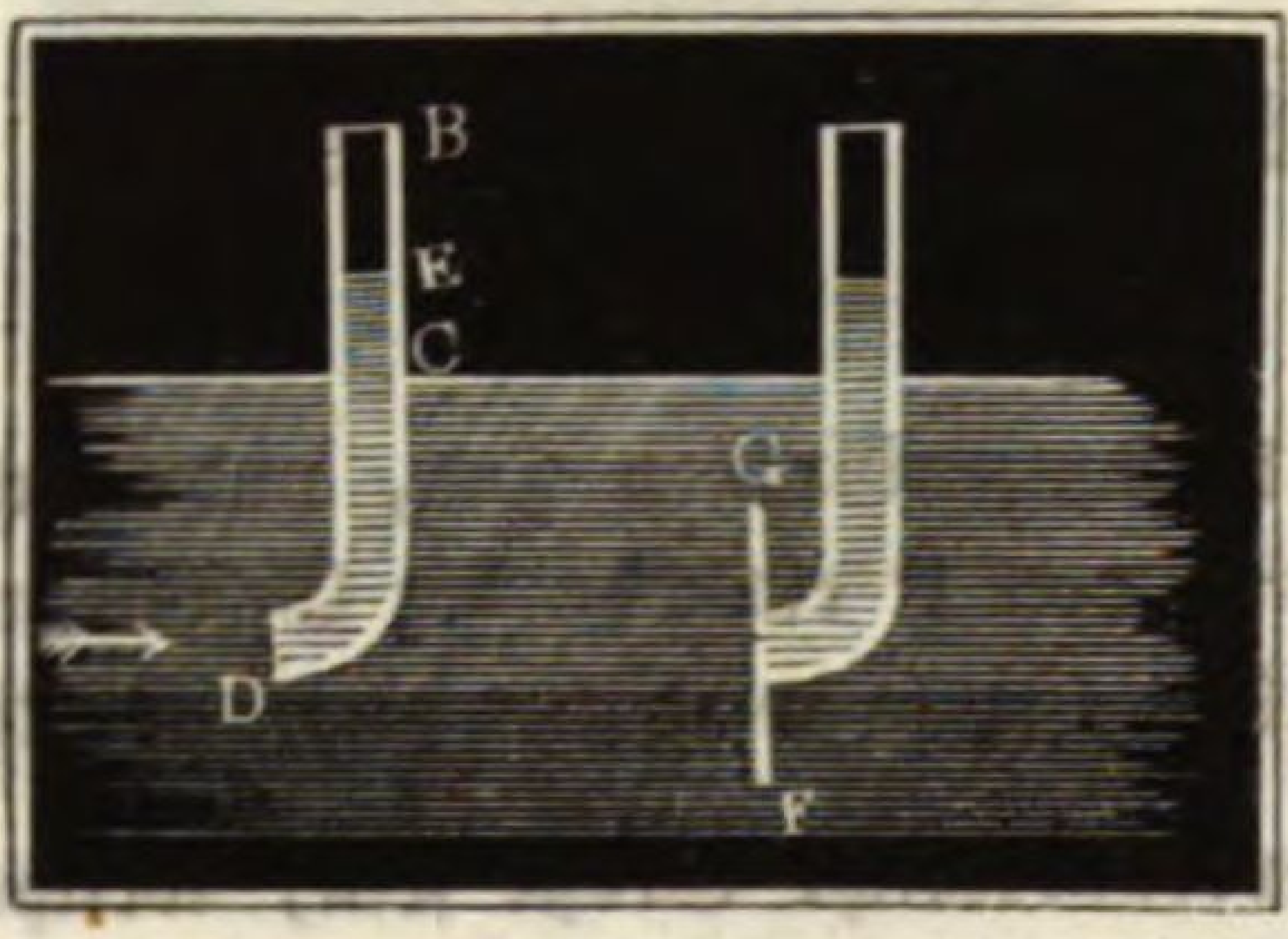
$$V = \varkappa\sqrt{\tang\gamma} \quad \ldots . (770)$$

Es ist leicht zu erkennen, daß der Stromquadrant bei Wasserströmen nur zur Messung der nahe unter der Oberfläche stattfindenden Geschwindigkeiten mit einiger Sicherheit angewandt werden kann, weil bei tieferer Einsenkung der Faden, an welchem die Kugel hängt, zu sehr von dem Drucke des dagegenstoßenden Wassers affizirt wird, demzufolge in dem eingetauchten Theile eine konkave Kurve bildet, und in dem freien Theile oberhalb des Wasserspiegels eine Richtung angibt, welche von der Richtung des untersten Elementes dieser Kurve umso mehr abweicht, je länger der untergetauchte Theil des Fadens ist.

Wir übergehen die Beschreibung einiger anderer wenig gebräuchlichen Hydrometer, durch welche der Stoß des Wassers gegen irgend eine Fläche durch ein System von Rollenleitungen, Hebeln und Gewichten direkt gemessen wird, da diese Instrumente auf große Genauigkeit keinen Anspruch machen können, indem sie neben der Unsicherheit über die Beziehung zwischen dem Drucke P und der Geschwindigkeit V noch eine Anzahl schädlicher Reibungswiderstände einführen, deren Einfluß selbst die Messung des Druckes P unsicher macht.

Jedoch müssen wir hier noch eines einfachen Instrumentes erwähnen, welches besonders in Frankreich vielfach in Gebrauch gewesen ist und auch heut zu Tage daselbst zuweilen noch ange-

wandt wird. Es ist Dies die Pitotsche Röhre. Dieselbe besteht aus einer bloßen unten umgebogenen Röhre BD, welche an beiden Enden offen ist. Man setzt sie dem Stoße des fließenden Wassers in dem Punkte D, wo man die Geschwindigkeit messen will, dergestalt aus, daß die untere Mündung den Stoß in normaler Richtung empfängt.



Wäre das Wasser in Ruhe; so würde dasselbe in dem aufrecht stehenden Schenkel der Röhre das Niveau C bilden, welches mit der horizontalen Ebene des freien Wasserspiegels außerhalb der Röhre zusammenfällt. Sobald der Wasserstrom aber in einer gegen die untere Mündung D gerichteten Bewegung ist, wird vermöge des Stoßes des Wassers ein vermehrter Druck auf diese Mündung ausgeübt werden, in Folge welches sich das Wasser in dem vertikalen Schenkel der Röhre über das äußere Niveau erhebt und etwa bis E ansteigt.

Ist nun

V die Geschwindigkeit des Wassers in normaler Richtung gegen die untere Mündung der Röhre bei D,

A die Fläche dieser Mündung,

z die Tiefe des Mittelpunktes dieser Mündung unter dem Wasserspiegel bei C,

h die Erhebung CE des Wassers im oberen Schenkel der Röhre über das Niveau des umgebenden Wassers,

w das Gewicht einer Volumeinheit des Wassers,

P der in Folge des Stoßes des Wassers gegen die untere Mündung ausgeübte Druck;

so wird der gesammte von der äußeren Flüssigkeit gegen die Mündung D der Röhre ausgeübte Druck

$$wzA + P$$

sein. Der in entgegengesetzter Richtung durch das in der Röhre von D bis E enthaltene Wasser gegen dieselbe Mündung ausgeübte Druck ist aber

$$w(z+h)A.$$

Da diese beiden Pressungen offenbar im Gleichgewichte sein müssen; so hat man

$$wzA+P=w(z+h)A$$

oder

$$P=whA \qquad \ldots . (771)$$

Wäre man nun im Stande, den Stoß P des Wassers gegen die Mündung bei D als eine Funktion der Geschwindigkeit V des umgebenden Wasserstromes auszudrücken; so würde es vermittelst der vorstehenden Beziehung leicht sein, die Geschwindigkeit V aus einer bloßen Beobachtung der Höhe h, um welche sich das Wasser in der Röhre über das Niveau des Stromes erhebt, zu berechnen. Leider ist die Bestimmung jener Funktion, wie man aus den §§. 163 ff. ersehen haben wird, a priori nicht möglich, und kann nur durch vorhergehende Versuche in Gewässern von bekannter Geschwindigkeit aufgefunden werden. Hierbei ist noch zu bemerken, daß diese Funktion keineswegs bloß von der Gestalt der Öffnung bei D, sondern auch sehr wesentlich von der Form des ganzen Röhrenstückes, welches sich unmittelbar der Mündung anschließt, abhängig ist. Man wird nämlich einen anderen Werth für den Druck P erhalten, jenachdem das umgebogene Röhrenende bei D zylindrisch ist, oder sich jenseit der Mündung erweitert oder sich verengt. Die Ursache hiervon ist sehr leicht einzusehen, wenn man erwägt, daß sich der Gesammtdruck P aus den einzelnen Pressungen zusammensetzt, welche die verschiedenen vor der Mündung der Röhre abgelenkten Wasserfäden in Folge ihrer konvexen Krümmung gegen diese Mündung ausüben. Da nun diese einzelnen Pressungen von den besonderen Figuren der Kurven der abgelenkten Wasserfäden abhängen, die letzteren Figuren aber durch die eigenthümliche Gestalt des ganzen unteren Röhrenstückes bedingt sind; so leuchtet ein, daß die Gestalt dieses Röhrenstückes einen wesentlichen Einfluß auf die Beziehung haben muß, in welcher der Druck P zu der Geschwindigkeit V des Wasserstromes steht.

Wollte man den zuletzt erwähnten Einfluß vernachlässig[illegible] was häufig geschehen ist; so würde man finden, daß die [illegible]

Röhre ein höchst unvollkommenes und unzuverlässiges Hydrometer wäre. Unter Beachtung jenes Einflusses kann man jedoch dem fraglichen Instrumente seine praktische Brauchbarkeit nicht absprechen, und hat nur dafür zu sorgen, daß durch vorhergehende Versuche die Funktion zwischen P und V genügend festgestellt sei. Diese Versuche müssen natürlich mit demselben Instrumente, oder doch mit einem ganz gleich konstruirten, angestellt sein, da sich aus den Beobachtungsresultaten, welche durch den Gebrauch des Einen Instrumentes dieser Art gewonnen sind, kein sicherer Schluß auf die Resultate machen läßt, welches ein anderes Instrument von abweichender Gestalt ergeben würde.

Aus den §§. 163 ff. erkennt man, daß die Beziehung zwischen P und V von der allgemeinen Form

$$P = kwA\frac{V^2}{2g}$$

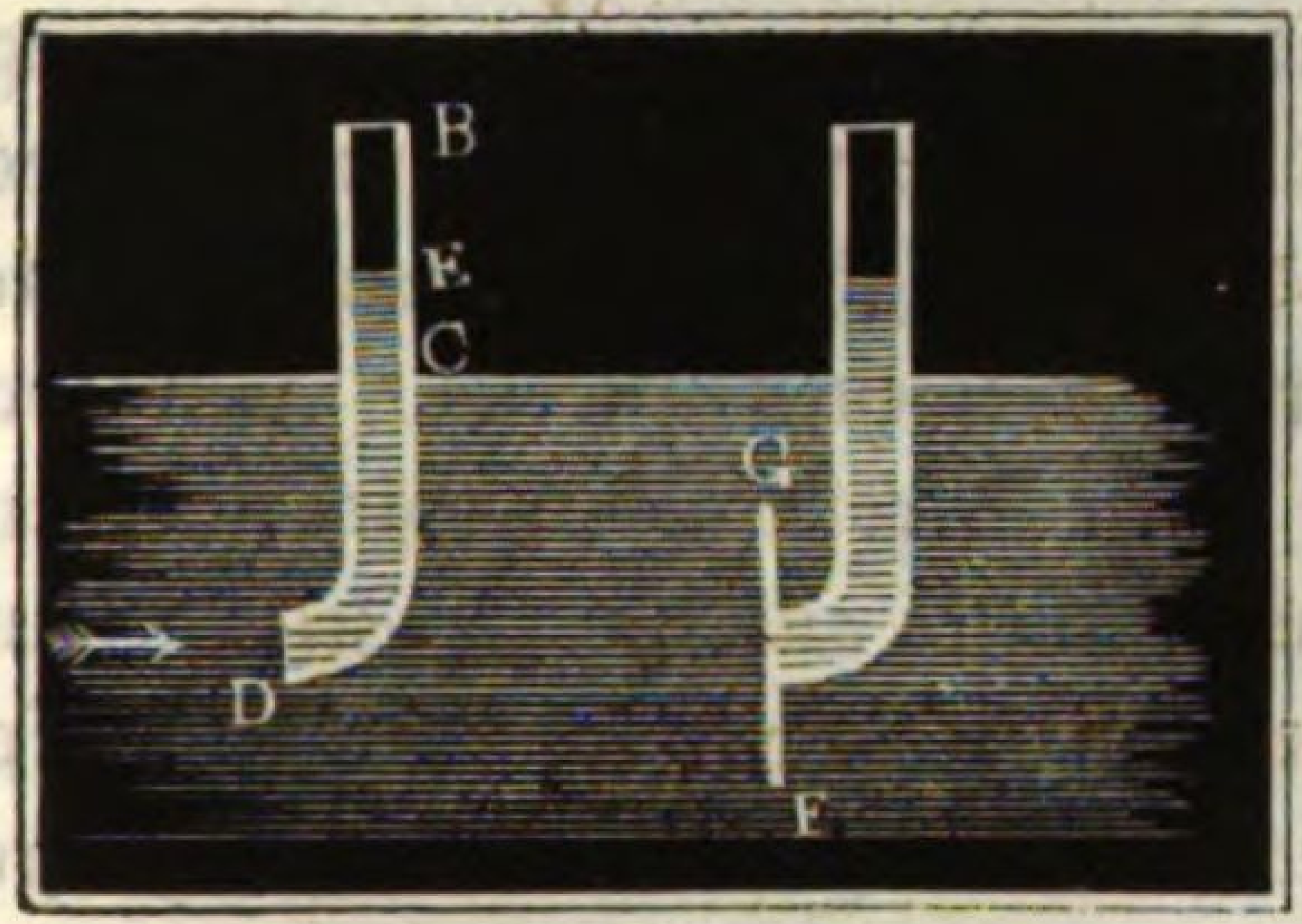
sein wird, worin k einen Koeffizienten bezeichnet, der für jedes Instrument nahezu konstant ist, und für die gewöhnlichen Geschwindigkeiten nur sehr wenig mit dem Werthe von V variirt. Durch die Substitution dieses Werthes für P in Gl. (771) reduzirt sich dieselbe auf

$$k\frac{V^2}{2g} = h \quad \text{oder}$$

$$V = \sqrt{\frac{2gh}{k}} \quad \ldots \quad (772)$$

Anfangs erweiterte man das untere umgebogene Röhrenende nach der Mündung zu, sodaß die Öffnung A bedeutend größer war, als der Querschnitt des aufsteigenden Schenkels. Später verengte man die Röhre gegen die Ausmündung, weil man fand, daß hierdurch die Schwankungen der Wassersäule CE vermindert wurden. Der letztere Zweck wurde schließlich am besten dadurch erreicht, daß man den umgebogenen unteren Theil der Röhre sehr weit machte, denselben ringsum verschloß und in der vordersten Fläche nur eine sehr kleine Öffnung anbrachte.

Wollte man Instrumente dieser Art konstruiren, welche bei



nicht zu bedeutenden Abweichungen in den absoluten und relativen Dimensionen ihrer Theile doch nahezu denselben Koeffizienten *k* besäßen; so würde man Dies gewiß dadurch erreichen, daß man, unbekümmert um die übrige Gestalt der Röhre, normal auf die Mündung eine möglichst große ebene und dünne Platte **FG** legte und in dieser nur eine sehr kleine Öffnung anbrächte.

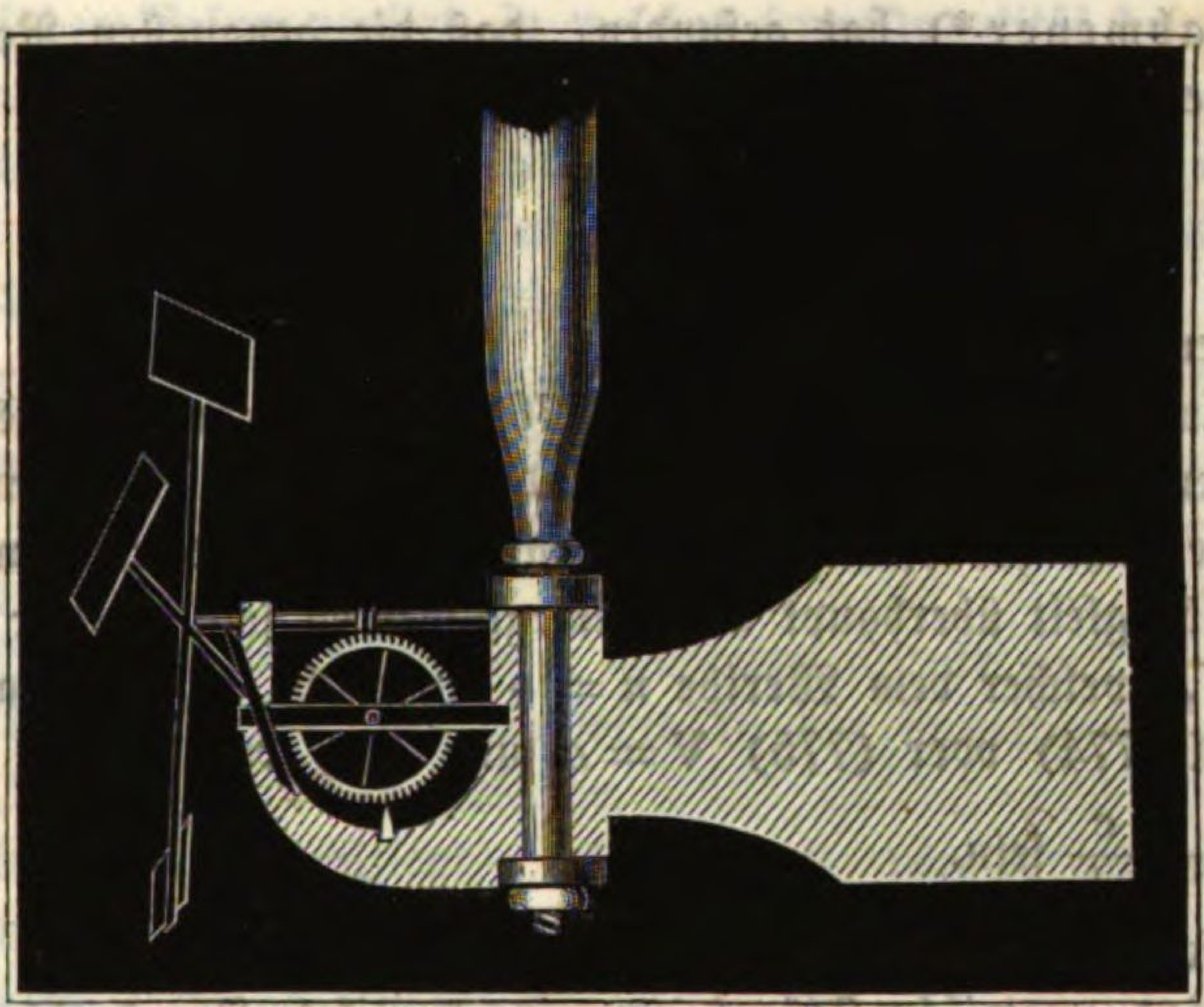
Eine durchaus auf willkürliche und nicht aus den Prinzipien der Hydraulik hergeleitete Hypothesen begründete Theorie der Pitotschen Röhre gibt Duchemin in seinen Experimentaluntersuchungen über die Gesetze des Widerstandes der Flüssigkeiten. Vermöge dieser Theorie ist derselbe denn auch zu den in §. 165 bereits namhaft gemachten höchst unwahrscheinlichen Resultaten über den Werth des Druckes gegen die verschiedenen Theile eines in einen unbegränzten Flüssigkeitsstrom getauchten Körpers geführt worden.

§. 182. Geschwindigkeitsmessungen vermittelst Instrumente, an welchen die dynamische Wirkung des Stoßes der Flüssigkeit zur Anwendung gebracht wird.

Die zweite Art von Hydrometern, durch welche man im Stande ist, die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsstromes in einem bestimmten Punkte zu bestimmen, unterscheidet sich von der im vorhergehenden Paragraphe betrachteten Klasse dadurch, daß man die Stoßkraft des Stromes in dem fraglichen Punkte dazu benutzt, um gewisse Körper in eine Bewegung zu setzen, deren Größe leicht beobachtet werden kann. Kennt man nun theils aus der besonderen Konstruktion des Instrumentes, theils aus vorhergehenden Versuchen die Beziehung, welche zwischen der Geschwindigkeit des zuletzt erwähnten Körpers und der Geschwindigkeit des Flüssigkeitsstromes stattfindet; so ist es leicht, aus der Beobachtung der ersteren die letztere zu berechnen.

Es ist nicht zu verkennen, daß Hydrometer der vorstehenden Art in Hinsicht auf Genauigkeit der Messung stets den Vorzug vor den im vorigen Paragraphe erwähnten, wobei ein gewisses Körpersystem durch den Stoß der Flüssigkeit im Gleichgewichte erhalten werden sollte, den Vorzug verdienen werden. Denn da es in der Wirklichkeit wol nie einen Strom geben wird, dessen Geschwindigkeit in irgend einem Punkte auf länge Zeit genau dieselbe bleibt; so folgt, daß bei den früheren, auf das Prinzip des statischen Gleichgewichts gegründeten Instrumenten in Folge der Variation der Geschwindigkeit des Stromes eine fortwährende oszillirende Bewegung um die Gleichgewichtslage stattfinden wird, welche nicht verstattet, den wahren Werth des auf das Instrument ausgeübten Druckes mit Sicherheit zu erkennen. Bei den letzteren Instrumenten, wo die Bewegung des Stromes wiederum eine Bewegung hervorbringt, ist Dies ganz anders. Die Geschwindigkeit des bewegten Körpers wird gleichzeitig mit der des Stromes zu- oder abnehmen, und ebenfalls um einen gewissen mittleren Werth schwanken: Da jedoch diese Geschwindigkeit nicht in irgend einem momentanen Zustande, sondern durch den Raum beobachtet wird, welchen irgend ein Punkt des bewegten Körpers in einer gewissen Zeit beschreibt; so erzeugt jenes Schwanken der Geschwindigkeit durchaus nicht die mindeste Schwierigkeit für die Beobachtung, und mit dem Endresultate ist noch der Vortheil verknüpft, daß dasselbe nicht einen augenblicklichen Werth der Stromgeschwindigkeit in einem gewissen Punkte, sondern den während der ganzen Zeit der Beobachtung stattfindenden mittleren Werth der Geschwindigkeit in jenem Punkte angibt.

Das zweckmäßigste Instrument, welches nach dem vorstehend angegebenen Prinzipe konstruirt worden, ist der hydrometrische oder Woltmannsche Flügel. Bei diesem Apparate stößt der Strom der Flüssigkeit gegen ein Flügelrad, welches nach Art der Windmühlenräder eingerichtet ist und an einer beweglichen Axe 2 bis 5 Arme mit schräg gestellten ebenen Flächen enthält. Auf der Axe dieses Rades sitzt ein Schraubengewinde, das mit seinen Gängen in ein verzahntes Rad greift und bei jeder Umdrehung des Flügelrades das verzahnte Rad um Einen Zahn weiterbringt. Man hat es in seiner Gewalt, den Eingriff der Schraube mit dem verzahnten Rade herzustellen und zu unterbrechen; demnach



wird man im Stande sein, die Anzahl der Umdrehungen zu beobachten, welche das Flügelrad in Folge des Stoßes der Flüssigkeit in irgend einer beliebigen Zeit vollendet haben wird, und es kommt nur noch auf die Beziehung an, welche zwischen der Anzahl der in der Zeiteinheit erfolgten Umdrehungen des Flügelrades und der Geschwindigkeit des Stromes stattfindet.

Bezeichnet

V die Geschwindigkeit des Flüssigkeitsstromes,

n die Anzahl der Umdrehungen, welche das Flügelrad in der Zeiteinheit macht, und

a, *b*, *c*, *d* . . . verschiedene aus Versuchen in Strömen von bekannter Geschwindigkeit zu bestimmende konstante Größen;

so wird man, wenn es auf keine zu große Genauigkeit ankommt

$$V = bn \quad . . . . (773)$$

setzen können. Genauere Resultate erhält man, wenn man die fragliche Beziehung zwischen V und *n* in der Form

$$V = a + bn \quad . . . . (774)$$

oder noch besser

$$V = a + bn + cn^2 \quad . . . . (775)$$

annimmt.

Lahmeyer*) hat gefunden, daß die genauesten Resultate durch eine Formel von der Form

$$V = a + bn + \frac{c}{d + n^2} \quad \ldots . (776)$$

erhalten werden.

Aus den Formeln (774) bis (776) erkennt man, daß es einen gewissen Werth der Stromgeschwindigkeit V gibt, unter welchen dieselbe nicht herabsinken darf, wenn der Flügel durch den Stoß der Flüssigkeit überhaupt noch bewegt werden soll. Dieser Werth von V, welcher dem Werthe $n = o$ entspricht, würde nach der Formel (774) oder (775) $V = a$ und nach der Formel (776) $V = a + \frac{c}{d}$ sein.

Es wird noch bemerkt, daß der in der obigen Figur dargestellte hydrometrische Flügel um eine vertikale Axe drehbar und mit einer Fahne versehen ist, welche den Zweck hat, das Instrument im Strome dergestalt zu richten, daß die Flügelwelle mit der Strombewegung genau parallel zu liegen kommt.

III. Die Bewegung der schweren elastischen Flüssigkeiten.

§. 183. Transformation der allgemeinen Gleichungen (234) und (235) für den Fall, daß die in einer engen Röhre sich bewegende Flüssigkeit schwer und vollkommen elastisch sei.

Wir gehen jetzt dazu über, die Bewegungen einer schweren elastischen Flüssigkeit und die damit zunächst zusammenhängenden Erscheinungen zu betrachten. Hierbei setzen wir eine elastische Flüssigkeit voraus, deren Konstitution dem in §. 40 angeführten einfachen Mariotteschen Gesetze unterworfen ist, nach welchem die Spannung einer gewissen Quantität derselben oder der auf die Flächeneinheit bezogene Druck im umgekehrten Verhält-

*) Erfahrungsresultate über die Bewegung des Wassers in Flußbetten und Kanälen.

nisse mit dem Volum variirt, in welches jene Quantität bei einerlei Temperatur gebracht wird.

Ist demnach für eine bestimmte elastische Flüssigkeit, welche fortwährend auf derselben Temperatur von τ Graden des hundertheiligen Thermometers erhalten wird,

p der Druck auf die Flächeneinheit, welchen diese Flüssigkeit in irgend einem Punkte ausübt,

w das Gewicht der Volumeinheit dieser Flüssigkeit unter dem Drucke p,

μ die Dichtigkeit derselben unter demselben Drucke p,

g die Beschleunigung der Schwere in der Zeiteinheit, gleich 31,2644 Fuß in der Sekunde,

k ein konstanter Koeffizient, dessen Werth von der besonderen Natur der Flüssigkeit abhängt;

so hat man nach Gl. (203^d) allgemein

$$p = kw \quad \ldots \quad (777)$$

oder da $w = g\mu$ ist,

$$p = gk\mu \quad \ldots \quad (778)$$

Was den Werth des Koeffizienten k betrifft; so ist derselbe für atmosphärische Luft nach Gl. (203^k)

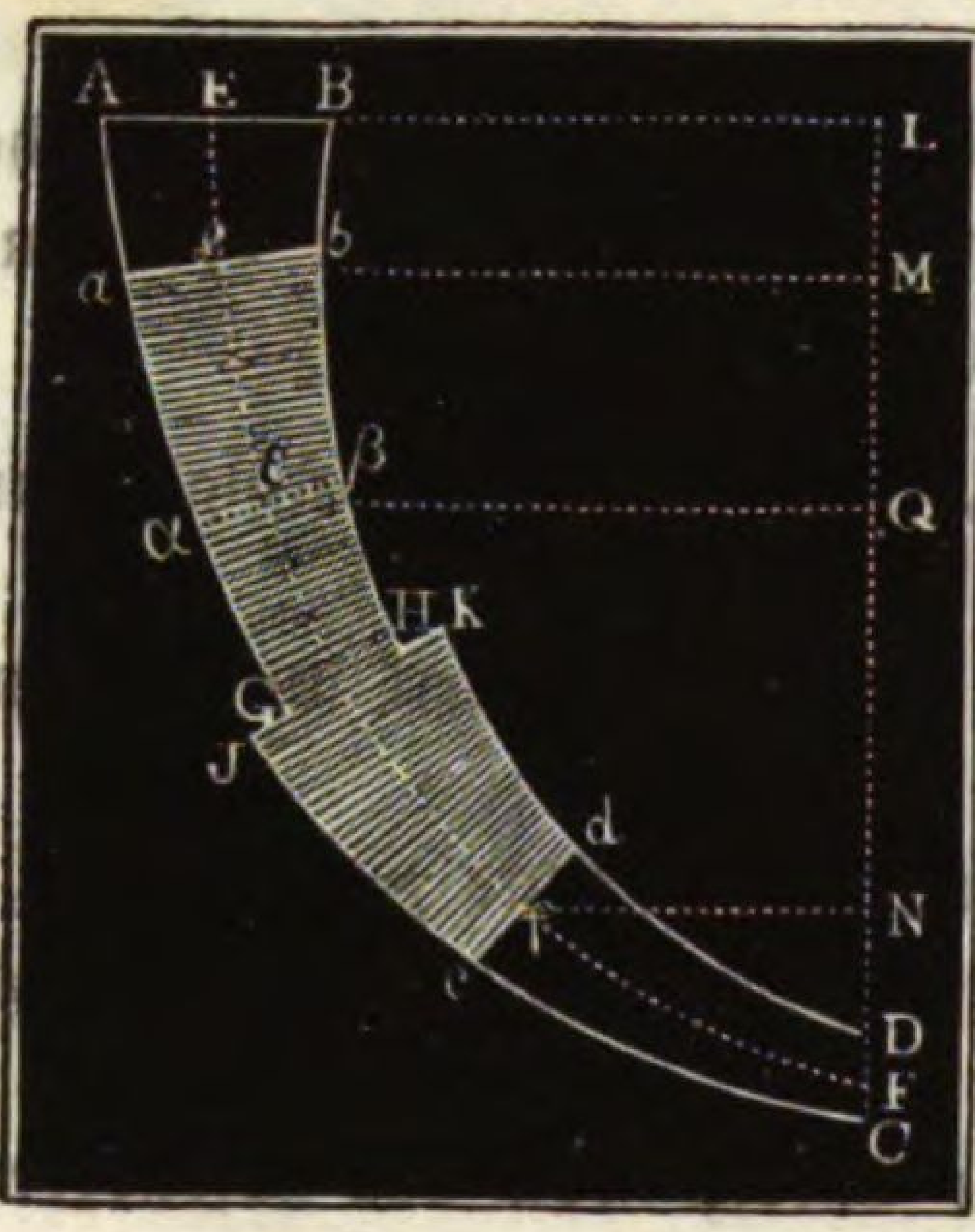
$$k = 25343\,(1 + 0{,}00366\,\tau) \quad \ldots \quad (779)$$

Für irgend eine andere elastische Flüssigkeit, deren spezifisches Gewicht in Beziehung zur Luft $= \sigma$ ist, würde man nach Gl. (203^l)

$$k = \frac{1}{\sigma}\,25343\,(1 + 0{,}00366\,\tau) \quad \ldots \quad (780)$$

haben.

Gehen wir jetzt dazu über, die Bewegung zu betrachten, welche eine gewisse Quantität $abdc$ der in einer engen Röhre enthaltenen schweren elastischen Flüssigkeit unter der Wirkung der darauf angebrachten Kräfte annimmt. Die allgemeinen Betrachtungen und Formeln des §s 55 finden auf diesen Fall unmittelbare Anwendung. Wir setzen nämlich ebenso, wie in je-



nem Paragraphe, voraus, daß am Ende der Zeit t auf die fragliche Flüssigkeit folgende Kräfte wirken:

1) auf eine jede Einheit der Endfläche ab in der Richtung ef der Druck p' und auf jede Einheit der Endfläche cd in entgegengesetzter Richtung fe der Druck p'';

2) in gewissen festen Punkten des Gefäßes Kräfte, wie R, welche der Bewegung entgegenwirken, und deren Angriffspunkte sich mit einer Geschwindigkeit u in der Richtung der Bewegung der Flüssigkeit fortbewegen;

3) auf ein jedes Massentheilchen der Flüssigkeit in vertikaler Richtung abwärts die Schwere, welche im Stande ist, der Materie in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit g zu verleihen;

4) gewisse Stoßkräfte, welche dadurch erzeugt werden, daß der Querschnitt der Röhre an gewissen Stellen, wie bei GH, JL, plötzlich um eine endliche Größe zunimmt;

5) ein Reibungs- oder Adhäsionswiderstand, welchen die Flüssigkeit bei ihrer Bewegung längs der Röhrenwände erleidet, und dessen Wirkung auf die Masseneinheit in irgend einem Punkte der Röhre gleich F ist.

Außerdem behalten wir folgende Bezeichnungen bei:

ω die Fläche irgend eines normalen Querschnittes $\alpha\beta$ der Röhre,

O′, O″ resp. der Querschnitt ab und cd,

ω_1, ω_2 zwei unmittelbar aufeinander folgende bestimmte Querschnitte GH und JK der Röhre, welche sich plötzlich um endliche Größen ändern,

s die Länge des Theiles Eε der Axe der Röhre von irgend einem festen Punkte E bis zum Querschnitte ω,

s', s'' resp. die Längen der Theile Ee und Ef der Axe der Röhre,

z die vertikale Tiefe LQ des Querschnittes ω unter dem Punkte E,

z', z'' resp. die vertikalen Tiefen LM und LN der Querschnitte O′ und O″ unter demselben Punkte,

v, μ, w, p resp. die Geschwindigkeit, die Dichtigkeit, das Gewicht der Volumeinheit und der Druck auf die Flächeneinheit für die Flüssigkeit im Querschnitte ω am Ende der Zeit t,

v', μ', w', p' resp. die entsprechenden Großen für den Querschnitt O′,

v'', μ'', w'', p'' resp. die entsprechenden Größen für den Querschnitt O″,

v_1, μ_1, w_1, p_1 resp. die entsprechenden Größen für den Querschnitt ω_1,

v_2, μ_2, w_2, p_2 resp. die entsprechenden Größen für den Querschnitt ω_2,

Bei einer elastischen Flüssigkeit, von welcher jetzt die Rede ist, bildet die Dichtigkeit μ nicht mehr, wie bei den unpreßbaren Flüssigkeiten, eine für alle Punkte und alle Zeiten konstante Größe, sondern ist im Allgemeinen sowol für die verschiedenen Punkte, wie für die Zeit veränderlich. Durch Gl. (778) ist dieselbe als Funktion der gleichzeitig in demselben Orte stattfindenden Spannung p gegeben, und man hat

$$\mu = \frac{p}{g\,k};$$

demnach auch

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{g\,k}\frac{dp}{dt} \quad \text{und}$$

$$\frac{d\mu}{ds} = \frac{1}{g\,k}\frac{dp}{ds}.$$

Außerdem hat man in der allgemeinen Gleichung (234) für die stetige in alle Massenelemente der Flüssigkeit wirkende Kraft der Schwere

$$f = g$$

und wegen der vertikalen Richtung dieser Kraft

$$\cos\vartheta = \frac{dz}{ds}$$

zu substituiren.

Hiernach ergibt die fragliche Gl. (234)

$$O'p'v' - O''p''v'' - \Sigma Ru + \frac{1}{k}\int_{s'}^{s''} p\omega v \frac{dz}{ds}.ds$$

$$-\frac{1}{gk}\int_{s'}^{s''} Fp\omega v ds - \int_{s'}^{s''} \omega \frac{dp}{dt} ds - \int_{s'}^{s''} \omega v \frac{dp}{ds} ds$$

$$= \frac{1}{gk}\int_{s'}^{s''} p\omega v \frac{dv}{dt} ds + \frac{1}{gk}\int_{s'}^{s''} p\omega v^2 \frac{dv}{ds} ds + \frac{1}{2gk}\Sigma p_1\omega_1 v_1 (v_1 - v_2)^2.$$

Die Gleichung (235) für den Zusammenhang der Flüssigkeit wird hier

$$\omega \frac{dp}{dt} + \frac{d(p\omega v)}{ds} = o.$$

Aus der letzteren Gleichung folgt, wenn man dieselbe mit ds multiplizirt und für die Gränzen von $s = s'$ bis $s = s''$ integrirt,

$$\int_{s'}^{s''} \omega \frac{dp}{dt} ds + \int_{s'}^{s''} \frac{d(p\omega v)}{ds} ds = o,$$

oder weil

$$\int_{s'}^{s''} \frac{d(p\omega v)}{ds} ds = \int_{p'O'v'}^{p''O''v''} d(p\omega v) = p''O''v'' - p'O'v'$$

ist,

$$\int_{s'}^{s''} \omega \frac{dp}{dt} ds + p''O''v'' - p'O'v' = o.$$

Beachtet man diese Beziehung; so vereinfacht sich die obige Gleichung für die Bewegung der Flüssigkeit auf die folgende,

$$-\Sigma Ru + \frac{1}{k}\int_{s'}^{s''} p\omega v \frac{dz}{ds} ds - \frac{1}{gk}\int_{s'}^{s''} Fp\omega v ds - \int_{s'}^{s''} \omega v \frac{dp}{ds} ds$$

$$= \frac{1}{gk}\int_{s'}^{s''} p\omega v \frac{dv}{dt} ds + \frac{1}{gk}\int_{s'}^{s''} p\omega v^2 \frac{dv}{ds} ds + \frac{1}{2gk}\Sigma p_1\omega_1 v_1 (v_1 - v_2)^2 \quad \ldots. (781)$$

Neben dieser Gleichung besteht für die ganze Ausdehnung der Flüssigkeit noch die Gleichung

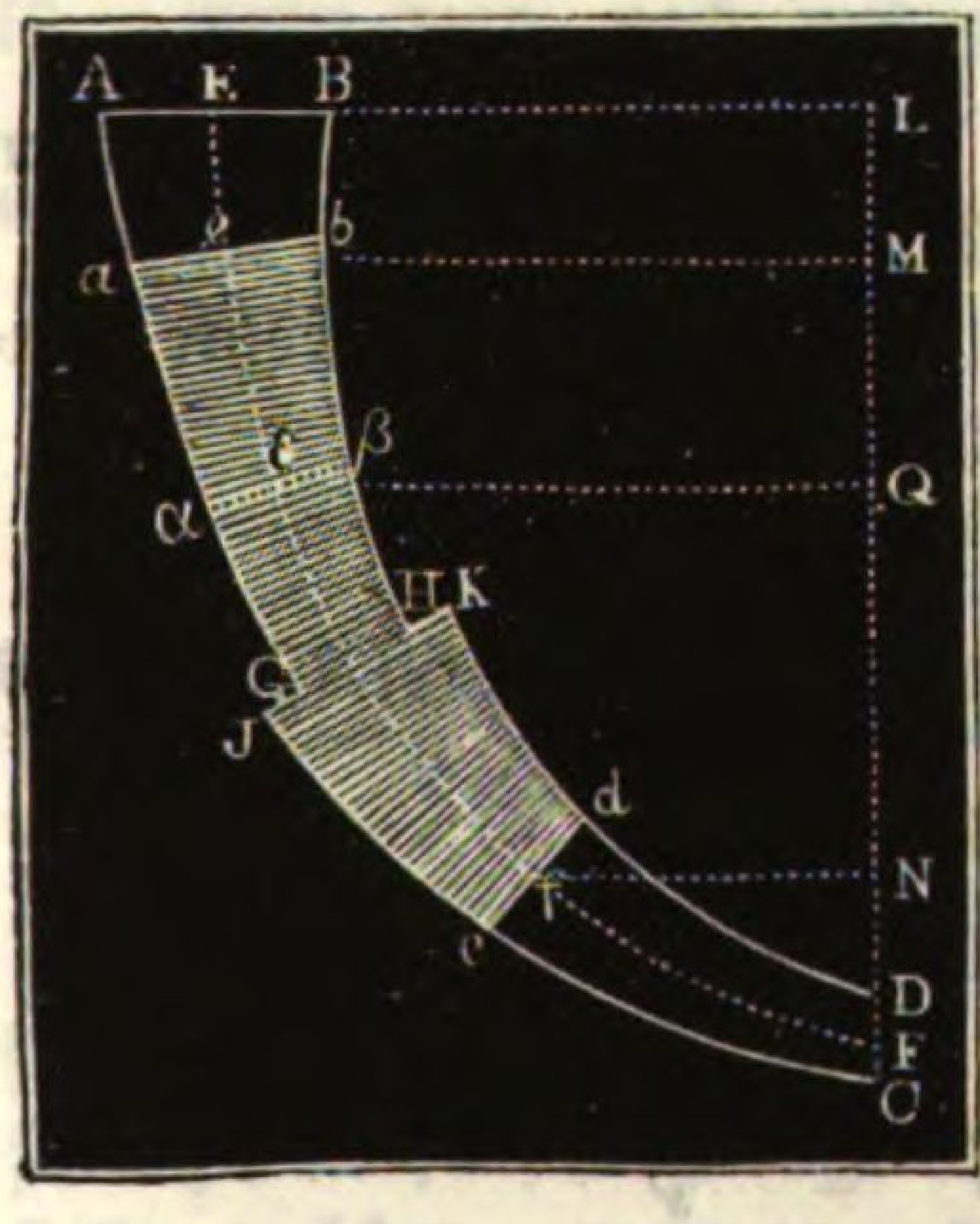
$$\omega \frac{dp}{dt} + \frac{d(p\omega v)}{ds} = o \quad \ldots . (782)$$

Setzt man in Gl. (781) s an die Stelle von s'', indem man unter dem Zeichen Σ nur diejenigen Größen einführt, welche über die Länge $e\varepsilon = s - s'$ der Röhre von Einfluß auf die Bewegung der Flüssigkeit sind; so wird die entstehende Gleichung, in Verbindung mit Gl. (782) und (781), dazu dienen, um die Spannung p und die Geschwindigkeit v zu bestimmen, welche in irgend einem Querschnitte ω der Röhre stattfinden.

Die Auflösung der vorstehenden Gleichungen in ihrer allgemeinsten Form würde jedoch zu sehr großen Schwierigkeiten führen; demnach begnügen wir uns damit, im Nachstehenden die für die Praxis wichtigsten Fälle unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen zu betrachten.

§. 184. Allgemeine Gleichungen für die Bewegung einer elastischen Flüssigkeit im Beharrungszustande.

Wenn man annimmt, die Bewegung der Flüssigkeit habe den Beharrungszustand angenommen, ein Zustand, in welchem die Geschwindigkeit und Dichtigkeit in jedem Punkte der Röhre fortwährend verändert bleibt; so leuchtet ein, daß die Größen v, μ, w, p, welche resp. die Geschwindigkeit, die Dichtigkeit, das Gewicht der Volumeinheit und die Spannung der Flüssigkeit in irgend einem Querschnitte ω bezeichnen, von der Zeit t unabhängig sein werden, sodaß man



$$\frac{dv}{dt} = o \text{ und } \frac{dp}{dt} = o$$

hat.

Hierdurch reduzirt sich zuvörderst die Gleichung (782) auf

$$\frac{d(p\omega v)}{ds} = o,$$

woraus nach gehöriger Integration in Beziehung zur Veränderlichen s

$$p\omega v = \text{const.}$$

folgt, was sich voraussehen ließ, da im Beharrungszustande offenbar auch die Masse $\mu\omega v = \frac{p\omega v}{gk}$, welche sich in der Zeiteinheit durch irgend einen Querschnitt ergießt, konstant sein muß.

Es bezeichne nun in dem gegenwärtigen Falle, wo die Flüssigkeit die ganze Röhre ABDC erfüllen, bei AB unter dem konstanten Drucke p' eintreten und bei CD unter dem gleichfalls konstanten Drucke p'' austreten wird,

Ω den letzten Querschnitt CD der Röhre,
V die darin herrschende Geschwindigkeit,
Z den vertikalen Höhenunterschied LF der beiden äußersten Querschnitte,
M die Masse der Flüssigkeit, welche sich in der Zeiteinheit aus der Röhre ergießt,
W das Gewicht dieser Masse,
Q″ das Volum dieser Masse unter dem im letzten Querschnitte CD herrschenden Drucke p'',
Q′ das Volum, welches dieselbe Masse unter dem im oberen Querschnitte AB herrschenden Drucke p' annehmen würde.

Da das Produkt $p\omega v$ für alle Querschnitte der Röhre konstant und für den untersten $= p''\Omega V$ ist; so hat man

$$p\omega v = p''\Omega V \quad \ldots . (783)$$

Dividirt man durch diese konstante Größe die Gl. (781) und berücksichtigt dabei, daß $\frac{dv}{dt} = o$ ist; so kommt

$$-\frac{\Sigma Ru}{p''\Omega V} + \frac{1}{k}\int_{s'}^{s''}\frac{dz}{ds}ds - \frac{1}{gk}\int_{s'}^{s''}F ds - \int_{s'}^{s''}\frac{1}{p}\frac{dp}{ds}ds$$

$$= \frac{1}{gk}\int_{s'}^{s''}v\frac{dv}{ds}ds + \frac{1}{2gk}\Sigma(v_1 - v_2)^2,$$

und weil

$$\int_{s'}^{s''} \frac{dz}{ds}\, ds = \int_{z'}^{z''} dz = z'' - z' = Z,$$

ferner

$$\int_{s'}^{s''} \frac{1}{p} \frac{dp}{ds}\, ds = \int_{p'}^{p''} \frac{dp}{p} = \log p'' - \log p' = -\log \frac{p'}{p''}$$

und endlich

$$\int_{s'}^{s''} v \frac{dv}{ds}\, ds = \int_{v'}^{v''} v\, dv = \frac{1}{2}(v''^2 - v'^2) = \frac{1}{2}(V^2 - v'^2),$$

oder wegen $p' O' v' = p'' \Omega V$ und demnach

$$v' = \frac{p'' \Omega}{p' O'} V$$

$$\int_{s'}^{s''} v \frac{dv}{ds}\, ds = \frac{V^2}{2}\left[1 - \left(\frac{p'' \Omega}{p' O'}\right)^2\right]$$

ist, wenn man noch mit gk multiplizirt, und $v_1 = \frac{p'' \Omega}{p_1 \omega_1}$, $v_2 = \frac{p'' \Omega}{p_2 \omega_2}$ setzt,

$$-\frac{gk}{p'' \Omega V} \Sigma R u + gZ - \int_{s'}^{s''} F\, ds + gk \log \frac{p'}{p''}$$

$$= \frac{V^2}{2}\left[1 - \left(\frac{p'' \Omega}{p' O'}\right)^2\right] + \frac{V^2}{2} \Sigma \left(\frac{p'' \Omega}{p_1 \omega_1} - \frac{p'' \Omega}{p_2 \omega_2}\right)^2 \quad \ldots . (784)$$

Aus dieser Gleichung läßt sich der Werth der Ausflußgeschwindigkeit V leicht finden. Es ist dabei noch darauf aufmerksam zu machen, daß log. einen natürlichen Logarithmus darstellt, welcher, wenn er aus den gewöhnlichen Tafeln genommen werden soll, mit 2,3026 zu multipliziren ist, sodaß man

$$\text{log. nat.}\,\frac{p'}{p''}=2{,}3026\,\text{log. vulg.}\,\frac{p'}{p''}$$

hat.

Das Volum der in der Zeiteinheit unter dem Drucke p'' aus der Röhre sich ergießenden Flüssigkeit ergibt sich hierauf durch die Formel

$$Q''=\Omega V \quad \ldots . (785)$$

Unter dem in AB herrschenden Drucke p' würde diese Ausflußmenge das Volum

$$Q'=\frac{p''}{p'}\Omega V \quad \ldots . (785^a)$$

annehmen.

Die Masse dieser Ausflußmenge ist

$$M=\mu''Q''=\mu''\Omega V=\frac{p''\Omega V}{gk} \quad \ldots . (786)$$

und das Gewicht derselben

$$W=gM=\frac{p''\Omega V}{k} \quad \ldots . (787)$$

Setzt man in Gl. (781) s an die Stelle von s'' und demgemäß in der ferneren Entwickelung resp. z, ω, p an die Stelle von Z', O'', p''; so ergibt sich behuf Bestimmung des in irgend einem Querschnitte ω herrschenden Druckes p auf die Flächeneinheit statt (784) die Gleichung

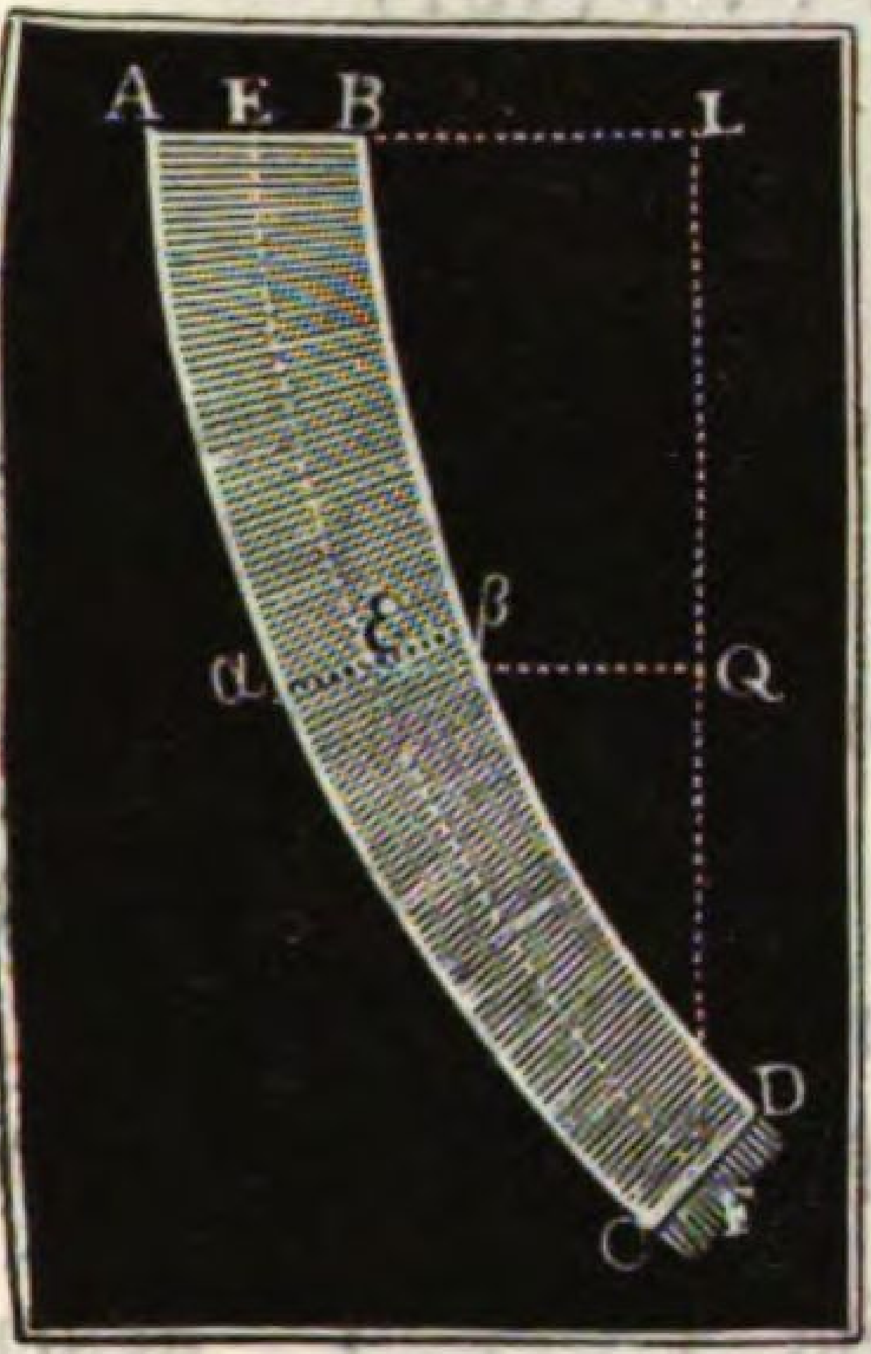
$$-\frac{gk}{p''\Omega V}\Sigma Ru+gz-\int_{s'}^{s}F\,ds+gk\log\frac{p'}{p}$$

$$=\frac{V^2}{2}\left[\left(\frac{p''\Omega}{p\omega}\right)^2-\left(\frac{p''\Omega}{p'O'}\right)^2\right]+\frac{V^2}{2}\Sigma\left(\frac{p''\Omega}{p_1\omega_1}-\frac{p''\Omega}{p_2\omega_2}\right)^2 \ldots . (788)$$

wobei jedoch unter die Zeichen Σ nur diejenigen Größen gebracht werden dürfen, welche oberhalb des Querschnittes ω liegen.

Bewegung einer schweren elastischen Flüssigkeit aus einem Gefäße, welches keine plötzlichen Querschnittsveränderungen enthält, im Beharrungszustande.

§. 185. Beharrlicher Ausfluß einer elastischen Flüssigkeit aus einer Röhre, welche keine plötzlichen Erweiterungen oder Verengungen enthält.



Wenn die Röhre, durch welche die Flüssigkeit sich ergießt, keine plötzlichen Erweiterungen oder Verengungen besitzt, und keine sonstigen Kräfte auf die Flüssigkeit wirken, als die Schwere und die Pressungen p', p'' gegen die Endflächen; so reduzirt sich für den Beharrungszustand die Gl. (784) auf

$$g\mathrm{Z} + g\,k\log\frac{p'}{p''} = \frac{\mathrm{V}^2}{2}\left[1 - \left(\frac{p''\Omega}{p'\mathrm{O}'}\right)^2\right] \quad \ldots . (789)$$

Hieraus folgt für die Ausflußgeschwindigkeit

$$\mathrm{V} = \sqrt{\frac{2g\left(\mathrm{Z} + k\log\frac{p'}{p''}\right)}{1 - \left(\frac{p''\Omega}{p'\mathrm{O}'}\right)^2}} \quad \ldots . (790)$$

Der vertikale Abstand $\mathrm{Z} = \mathrm{LF}$ der beiden Endflächen der Röhre, eine Größe, welche durch die Wirkung der Schwere auf die in der Röhre befindliche Flüssigkeit eingeführt ist, wird in der Regel im Vergleich zu der Größe $k\log\frac{p'}{p''}$, welche durch den Unterschied der Pressungen gegen die Endflächen eingeführt ist, so klein sein, daß sie vernachlässigt werden kann. (Bei unpreßbaren Flüssigkeiten, wo in der Regel die beiden Pressungen p' und p'' einander gleich sind, bildet, umgekehrt, das in Z multiplizirte Glied in dem Ausdrucke für V die wichtigste Größe, was darin seinen Grund hat, daß unpreßbare Flüssigkeiten bei gleichen Volumen ungleich schwerer sind, als elastische Flüssigkei-

ten, während die Letzteren trotz ihres geringen Gewichtes doch sehr starke Spannungen hervorbringen können.) Unter der letzteren Voraussetzung würde man einfach

$$V = \sqrt{\frac{2gk \log \frac{p'}{p''}}{1 - \left(\frac{p''\Omega}{p'O'}\right)^2}} \quad \ldots . (791)$$

haben.

Man sieht, daß die vorstehenden Gleichungen von der Gestalt der Röhre unabhängig sind, und daß dabei nur das Verhältniß $\frac{\Omega}{O'}$ der Ausflußöffnung zu der vorderen Öffnung, bei welcher die Flüssigkeit in die Röhre tritt, sowie bei Gl. (789) der vertikale Abstand dieser beiden Öffnungen in Betracht kommt.

Wäre die Ausflußöffnung Ω im Vergleich zu der oberen Öffnung O' sehr klein, sodaß man die Größe $\left(\frac{p''\Omega}{p'O'}\right)^2$ gegen die Einheit vernachlässigen könnte; so würde man nach Gl. (791)

$$V = \sqrt{2gk \log \frac{p'}{p''}} \quad \ldots . (792)$$

haben. Man erkennt, daß diese Formel auch dann noch anwendbar bleibt, wenn nicht gerade die Ausflußöffnung Ω viel kleiner ist, als der obere Querschnitt O', wofern alsdann nur der in diesem Querschnitte herrschende Druck p' bedeutend größer ist, als der äußere Druck p'', da es ja überhaupt hier nur darauf ankommt, daß das Produkt $p'O'$ sehr groß sei im Vergleich zu dem Produkte $p''\Omega$.

Aus Gl. (791) folgt auch, daß wenn der Druck p' groß genug gedacht wird, der Beharrungszustand beim Ausflusse einer elastischen Flüssigkeit selbst dann noch möglich ist, wenn die Ausflußöffnung Ω größer ist, als der oberste Querschnitt O', was bei unpreßbaren Flüssigkeiten durchaus nicht stattfinden durfte, wenn ein beharrlicher Ausfluß unterhalten werden sollte (vergl. §. 65 u. 66).

Das Volum der Ausflußmenge in der Zeiteinheit unter dem Drucke p'' würde nach Gl. (785)

$$Q'' = \Omega \sqrt{2gk \log \frac{p'}{p''}} \quad \ldots \ldots (793)$$

sein, wenn man dabei den Werth der Ausflußgeschwindigkeit aus Gl. (792) zu Grunde legte. Unter dem im oberen Querschnitte O′ herrschenden Drucke würde diese Ausflußmenge das Volum

$$Q' = \frac{p''}{p'} \Omega \sqrt{2gk \log \frac{p'}{p''}} \quad \ldots \ldots (794)$$

an nehmen.

Das Gewicht der in Rede stehenden Ausflußmenge ist nach Gl. (787)

$$W = p'' \Omega \sqrt{\frac{2g}{k} \log \frac{p'}{p''}} \quad \ldots \ldots (795)$$

Was den Druck p betrifft, welchen die Flüssigkeit in irgend einem Querschnitte ω der Röhre auf die Flächeneinheit ausübt so erhält man aus Gl. (788)

$$gz + gk \log \frac{p'}{p} = \frac{V^2}{2} \left[\left(\frac{p'' \Omega}{p \omega} \right)^2 - \left(\frac{p'' \Omega}{p' O'} \right)^2 \right]$$

oder wenn man hierin für V seinen Werth aus Gl. (790) substituirt,

$$\frac{z + k \log \frac{p'}{p}}{Z + k \log \frac{p'}{p''}} = \frac{\left(\frac{p' O'}{p \omega} \right)^2 - 1}{\left(\frac{p' O'}{p'' \Omega} \right)^2 - 1} \quad \ldots \ldots (796)$$

Wenn man in dieser Gleichung die Größen z und Z gegen die damit verbundenen Glieder vernachlässigt; so kommt

$$\frac{\log \frac{p'}{p}}{\log \frac{p'}{p''}} = \frac{\left(\frac{p' O'}{p \omega} \right)^2 - 1}{\left(\frac{p' O'}{p'' \Omega} \right)^2 - 1} \quad \ldots \ldots (797)$$

Für den Fall, wo die Ausflußöffnung Ω im Vergleich zu der Einmündung O′ sehr klein wäre, würde man

$$\frac{\log\frac{p'}{p}}{\log\frac{p'}{p''}} = \frac{\left(\frac{p'O'}{p\omega}\right)^2 - 1}{\left(\frac{p'O'}{p''\Omega}\right)^2} = \left(\frac{p''\Omega}{p\omega}\right)^2 - \left(\frac{p''\Omega}{p'O'}\right)^2 \quad \ldots \quad (798)$$

setzen können.

Um den Werth des im Querschnitte ω herrschenden Druckes p zu bestimmen, hat man Eine der drei vorstehenden transzendenten Gleichungen nach einer bekannten Näherungsmethode in Beziehung zu p aufzulösen. Bei der Auflösung dieser Gleichungen, und nicht minder bei der Berechnung der übrigen Formeln, in welchen der natürliche Logarithmus irgend einer Zahl vorkommt, wird man sich häufig mit Vortheil eines Näherungswerthes für den fraglichen Logarithmus bedienen können, welcher sich folgendermaaßen ergibt.

Wenn x' und x'' die Gränzen sind, zwischen welchen das bestimmte Integral

$$\int_{x'}^{x''} y\,dx$$

genommen werden soll, während y eine beliebige von x abhängige Funktion bezeichnet; so denke man sich die Differenz $x''-x'$ in eine beliebige, aber gerade Anzahl von n gleichen Theilen getheilt, deren jeder also $=\frac{x''-x'}{n}$ ist.

Bezeichnet nun

y_0 den Werth von y für $x=x'$,

y_1 „ „ „ y „ $x=x'+\frac{x''-x'}{n}$,

y_2 „ „ „ y „ $x=x'+\frac{2(x''-x')}{n}$,

y_3 „ „ „ y „ $x=x'+\frac{3(x''-x')}{n}$,

. . . .

y_n „ „ „ y „ $x=x'+\frac{n(x''-x')}{n}=x''$;

so hat man nach einer bekannten Formel näherungsweise

$$\int_{x'}^{x''} y\,dx = \frac{x''-x'}{3n}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\ldots 2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n) \quad \ldots (799)$$

Wäre nun $y=\frac{1}{x}$; so würde $\int_{x'}^{x''} y\,dx = \int_{x'}^{x''} \frac{1}{x}\,dx = \log\frac{x''}{x'}$ sein, und man hätte, wenn man die Differenz $x''-x'$ nur in zwei gleiche Theile theilte oder $n=2$ setzte, weil alsdann

$$y_0 = \frac{1}{x'},$$

$$y_1 = \frac{1}{x'+\frac{x''-x'}{2}} = \frac{2}{x'+x''},$$

$$y_2 = \frac{1}{x''}$$

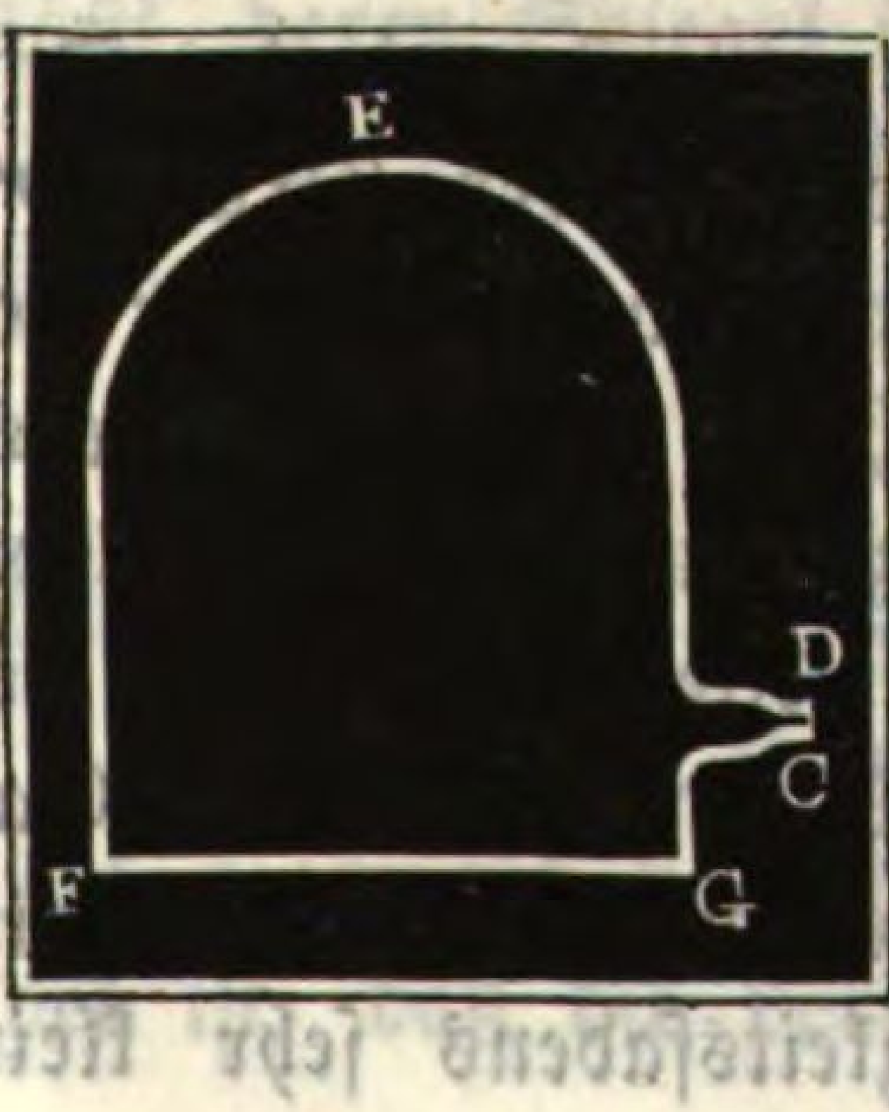
ist,

$$\log\frac{x''}{x'} = \frac{x''-x'}{6}\left(\frac{1}{x'}+\frac{8}{x'+x''}+\frac{1}{x''}\right) \quad \ldots (800)$$

Dieser Werth von $\log\frac{x''}{x'}$ stellt sich als um so genauer heraus, je geringer der Unterschied zwischen den beiden Gränzwerthen x' und x'' ist.

§. 186. Ausfluß einer elastischen Flüssigkeit aus einem Gasometer im Beharrungszustande.

Unter Gasometer verstehen wir irgend ein geräumiges Gefäß EFGCD von beliebiger Gestalt, in welchem sich die elastische Flüssigkeit befindet. CD ist die Ausmündung Ω, aus welcher sich die Flüssigkeit ergießt. Es wird vorausgesetzt, daß sich im Gasometer nebst der dazugehörigen Ausflußröhre nirgends plötzliche Erweiterungen oder Verengungen befinden, und daß die Ausflußöffnung CD nach innen dergestalt erweitert sei, daß die Flüssigkeit in pa



rallelen Fäden aus derselben heraustreten könne. Außerdem werde im Gasometer regelmäßig so viel Gas erzeugt, als durch die Öffnung CD hinaustritt, sodaß der innere Druck im Gasometer stets konstant bleibt und die Bewegung des Gases beharrlich wird.

Offenbar kann man sich die Bewegung der Flüssigkeit als in lauter ungemein dünnen Fäden vor sich gehend denken. Der Querschnitt dieser Fäden wird sich von der Ausflußöffnung CD aus bis in das Innere des Gasometers allmählig erweitern, und man müßte nicht sowol das Gesetz für diese Querschnittsveränderung, sondern auch die Gestalt der Axe eines jeden solchen Fadens kennen, wenn man die genauen Formeln des vorhergehenden Paragraphs zur Bestimmung der Ausflußgeschwindigkeit und des in jedem Punkte der Flüssigkeit herrschenden Druckes darauf in Anwendung bringen wollte.

Nun ist aber leicht zu erkennen, daß wenn die Ausflußöffnung CD im Vergleich zu den Querschnitten des eigentlichen Gasometers EFG klein ist, die Bewegung der Flüssigkeit in diesem Raume und in einiger Entfernung von der Einmündung der Ansatzröhre nur sehr schwach sein wird, und behuf Bestimmung des Druckes in den verschiedenen Punkten des Gasometers als im Zustande der Ruhe begriffen angesehen werden kann. Vernachlässigt man alsdann noch die Einwirkung der Schwere auf die im Gasometer enthaltene Masse; so wird man annehmen können, der Druck der elastischen Flüssigkeit im Gasometer auf eine jede Flächeneinheit sei eine konstante Größe p'.

Behuf Bestimmung der Ausflußgeschwindigkeit V würde nun die Kenntniß der Gestalt der einzelnen Flüssigkeitsfäden nicht erforderlich sein, wol aber das Verhältniß des obersten Querschnittes, in welchem der Druck p' herrscht, zum untersten, in der Öffnung CD liegenden Querschnitte, in welchem der Druck p'' herrscht. Jener oberste Querschnitt liegt nun für jeden der genannten Flüssigkeitsfäden irgendwo innerhalb des Gasometers, ohne daß man dessen Stelle und Größe bezeichnen könnte. Trotz dieser Ungewißheit leidet es aber keinen Zweifel, daß wenn die Ausflußöffnung CD im Vergleich zu den Querschnitten des Gasometerraumes sehr klein ist, auch das ebengenannte Verhältniß der beiden Endflächen eines jeden Flüssigkeitsfadens sehr klein

sein wird, und demnach gegen die Einheit vernachlässigt werden kann.

Unter der Voraussetzung einer kleinen Ausflußöffnung CD=Ω wird man demnach zur Bestimmung der Ausflußgeschwindigkeit V sich der Formel (792) bedienen können, wonach

$$V = \sqrt{2gk \log \frac{p'}{p''}} \quad \ldots \ldots (801)$$

ist.

Nach Gl. (794) ergießt sich in jeder Zeiteinheit aus dem Gasometer eine Ausflußmenge, deren Volum unter dem in jenem Gefäße herrschenden Drucke p'

$$Q' = \frac{p''}{p'} \Omega \sqrt{2gk \log \frac{p'}{p''}} \quad \ldots \ldots (802)$$

und deren absolutes Gewicht nach Gl. (795)

$$W = p'' \Omega \sqrt{\frac{2g}{k} \log \frac{p'}{p''}} \quad \ldots \ldots (803)$$

ist.

Soll der Ausfluß beharrlich bleiben; so muß, um den Druck p' im Gasometer konstant zu erhalten, entweder in jeder Zeiteinheit eine der vorstehenden Ausflußmenge gleiche Quantität der Flüssigkeit im Gasometer erzeugt werden, oder man muß eine Vorrichtung treffen, bei welcher sich mit der Zeit der Raum des Gasometers dergestalt verkleinert, daß die Spannung des darin befindlichen, an Menge abnehmenden Gases stets denselben Werth behält, was unter Anderem in der bei Gasleitungen üblichen Weise dadurch zu erreichen ist, daß man den Gasometer unten öffnet und auf einer unpreßbaren Flüssigkeit schwimmen läßt, deren Spiegel innerhalb des Gefäßes den fehlenden Boden desselben vertritt und sich von selbst hebt, sowie das Gas entströmt.

§. 187. Kontraktion des flüssigen elastischen Strahles und Ausfluß aus Öffnungen in dünnen Wänden.

Wenn die Öffnung Ω, aus welcher sich die elastische Flüssigkeit ergießt, nicht dergestalt nach innen erweitert und abgerundet ist, daß die vorderen Elemente ihrer Begränzungsfläche zu

der auf ihrer Ebene errichteten Normalen parallel sind; so wird die Flüssigkeit nicht, wie Dies bisher angenommen ist, in parallelen Fäden heraustreten. Diese Fäden werden vielmehr, ebenso wie bei den unpreßbaren Flüssigkeiten, in konvergenten Richtungen aus der Öffnung strömen und erst in einiger Entfernung eine gemeinsame parallele Richtung annehmen. In dem Punkte, wo Solches erfolgt, ist der Querschnitt des Strahles kleiner, als die Ausflußöffnung Ω, und man bezeichnet diese Erscheinung, welche der bei unpreßbaren Flüssigkeiten stattfindenden (vergl. §. 81 ff.) ganz analog ist, ebenfalls mit dem Nameu der **Kontraktion** des flüssigen Strahles.

Wenn m den **Kontraktionskoeffizienten** oder das Verhältniß des Querschnittes der größten Kontraktion zur Ausflußöffnung bezeichnet; so hat man für jenen Querschnitt den Werth

$$m\Omega.$$

Die Beobachtungen lehren nun, daß die Geschwindigkeit, mit welcher die elastische Flüssigkeit durch diesen Querschnitt der größten Kontraktion strömt, sehr nahe dieselbe ist, welche die früheren Formeln für V ergeben würden, wenn man sich den zwischen der eigentlichen Ausflußöffnung Ω und dem Querschnitte $m\Omega$ der größten Kontraktion liegenden Theil des Strahles als von den Gefäßwänden umschlossen denkt. Demnach würde man nach Gl. (792) für die Geschwindigkeit des Strahles im Querschnitte der größten Kontraktion

$$V = \sqrt{2gk\log\frac{p'}{p''}} \quad \ldots . (804)$$

haben.

Das unter dem Drucke p' des Gasometers gemessene Volum der Ausflußmenge in der Zeiteinheit würde nach Gl. (802), wenn man darin $m\Omega$ an die Stelle von Ω setzt,

$$Q' = m\frac{p''}{p'}\Omega\sqrt{2gk\log\frac{p'}{p''}} \quad \ldots . (805)$$

sein, während man für das **Gewicht** dieser Ausflußmenge nach Gl. (803)

$$W = mp''\Omega\sqrt{\frac{2g}{k}\log\frac{p'}{p''}} \quad \ldots . (806)$$

hätte.

Was den praktischen Werth des Kontraktionskoeffizienten m betrifft; so ist derselbe nicht nur für die verschiedenen elastischen Flüssigkeiten gleich, sondern auch nahezu demjenigen Werthe gleich, welcher unter denselben Verhältnissen bei unpreßbaren Flüssigkeiten stattfinden würde. Übrigens hängt dieser Werth, wie bei den unpreßbaren Flüssigkeiten, von der besonderen Form der Begränzungsflächen der Ausflußöffnung Ω ab. Er ist am kleinsten, wenn sich die letztere Öffnung in einer dünnen ebenen Wand befindet, in welchem Falle **vollständige Kontraktion** des Strahles stattfindet.

Aus den von **Weisbach** angestellten Berechnungen der Versuche von **Koch** geht hervor, daß man bei **vollständiger Kontraktion** und wenn der Druck p' im Gasometer den äußeren atmosphärischen Druck p'' um $\frac{1}{200}$ bis $\frac{1}{5}$ überschreitet, im Mittel

$$m = 0{,}58$$

annehmen könne.

Über den Werth des Koeffizienten m bei **unvollkommener Kontraktion**, welche in den ad §. 85 bezeichneten Fällen eintreten würde, hat man noch keine genügenden Versuche angestellt. In Berücksichtigung der nahen Übereinstimmung der Erscheinung der vollkommenen Kontraktion bei unpreßbaren und elastischen Flüssigkeiten wird man jedoch auf eine ebenso nahe Übereinstimmung bei etwaiger unvollkommener Kontraktion schließen und in solchen Fällen den Werth von m nach den Angaben des §s 85 korrigiren können, indem man für die vollkommene Kontraktion bei elastischen Flüssigkeiten den Werth $m = 0{,}58$ zu Grunde legt. Da der dem letzteren Falle entsprechende Werth von m bei unpreßbaren Flüssigkeiten im Mittel $= 0{,}61$ war; so wird sich irgend ein Kontraktionskoeffizient, welcher für unpreßbare Flüssigkeiten bekannt ist, behuf seiner Anwendung auf elastische Flüssigkeiten unter gleichen Umständen auf $\frac{58}{61} = 0{,}95$ seines früheren Werthes reduziren.

§. 188. Nähere Betrachtung des beharrlichen Ausflusses einer elastischen Flüssigkeit, wenn der äußere Druck p'' ungemein schwach oder gar gleich null ist.

Der obigen Formeln für den beharrlichen Ausfluß einer elastischen Flüssigkeit aus einer Röhre oder einem Gefäße wird man sich unbedenklich bedienen können, sobald nur der äußere Druck p'' irgend einen namhaften Werth in Beziehung zu dem inneren Drucke p' hat und demnach die Dichtigkeit der unter jenem Drucke austretenden Flüssigkeitsschichten von einigem Belange in Vergleich zu der im Gefäße selbst herrschenden Dichtigkeit ist.

Im Nachfolgenden wollen wir jedoch den Fall näher ins Auge fassen, wo der äußere Druck p'' im Verhältnisse zu dem inneren Drucke p' sehr klein oder das Verhältniß $\frac{p'}{p''}$ sehr groß ist, den Fall also, wo die Dichtigkeit der Flüssigkeit bei ihrem Übergange aus der im Gefäße stattfindenden Spannung zu der Spannung des umgebenden Mittels eine ungemein große Variation erleiden muß.

Betrachten wir daher zuvörderst die Gleichung (792)

$$V = \sqrt{2gk \log \frac{p'}{p''}}$$

für die Ausflußgeschwindigkeit und die Formel

$$Q' = \frac{p''}{p'} \Omega \sqrt{2gk \log \frac{p'}{p''}}$$

für das Volum der unter dem inneren Drucke gemessenen Ausflußmengen, indem wir den inneren Druck p' als konstant und von endlichem Werthe, den äußeren Druck p'' dagegen als veränderlich annehmen; so leuchtet ein, daß die Geschwindigkeit V stets zunehmen wird, wenn der äußere Druck p'' abnimmt, und umgekehrt, indem für $p''=p'$ der Werth jener Geschwindigkeit $=o$, für $p''=o$ dagegen jener Werth $=\infty$ werden wird.

Wie jedoch der Werth der Ausflußmenge Q' mit dem Drucke p'' variirt, läßt sich aus der letzteren Gleichung nicht so unmittelbar erkennen, wiewol daraus hervorgeht, daß für $p''=o$ $Q'=o$ sein wird. Setzt man jedoch, um zu untersuchen, ob die

Größe Q' für die Veränderliche p'' ein Maximum besitzt, den Differenzialkoeffizienten von Q' in Beziehung zu p'' gleich null; so erhält man

$$\left(\frac{p''}{p'}\right)^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{\log\frac{p'}{p''}}} - \sqrt{\log\frac{p'}{p''}}\right) = o$$

oder

$$\left(\frac{p''}{p'}\right)^2 \left(\frac{\frac{1}{2} - \log\frac{p'}{p''}}{\sqrt{\log\frac{p'}{p''}}}\right) = o.$$

Dieser Gleichung kann zuvörderst dadurch ein Genüge geleistet werden, daß $p'' = o$ ist. Jedoch erkennt man leicht, daß diese Annahme keinem Maximum, sondern einem Minimum von Q entspricht, und daß man für $p'' = o$ $Q' = o$ hat.

Außerdem kann aber die vorstehende Beziehung durch den Werth

$$\log\frac{p'}{p''} = \frac{1}{2},$$

woraus

$$\frac{p'}{p''} = \sqrt{e} = 1{,}6487 \quad . \; . \; . \; . \; (807)$$

oder

$$p'' = \frac{p'}{\sqrt{e}} = 0{,}60653 \, . \, p'$$

folgt, erfüllt werden, und dieser Werth entspricht einem wirklichen Maximum der Ausflußmenge, deren Volum Q', unter dem inneren Drucke p' gemessen,

$$Q' = \Omega\sqrt{\frac{g\,k}{e}} = 0{,}60653\,\Omega\sqrt{g\,k} \quad . \; . \; . \; . \; (808)$$

ist, während ihr Volum Q'', unter dem äußeren Drucke p'' gemessen, nach Gl. (793)

$$Q'' = \Omega\sqrt{g\,k} \quad . \; . \; . \; . \; (809)$$

und ihr absolutes Gewicht W, nach Gl. (795)

$$W = p''\Omega\sqrt{\frac{g}{k}} = 0{,}60653\,p'\Omega\sqrt{\frac{g}{k}} \quad \ldots\ldots (810)$$

ist.

Die Geschwindigkeit, mit welcher dieses Maximum der Ausflußmenge entströmt, ist

$$V = \sqrt{gk}, \quad \ldots\ldots (811)$$

eine Größe, welche von dem absoluten Werthe der beiden Pressungen unabhängig ist. Man findet dafür, wenn man $g = 31{,}2644$ Fuß setzt, für atmosphärische Luft von der Temperatur 15^0, indem alsdann nach Gl. (779)

$$k = 25343\,(1 + 0{,}00366 \,.\, 15) = 26744$$

wird, den Werth von

$$V = 914 \text{ Fuß.}$$

Aus dem Vorstehenden ergibt sich nun, daß wenn der innere Druck p' im Gasometer als eine konstante und der äußere Druck p'' als eine veränderliche Größe betrachtet wird, für $p'' = p'$ gar kein Ausfluß erfolgt, indem $V = o$ ist, daß dagegen für abnehmende Werthe von p'' die Geschwindigkeit V und auch die Ausflußmenge wächst, bis p'' den Werth $0{,}60653 \,.\, p'$ erreicht hat, für welchen bei der Geschwindigkeit von $V = 914$ Fuß in der Sekunde die größte Gasmenge, deren Gewicht durch Gl. (810) gegeben ist, entströmt. Bei fernerer Abnahme von p'' nimmt zwar stets die Geschwindigkeit V zu, aber die Ausflußmenge nimmt ab, indem für $p'' = o$ die Geschwindigkeit $V = \infty$, die Ausflußmenge aber $= o$ wird.

Das vorstehende auffallend erscheinende Resultat erklärt sich dadurch, daß die durch den inneren Druck p' repräsentirte bewegende Kraft, solange $p'' > 0{,}60653\,p'$ ist, zum größeren Theile auf die Überwindung eines starken Gegendruckes von außen, und solange $p'' < 0{,}60653\,p'$ ist, auf die Hervorbringung einer übermäßigen Geschwindigkeit der austretenden Massentheilchen verwendet werden muß, und demnach in beiden Fällen nicht im Stande ist, in der Zeiteinheit eine so große Masse durch die Ausflußöffnung zu treiben, wie Solches für $p'' = 0{,}60653 \,.\, p'$ möglich ist.

Hieraus würde für die Anlegung eines Apparates, durch welchen mittelst eines Gasometers ein beharrlicher Ausfluß einer elastischen Flüssigkeit in möglichst großer Quantität unterhalten werden soll, indem diese Quantität gleichzeitig durch irgend ein Pumpwerk in den Gasometer getrieben wird, wie bei den Gebläsen, die praktische Regel folgen, daß der Druck p' im Gasometer (nach Gl. 807) etwa 1,6487 von dem äußeren Drucke betragen müsse. Bei einer solchen Einrichtung würde eine bestimmte Gasmenge unter dem kleinstmöglichen inneren Drucke zu entlassen, und demnach zur Bewegung des Pumpwerkes die kleinstmögliche Betriebskraft erforderlich sein.

Das obige Resultat, wonach bei einem äußeren Drucke von $p''=o$ die Ausflußmenge aus dem Gasometer ebenfalls $=o$ sein würde, drückt eigentlich so viel aus, daß es überhaupt nicht möglich ist, bei einem endlichen Drucke im Gasometer einen beharrlichen Ausfluß in einen Raum zu unterhalten, wo gar kein Druck herrscht. Wäre der innere Rauminhalt des Gasometers eine unveränderliche Größe, so würde es, um bei einem endlichen äußeren Drucke p'' und unter dem inneren Drucke p' einen beharrlichen Ausfluß zu erhalten, erforderlich sein, daß in jeder Zeiteinheit eine bestimmte Gasmenge in den Gasometer geführt würde, deren Gewicht durch Gl. (795) dargestellt wäre. Sobald man mehr Gas einführte, würde sich der innere Druck p' ebenfalls vermehren und denjenigen Werth annehmen, für welchen das eingeführte Quantum regelmäßig unter dem äußeren Drucke p'' ergossen werden könnte. Wäre nun aber dieser äußere Druck $=o$, in welchem Falle die Ausflußmenge $=o$ sein würde, also überhaupt gar kein Gas in den Gasometer gebracht werden dürfte; so würde bei erfolgender regelmäßiger Einführung von Gas der innere Druck p' im Gasometer unaufhörlich wachsen und einen unendlich großen Werth anzunehmen streben, bei welchem alsdann der beharrliche Ausfluß einer bestimmten Gasmenge unter dem äußeren Drucke $=o$ erfolgen könnte.

Bei der Beurtheilung der letzteren Ergebnisse darf man nicht vergessen, daß die Formeln, aus welchen dieselben fließen, auf die Voraussetzung einer vollkommenen elastischen Flüssigkeit gegründet sind. Das charakterische Merkmal einer solchen Flüssigkeit war die Eigenschaft, daß ihre Dichtigkeit stets ihrer

Spannung genau proportional sei, daß also auch diese Dichtigkeit bei einer Spannung $= o$ ebenfalls $= o$ sein würde, oder daß ein endliches Quantum der Flüssigkeit unter einem Drucke $= o$ einen unendlich großen Raum einnähme. Außerdem war vorausgesetzt, daß die Schichten der Flüssigkeit in dem Momente, wo sie die Ausflußöffnung Ω passiren, genau die Spannung des Mediums annehmen, in welches sie sich ergießen. Sollte sich nun herausstellen, daß die elastischen Flüssigkeiten in der Wirklichkeit die eben genannten Voraussetzungen nur bis zu einem gewissen Grade der Genauigkeit bethätigen; so leuchtet ein, daß hierdurch die obigen Resultate eine weiter unten näher anzugebende Abänderung erleiden werden.

Man hat Grund genug anzunehmen, daß die physischen elastischen Flüssigkeiten der ersteren unter dem Namen des Mariotteschen Gesetzes bekannten Eigenschaft nur näherungsweise entsprechen, wenngleich eine Abweichung davon bei den bisher angestellten direkten Messungen des bei einer gewissen Dichtigkeit herrschenden Druckes nicht bemerkbar geworden ist. Dabei ist jedoch zu erwähnen, daß diese direkten Versuche sich besonders auf die Dichtigkeitsveränderungen bei Spannungen bezogen haben, welche die gewöhnlichen Werthe nach der oberen Seite bedeutend überschreiten, nicht aber auf solche, bei denen die Spannungen möglichst schwach waren. Es ist nach den Formeln (190) des §s 40 leicht zu erachten, daß wenn die Gase wirklich eine Gränze ihrer Ausdehnung besäßen, wodurch das Mariottesche Gesetz modifizirt werden müßte, solche nicht aus den Beobachtungen bei den stärksten, sondern vielmehr aus denen bei den schwächsten Spannungen zu erkennen sein würde.

Bewegung einer unvollkommen elastischen Flüssigkeit im Beharrungszustande.

§. 189. Gleichung für den beharrlichen Ausfluß einer unvollkommen elastischen Flüssigkeit.

Setzen wir jetzt voraus, die aus einer engen Röhre sich ergießende Flüssigkeit sei unvollkommen elastisch, wie es alle irdischen Gase und Dämpfe sein werden, es gebe also für eine

bestimmte Menge dieser Flüssigkeit einen gewissen Grad der Ausdehnung, bei welchem die Spannung derselben null sei.

Mit Bezugnahme auf die Betrachtungen des §s 40 und die sonstigen in den vorstehenden Paragraphen eingeführten allgemeinen Bezeichnungen sei

L die Länge eines Prismas der Flüssigkeit von Einer Flächeneinheit Querschnitt im natürlichen Zustande, also bei einer Spannung gleich null, wobei vorausgesetzt wird, daß die Wirkung der Schwere in die Massentheilchen der Flüssigkeit durchaus ohne Einfluß auf diese Länge sei,

l_1 die Länge, welche das vorstehende Prisma unter einem Drucke p_1 auf die Flächeneinheit annimmt,

l die Länge, welche dasselbe Prisma unter dem Drucke p annimmt,

E die Kraft, welche fähig ist, das Prisma von der natürlichen Länge L auf die halbe Länge zusammenzudrücken, oder der Elastizitätsmodel der Flüssigkeit,

W das Gewicht der Volumeinheit oder der Längeneinheit des obigen Prismas im natürlichen Zustande unter dem Drucke null,

w_1 das Gewicht der Volumeinheit unter dem Drucke p_1,

w das Gewicht der Volumeinheit unter dem Drucke p.

Nach den Bemerkungen am Ende des §s 40 kann man sich hier, wo es sich um Flüssigkeiten handelt, unter den Längen L, l_1, l der Gasstäbe von Einer Flächeneinheit Querschnitt auch deren Volumen vorstellen, gleichviel welche Form dieselben besitzen mögen.

Wegen der Formeln (190) hat man nun

$$p = p_1 \frac{l_1}{l} \cdot \frac{L - l}{L - l_1} = \left(\frac{p_1 l_1 L}{L - l_1}\right)\frac{1}{l} - \left(\frac{p_1 l_1}{L - l_1}\right).$$

Da aber das Gewicht der ganzen in Frage stehenden Flüssigkeitsmasse unter den drei oben genannten Formen den Werth

$$W L = w_1 l_1 = w l$$

hat; so kann man auch setzen

$$p = \left(\frac{p_1}{w_1 - W}\right) w - \left(\frac{p_1 W}{w_1 - W}\right).$$

In diesen Formeln hat man (vergl. §. 40)

$$E = \frac{p_1 l_1}{L - l_1} = \frac{p_1 W}{w_1 - W}, \quad \ldots . (812)$$

und demnach kann man setzen

$$p = \frac{E L}{l} - E \quad \ldots . (813)$$

oder

$$p = \frac{E}{W} w - E \quad \ldots . (814)$$

Wäre nun das Gewicht W bekannt, welches die Volumeinheit des Gases im natürlichen Zustande, bei dem Drucke null, besitzt, und hätte man das Gewicht w_1 der Volumeinheit unter dem Drucke p_1 beobachtet; so würde nach Gl. (812) auch der Werth des Elastizitätmodels E berechnet werden können, und man erhielte alsdann durch Gl. (814) eine Beziehung, welche zwischen dem Drucke p und dem Gewichte w der Volumeinheit in irgend einem anderen Zustande der Kompression des Gases stattfindet.

Hätte man auch das Gewicht w_2 der Volumeinheit unter einem anderen Drucke p_2 beobachtet; so brauchte man das Gewicht W der Volumeinheit des Gases im natürlichen Zustande gar nicht weiter zu kennen, weil alsdann

$$E = \frac{p_1 W}{w_1 - W} = \frac{p_2 W}{w_2 - W},$$

mithin auch

$$W = \frac{w_1 p_2 - w_2 p_1}{p_2 - p_1} \quad \ldots . (815)$$

und

$$E = \frac{w_1 p_2 - w_2 p_1}{w_2 - w_1} \quad \ldots . (816)$$

sein müßte.

Stellt μ die Dichtigkeit des Gases bei dem Drucke p dar; so hat man auch, weil $w = g\mu$ ist, nach Gl. (814)

$$p = g \frac{E}{W} \mu - E \quad \ldots . (817)$$

Es versteht sich von selbst, daß die vorstehenden Formeln

nur dann Richtigkeit haben, wenn die Temperatur des Gases stets dieselbe und auch gleich der bleibt, bei welcher die Größen W, w_1, p_1, w_2, p_2 beobachtet sind. Wäre Dies nicht der Fall, und hätte das Gas unter dem Drucke p die Temperatur von τ^0 der hunderttheiligen Skale, während die ebengenannten Hülfsgrößen sämmtlich bei der Temperatur null beobachtet wären; so würde man nach dem Gay-Lussacschen Gesetze (§. 41 und 42) und wegen der Gleichungen (813), (814), 817)

$$p=\frac{(1+0{,}00366\tau)\mathrm{EL}}{l}-(1+0{,}00366\tau)\mathrm{E} \quad \ldots\ldots (818)$$

$$p=\frac{(1+0{,}00366\tau)\mathrm{E}}{\mathrm{W}}w-(1+0{,}00366\tau)\mathrm{E} \quad \ldots\ldots (819)$$

$$p=\frac{(1+0{,}00366\tau)g\mathrm{E}}{\mathrm{W}}\mu-(1+0{,}00366\tau)\mathrm{E} \quad \ldots\ldots (820)$$

zu setzen haben.

Schreibt man der Kürze wegen

$$\left.\begin{array}{l} \varkappa=\dfrac{(1+0{,}00366\tau)\mathrm{E}}{\mathrm{W}} \\ \text{und} \\ c=\varkappa\mathrm{W}=(1+0{,}00366\tau)\mathrm{E}; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (821)$$

so werden die letzten beiden Gleichungen

$$p=\varkappa w-c \quad \ldots\ldots (822)$$

$$p=g\varkappa\mu-c \quad \ldots\ldots (823)$$

Um nun aus der allgemeinen Gl. (234) und (235), welche sich auf jede Art von Flüssigkeiten bezieht, die Gesetze für die Bewegung einer unvollkommen elastischen Flüssigkeit der vorbeschriebenen Art abzuleiten, hat man statt der beiden Gleichungen (777) und (778) hier die beiden Gleichungen (822) und (823) zu Grunde zu legen.

Um jedoch die Untersuchung nicht zu sehr auszudehnen, wollen wir nur den einfachen Fall des §s 185 betrachten, wo angenommen ist, daß außer den gegen die Endflächen der Flüssigkeit angebrachten Pressungen p' und p'' für die Flächeneinheit nur die

Schwere auf die Flüssigkeit wirke, daß außerdem der Querschnitt der Röhre sich überall nur allmählig ändere, und daß endlich die Bewegung der Flüssigkeit den Beharrungszustand angenommen habe, für welchen sich die Geschwindigkeit, der Druck und die Dichtigkeit in allen Punkten der Röhre mit der Zeit nicht ändert.

Da für diesen Fall zuvörderst

$$\frac{d\mu}{dt} = o \text{ und } \frac{dv}{dt} = o$$

wird; so geht die Gl. (234) unter Berücksichtigung der sonstigen in §. 183 angegebenen Substitutionen über in

$$O'p'v' - O''p''v'' + \int_{s'}^{s''} g\mu\omega v \frac{dz}{ds} ds - \int_{s'}^{s''} \frac{p\omega v}{\mu} \frac{d\mu}{ds} ds = \int_{s'}^{s''} \mu\omega v^2 \frac{dv}{ds} ds.$$

Die Gleichung (235) wird

$$\frac{d(\mu\omega v)}{ds} = o$$

und ergibt demnach

$$\mu\omega v = \text{const.}$$

Da nun der Werth von $\mu\omega v$ für die obere Endschicht der Flüssigkeit $= \mu' O' v'$ und für die untere Endfläche $= \mu'' O'' v''$, oder wenn man resp. Ω und V an die Stelle der konstanten Größen O'' und v'' setzt, $= \mu'' \Omega V$ ist; so hat man

$$\mu\omega v = \mu' O' v' = \mu'' \Omega V \quad \ldots . \text{(824)}$$

Dividirt man daher die obige Gleichung durch $\mu\omega v$; so kommt

$$\frac{O'p'v' - \Omega p'' V}{\mu'' \Omega V} + g \int_{s'}^{s''} \frac{dz}{ds} ds - \int_{s'}^{s''} \frac{p}{\mu^2} \frac{d\mu}{ds} ds = \int_{s'}^{s''} v \frac{dv}{ds} ds,$$

oder da

$$\int_{s'}^{s''} \frac{dz}{ds} ds = \int_{z'}^{z''} dz = z'' - z' = Z$$

und

$$\int_{s'}^{s''} v \frac{dv}{ds} ds = \int_{v'}^{V} v\,dv = \frac{1}{2}(V^2 - v'^2)$$

ist,

$$\frac{p' O' v' - p'' \Omega V}{\mu'' \Omega V} + gZ - \int_{s'}^{s''} \frac{p}{\mu^2} \frac{d\mu}{ds} ds = \frac{1}{2}(V^2 - v'^2).$$

Jetzt ist aber nach Gl. (823)

$$p = g\varkappa\mu - c \text{ oder}$$

$$\mu = \frac{p+c}{g\varkappa};$$

folglich auch

$$\mu' = \frac{p'+c}{g\varkappa} \text{ und } \mu'' = \frac{p''+c}{g\varkappa}.$$

Demnach wird auch Gl. (824)

$$(p+c)\omega v = (p'+c)O'v' = (p''+c)\Omega V \quad \ldots \quad (825)$$

und man hat

$$O'v' = \frac{p''+c}{p'+c}\Omega V.$$

Vermöge dieser Werthe wird zuvörderst das Glied

$$\frac{p' O' v' - p'' \Omega V}{\mu'' \Omega V} = g\varkappa c \frac{p' - p''}{(p'+c)(p''+c)}.$$

Ferner hat man

$$\int_{s'}^{s''} \frac{p}{\mu^2} \frac{d\mu}{ds} ds = \int_{s'}^{s''} \frac{g\varkappa\mu - c}{\mu^2} \frac{d\mu}{ds} ds = \int_{\mu'}^{\mu''} \frac{g\varkappa\mu - c}{\mu^2} d\mu$$

$$= -g\varkappa \log \frac{\mu'}{\mu''} + c\frac{\mu' - \mu''}{\mu'\mu''}$$

$$= -g\varkappa \log \frac{p'+c}{p''+c} + g\varkappa c \cdot \frac{p' - p''}{(p'+c)(p''+c)}.$$

Da nun endlich auch

$$v' = \frac{(p''+c)\Omega}{(p'+c)O'} V$$

ist; so reduzirt sich die obige Gleichung für die Bewegung der Flüssigkeit auf

$$gZ + g\varkappa \log \frac{p'+c}{p''+c} = \frac{V^2}{2}\left\{1 - \left[\frac{(p''+c)\Omega}{(p'+c)O'}\right]^2\right\} \quad \ldots \ldots (826)$$

Hieraus folgt für die Ausflußgeschwindigkeit V unter dem äußeren Drucke p''

$$V = \sqrt{\frac{2g\left[Z + \varkappa \log \frac{p'+c}{p''+c}\right]}{1 - \left[\frac{(p''+c)\Omega}{(p'+c)O'}\right]^2}} \quad \ldots \ldots (827)$$

Wenn man die Größe Z gegen die in der Regel bedeutend überwiegende Größe $\varkappa \log \frac{p'+c}{p''+c}$ vernachlässigt, und außerdem annimmt, daß die Ausflußöffnung Ω im Vergleich zu dem oberen Querschnitte O' des Gefäßes sehr klein sei, in welchem Falle die vorstehenden Gleichungen auch dem Ausflusse eines Gases aus der kleinen Öffnung eines Gasometers entsprechen; so erhält man einfach

$$V = \sqrt{2g\varkappa \log \frac{p'+c}{p''+c}} \quad \ldots \ldots (828)$$

Das Volum der unter dem äußeren Drucke p'' gemessenen Ausflußmenge würde hiernach

$$Q'' = \Omega\sqrt{2g\varkappa \log \frac{p'+c}{p''+c}} \quad \ldots \ldots (829)$$

sein.

Da sich verschiedene Volumen Q' und Q'' Ein und derselben Gasmenge umgekehrt wie die Gewichte w' und w'' ihrer Volumeinheiten verhalten, nach Gl. (822) aber

$$\frac{w'}{w''} = \frac{p'+c}{p''+c}$$

sein würde, worin p' und p'' die den Werthen von Q′, w' und Q″, w'' gleichzeitig entsprechenden Spannungen jener Gasmenge bezeichnen; so hat man

$$\frac{Q'}{Q''} = \frac{w''}{w'} = \frac{p''+c}{p'+c}$$

und daher auch für das Volum Q′ der Ausflußmenge, unter dem inneren Drucke p' des Gasometers gemessen,

$$Q' = \frac{p''+c}{p'+c} Q'' = \frac{p''+c}{p'+c} \Omega \sqrt{2g\varkappa \log \frac{p'+c}{p''+c}} \quad \ldots . (830)$$

Das Gewicht dieser Gasmenge, welches wir jetzt zur Unterscheidung von der in diesem Paragraphe bereits gebrauchten Größe W mit W_1 bezeichnen wollen, würde $= g\mu'' Q''$, d. i.

$$W_1 = (p''+c)\Omega \sqrt{\frac{2g}{\varkappa} \log \frac{p'+c}{p''+c}} \quad \ldots . (831)$$

sein.

Aus den vorstehenden Gleichungen erkennt man nun, daß bei einer unvollkommen elastischen Flüssigkeit für den Fall, wo der äußere Druck $p''=o$ ist, keineswegs die Ausflußgeschwindigkeit unendlich groß und die Ausflußmenge null wird, wie Dies bei vollkommen elastischen Flüssigkeiten würde stattfinden müssen. Man hat vielmehr für diesen Fall

$$V = \sqrt{2g\varkappa \log \frac{p'+c}{c}}, \quad \ldots . (832)$$

oder wenn man berücksichtigt, daß c in den meisten Fällen der Praxis im Vergleich zu p' einen sehr großen Werth haben wird, sodaß man den Bruch $\frac{p'+c}{c}$ oder $\frac{p'}{c}+1$, in welchem $\frac{p'}{c}$ eine ziemlich große Zahl werden wird, $=\frac{p'}{c}$ setzen kann,

$$V = \sqrt{2g\varkappa \log \frac{p'}{c}} \quad \ldots . (832^a)$$

Unter gleichen Vereinfachungen würde für $p''=o$ das unter dem äußeren Drucke null gemessene Volum der Ausflußmenge

$$Q'' = \Omega \sqrt{2 g \varkappa \log \frac{p'}{c}} \quad \ldots . (833)$$

und das unter dem inneren Drucke p' gemessene Volum dieser Ausflußmenge

$$Q' = \frac{c}{p'} \Omega \sqrt{2 g \varkappa \log \frac{p'}{c}} \quad \ldots . (834)$$

sein, während das Gewicht dieser Menge sich auf

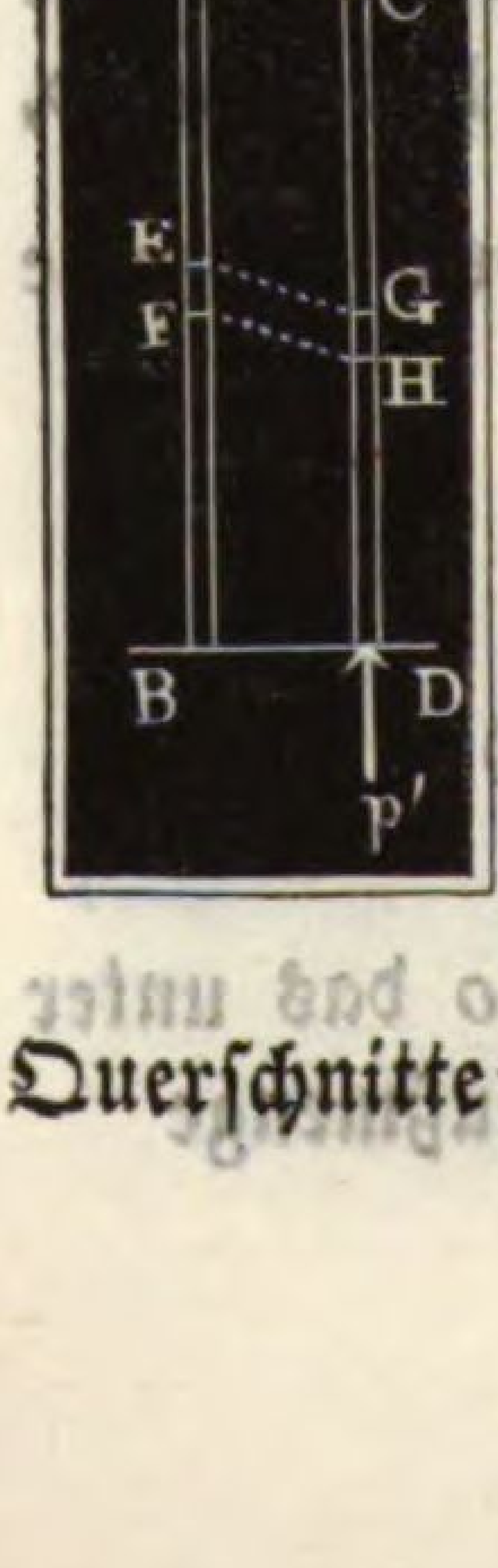
$$W_1 = c \Omega \sqrt{\frac{2g}{\varkappa} \log \frac{p'}{c}} \quad \ldots . (835)$$

reduzirte.

Dividirt man das letztere Gewicht durch das Volum Q'', welches die ausströmende Flüssigkeit unter dem Drucke null annimmt; so erhält man für das Gewicht der Volumeinheit dieser Masse unter dem Drucke null den Werth $\frac{c}{\varkappa}$, welcher den Gleichungen (821), wo das letztere Gewicht mit W bezeichnet war, entspricht.

§. 190. Beziehung zwischen der Ausflußgeschwindigkeit einer unvollkommen elastischen Flüssigkeit und der vertikalen Höhe eines Prismas dieser Flüssigkeit, welches von oben unter dem Drucke p'' erhalten wird.

AB sei die Länge L eines Prismas einer unvollkommen elastischen Flüssigkeit, welche dieselbe annehmen würde, wenn von außen gar kein Druck auf die Flüssigkeit angebracht wäre, und auch die Schwere der einzelnen Massentheilchen keine Kompression verursachte.



Denkt man sich jetzt, in Folge der Wirkung der Schwere werde das vertikal stehende Prisma AB, dessen Querschnitt eine Flächeneinheit betrage, zusammengedrückt, und diese Kompression werde noch dadurch vermehrt, daß gegen die obere Fläche die Kraft p'' wirkt; so sei CD die Länge H, welche jenes Prisma annimmt. Der im untersten Querschnitte D herrschende Druck werde mit p' bezeichnet.

Um die Länge CD $= H$ zu bestimmen, bemerkt man, daß irgend ein Längenelement, wie EF des natürlichen Prismas bei dem Übergange zu der Länge GH des komprimirten Prismas durch die Kraft p'' und durch das Gewicht des Theiles AE des natürlichen Stabes zusammengedrückt wird.

Ist nun unter Beibehaltung der sonstigen Bezeichnungen und Gesetze des vorhergehenden Paragraphs

W das Gewicht der Volumeinheit des natürlichen Prismas AB von der Länge L unter dem Drucke null,

w'' das Gewicht der Volumeinheit in der obersten Endfläche C des komprimirten Prismas unter dem Drucke p'',

x irgend eine Länge AE des natürlichen Prismas von oben gerechnet, welche in die Länge $x_1 =$ CG des komprimirten Prismas übergeht,

p der in G herrschende Druck und w das Gewicht der Volumeinheit der komprimirten Flüssigkeit in dem Elemente GH$=dx_1$,

w' das Gewicht der Volumeinheit in der untersten Endfläche D des komprimirten Prismas von der Länge CD $=$ H unter dem Drucke p';

so hat man nach Gl. (822)

$$p = \varkappa w - c$$

oder

$$w = \frac{p+c}{\varkappa}$$

und für $p = o$

$$W = \frac{c}{\varkappa};$$

demnach

$$\frac{w}{W} = \frac{p+c}{c}.$$

Da sich nun zwei Volumen EF $= dx$ und GH $= dx_1$ Ein und derselben Flüssigkeitsmenge umgekehrt zueinander verhalten, wie die Gewichte W und w ihrer Volumeinheiten; so hat man

$$\frac{dx}{dx_1} = \frac{w}{W} = \frac{p+c}{c};$$

mithin

$$dx_1 = \frac{c}{p+c}\, dx.$$

Nun ist aber der in G herrschende Druck p gleich dem Gewichte Wx des Theiles AE des natürlichen Prismas, plus der in C angebrachten Kraft p'', d. i.

$$p = Wx + p'';$$

folglich hat man

$$dx_1 = \frac{c}{Wx + p'' + c}\, dx,$$

und hieraus folgt

$$\int_0^H dx_1 = \int_0^L \frac{c}{Wx + p'' + c} \,.\, dx,$$

oder nach gehöriger Integration für die gesuchte Höhe des komprimirten Prismas CD

$$H = \frac{c}{W} \log \frac{WL + p'' + c}{p'' + c}.$$

Beachtet man, daß WL das Gewicht des ganzen Prismas, daß also

$$WL + p'' = p'$$

ist; so erhält man einfach

$$H = \frac{c}{W} \log \frac{p' + c}{p'' + c}, \quad \ldots \ldots (836)$$

oder auch weil $\frac{c}{W} = \varkappa$ ist,

$$H = \varkappa \log \frac{p' + c}{p'' + c} \quad \ldots \ldots (837)$$

Substituirt man diesen Werth von $\varkappa \log \frac{p' + c}{p'' + c}$ in die Formel (828) für die Ausflußgeschwindigkeit desselben Gases, welches sich aus einem Behälter von dem inneren Drucke p' in ein Medium vom Drucke p'' ergießt; so kommt

$$V = \sqrt{2gH} \quad \ldots \ldots (838)$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß die in Rede stehende Ausflußgeschwindigkeit die der Höhe H entsprechende Fallgeschwindigkeit ist, daß sich also das ausströmende Gas, wenn der Strahl

desselben vertikal nach oben gerichtet wäre, in Folge der ihm innewohnenden Geschwindigkeit in dem Medium vom Drucke p'' bis zu der Höhe H erheben würde. Diese Höhe H ist gleich der Höhe, welche ein vertikales Prisma des Gases von Einer Flächeneinheit Querschnitt und von dem absoluten Gewichte $p'-p''$ annehmen würde, wenn dasselbe nicht bloß von dem Gewichte seiner eigenen Theile, sondern außerdem noch von der Kraft p'' komprimirt wäre. Da die Dichtigkeit des unter diesen Umständen ausströmenden Gases gleich der ist, welche dem äußeren Drucke p'' entspricht, und da das unter diesem Drucke gemessene Volum der Ausflußmenge

$$Q'' = \Omega V = \Omega \sqrt{2g\mathrm{H}}$$

ist; so erkennt man ferner, daß der Ausfluß genau in derselben Weise vor sich geht, wie er es bei einer unpreßbaren Flüssigkeit unter der Druckhöhe H thun würde, wenn diese Flüssigkeit die Dichtigkeit des Gases unter dem äußeren Drucke p'' besäße.

Die Resultate dieses Paragraphs erleiden durchaus keine Abänderung, wenn man den äußeren Druck $p''=o$ annimmt.

Handelt es sich in diesem Falle um atmosphärische Luft; so würde die Formel

$$\mathrm{H} = \frac{c}{\mathrm{W}} \log \frac{p'+c}{c} = \varkappa \log \frac{p'+c}{c} \quad \ldots \ldots (839)$$

oder sehr nahe

$$\mathrm{H} = \frac{c}{\mathrm{W}} \log \frac{p'}{c} = \varkappa \log \frac{p'}{c} \quad \ldots \ldots (839^a)$$

die Höhe unserer Atmosphäre angeben, wenn p' den atmosphärischen Druck für die Flächeneinheit auf der Oberfläche der Erde bezeichnete.

Die Gleichung $V=\sqrt{2g\mathrm{H}}$ würde alsdann lehren, daß sich die Luft aus einem Behälter, worin der atmosphärische Druck herrschte, mit einer Geschwindigkeit in den leeren Raum ergießen würde, welche der Höhe der Atmosphäre als Fallgeschwindigkeit entspräche. Die ausströmende Luft würde die Dichtigkeit der an der Gränze der Atmosphäre sich aufhaltenden Luftschicht vom Drucke null besitzen, und ihr Strahl würde, wenn man ihn in

einem Vakuo vertikal aufwärts leitete, bis zu jener Grenze emporspringen.

Hierbei ist stillschweigend vorausgesetzt, daß die Temperatur und sonstige hygrometrische Beschaffenheit der Atmosphäre von der Oberfläche der Erde bis zur oberen Gränze sich gleich blieben, auch daß die Wirkung der Schwere auf diese Erstreckung keine Modifikationen erlitte, was jedoch in der Wirklichkeit nur näherungsweise stattfindet.

§. 191. Muthmaaßliche Werthe der Koeffizienten $\varkappa$ und c für atmosphärische Luft.

Wollte man die Zahlenwerthe der beiden Koeffizienten $\varkappa$ und c aus Gl. (822) für irgend eine unvollkommen elastische Flüssigkeit bestimmen; so brauchte man, da nach den Gleichungen (821)

$$\varkappa = \frac{(1+0{,}00366\tau)E}{W}$$

und

$$c = \varkappa W = (1+0{,}00366\tau)E$$

ist, nur die Gewichte w_1 und w_2 der Volumeinheit dieser Flüssigkeit bei der Temperatur null und resp. unter zwei verschiedenen Spannungen p_1 und p_2 zu beobachten. Alsdann würde man nach Gl. (815) für das Gewicht der Volumeinheit bei der Temperatur null und unter dem Drucke null

$$W = \frac{w_1 p_2 - w_2 p_1}{p_2 - p_1}$$

und nach Gl. (816) für den Elastizitätsmodel

$$E = \varkappa \frac{w_1 p_2 - w_2 p_1}{p_2 - p_1}$$

erhalten.

Die bisherigen Beobachtungen der zusammengehörigen Größen w_1, p_1 und w_2, p_2 für physische Gase und Dämpfe haben jedoch wegen unzulänglicher Genauigkeit der Meßinstrumente und der Beobachtungsmethoden stets das Resultat

$$w_1 p_2 - w_2 p_1 = o$$
$$\text{mithin } W = o,\ E = o$$

geliefert, sodaß man statt der Formel

$$p = \left(\frac{p_1}{w_1 - W}\right) w - \frac{p_1 W}{w_1 - W}$$

aus §. 189 das einfache Meriottesche Gesetz

$$p = \frac{p_1}{w_1} w \text{ oder auch } = \frac{p_2}{w_2} w$$

erhielt, welches sich, wenn die Größen p und w der Temperatur τ entsprechen sollten, mit Hülfe des Gay-Lussacschen Gesetzes in

$$p = (1 + 0{,}00366) \frac{p_1}{w_1} w$$

verwandelte.

Es leuchtet ein, daß wenn die gleichzeitige Beobachtung der korrespondirenden Größen w_1, p_1 und w_2, p_2 dazu dienen sollte, das Elastizitätsgesetz für unvollkommen elastische Flüssigkeiten, also eine Ungleichheit zwischen den Produkten $w_1 p_2$ und $w_2 p_1$ herauszustellen, von den betreffenden Versuchen wenigstens Einer unter einem möglichst kleinen Drucke angestellt werden müßte, bei welchem die Dichtigkeit des Gases nicht so ungemein von der Dichtigkeit desselben im natürlichen Zustande oder unter dem Drucke null abwiche, wie Dies bei den gewöhnlichen und bei den noch stärkeren Pressungen der Fall ist. Denn so lange w_1 enorm groß gegen W ist, wird $w_1 - W$ nahezu $= w_1$ und $\frac{W}{w_1}$ nahezu $= o$, mithin

$$p = \left(\frac{p_1}{w_1 - W}\right) w - \frac{p_1 W}{w_1 - W} \text{ nahezu } = \frac{p_1}{w_1} w$$

sein, und Dasselbe wird umso mehr stattfinden, je größer man w_1 und p_1 werden läßt.

Da nun Beobachtungen unter so kleinen Pressungen, wie es erforderlich sein würde, um mit Zuverlässigkeit auf die Werthe von W und E zu schließen, bisher in genügender Anzahl nicht angestellt sind; so wird man aus den Daten der bekannten Erfahrungen dieser Art nicht im Stande sein, die zuletzt erwähnten Größen zu berechnen.

Ein anderes Mittel zur Bestimmung der fraglichen Größen

könnte darin gefunden werden, daß man neben der Ermittelung zweier zusammengehöriger Werthe von w_1 und p_1 noch die Höhe H beobachtete, welche eine bestimmte in Form eines vertikalen Prismas sich ausdehnende Quantität der fraglichen Flüssigkeit annähme, sobald man auf deren obere Endfläche nur einen sehr schwachen Druck $=p''$ für die Flächeneinheit wirken ließe.

Wäre die Flüssigkeit z. B. atmosphärische Luft, und kennte man die Höhe H, bis zu welcher sich die Atmosphäre bei einer durchgängigen Temperatur von 0° über die Erdoberfläche erhöbe; so würde man unter Berücksichtigung des Umstandes, daß der Druck gegen die oberste Luftschicht $=o$ wäre, nach Gl. (839)

$$H=\frac{E}{W}\log\frac{p'+E}{E}$$

haben, worin p' die Spannung der Luft in den untersten Schichten bei einem Gewichte w' der Volumeinheit und bei einer Temperatur von 0° bezeichnete, während W das Gewicht der Volumeinheit Luft an der Gränze der Atmosphäre unter dem Drucke null darstellte.

Setzt man in die vorstehende Formel für E seinen Werth $\frac{p'W}{w'-W}$ aus Gl. (812); so kommt

$$H=\frac{p'}{w'-W}\log\frac{w'}{W} \quad \ldots\ldots (840)$$

Aus dieser Gleichung wäre zuvörderst der Werth von W abzuleiten. Beachtet man, daß unter den angenommenen Verhältnissen die Größe W im Vergleich zu w' jedenfalls sehr klein ist; so kann man in dem Nenner $w'-W$ auf der rechten Seite behuf näherungsweiser Auflösung jener Gleichung die Größe W vernachlässigen und demnach

$$H=\frac{p'}{w'}\log\frac{w'}{W}$$

setzen, woraus

$$W=\frac{w'}{e^{\frac{w'}{p'}H}} \quad \ldots\ldots (841)$$

folgt. In dieser Gleichung bezeichnet $e=2{,}71828$ die Basis der natürlichen Logarithmen.

Nachdem hieraus W bekannt ist, findet sich aus der Beziehung

$$E = \frac{p' W}{w' - W}$$

oder sehr nahe

$$E = \frac{p' W}{w'} \quad \ldots \; (842)$$

der Werth des Elastizitätsmodels E, mit Hülfe dessen die Berechnung der Koeffizienten $\varkappa$ und c keine Schwierigkeiten weiter hat.

Leider ist bis jetzt die mittlere Höhe H unserer Atmosphäre noch nicht erforscht. Aus den Erscheinungen der Dämmerung zieht Biot*) nur den Schluß, daß dieselbe mindestens 150000 Fuß (47000 Meter) betragen müsse.

Bei Zugrundelegung dieses Werthes, und wenn man das Gewicht eines Kubikfußes Luft bei der Temperatur null und bei einem Barometerstande von 2,4215 Fuß (oder 0,76 Meter) zu

$$w' = 0{,}08586 \text{ Pfund}$$

annimmt, während man nach Gl. (777) und (779)

$$p' = 25343\, w'$$

setzt, erhält man aus Gl. (841) für das Gewicht eines Kubikfußes Luft an der Gränze der Atmosphäre unter dem Drucke null und bei der Temperatur null

$$W = \frac{w'}{e^{5{,}919}} = \frac{w'}{372} = 0{,}002688\, w'$$

oder

$$W = 0{,}0002308 \text{ Pfund.}$$

Hiernach würde also, wenn die angenommene Höhe der Atmosphäre ein Minimum ist, die Dichtigkeit der Luft in den obersten Schichten mindestens 372 mal geringer sein, als in den untersten Schichten auf der Oberfläche der Erde.

Nach Gl. (842) würde man für den Elastizitätsmodel der Luft sehr nahe

---

*) Comptes rendus des séances de l'académie des sciences. Tome huitième. Janvier — Juin 1839. P. 91 et s.

$$\mathrm{E} = 5{,}8492$$

erhalten, und es würde sehr nahe

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{W}} = \frac{p'}{w'} = 25343$$

sein.

Demzufolge könnte man für die Koeffizienten $\varkappa$ und c in der Gleichung

$$p = \varkappa w - c,$$

worin w das Gewicht des Kubikfußes der Flüssigkeit unter dem Drucke p auf den Quadratfuß und bei der Temperatur von τ^0 bezeichnet,

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= 25343(1+0{,}00366\tau) \\ c &= 5{,}8492(1+0{,}00366\tau) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (843)$$

setzen.

Man erkennt, daß wegen des obigen Näherungswerthes von E, welcher aus Gl. (842) folgt, der Werth des Koeffizienten $\varkappa$ mit dem des Koeffizienten k aus Gl. (779) übereinstimmt. Streng genommen, würde $\varkappa$ um eine Kleinigkeit größer sein müssen, als k. Wenn es als ausgemacht anzusehen ist, daß der vorhin für die Höhe H der Atmosphäre angenommene Werth von 150000 Fuß der kleinstmögliche ist; so wird der vorstehende Werth des Koeffizienten c der größtmögliche sein.

Bezeichnet man hiernach die Höhe, welche die Atmosphäre annehmen würde, wenn ihr eigenes Gewicht sie nicht komprimirte, oder wenn ihre Dichtigkeit überall gleich der vom Drucke null wäre, mit L; so hat man, da

$$\mathrm{L}\,\mathrm{W} = p'$$

sein muß,

$$\mathrm{L} = \frac{p'}{\mathrm{W}} = \frac{25343\,w'}{\mathrm{W}} = 9427596 \text{ Fuß.}$$

Dieser Werth von L ist $= 372 \,.\, \mathrm{H}$, sodaß sich die Atmosphäre unter den oben ausgesprochenen Bedingungen wenigstens auf das 372fache ihrer jetzigen Höhe erheben würde.

Wäre die Dichtigkeit der Atmosphäre jedoch überall gleich der der untersten Schichten vom Drucke p'; so würde ihre Höhe offenbar nur

$$\frac{p'}{w'} = 25343 \text{ Fuß},$$

also nur etwa den 6ten Theil ihrer wirklichen Höhe betragen können.

Was nun die Ausflußgeschwindigkeit der Luft vom mittleren atmosphärischen Drucke p' und bei der Temperatur null in den luftleeren Raum betrifft; so würde man nach Gl. (838), wenn man darin $H = 150000$ Fuß setzt, hierfür wenigstens

$$V = 3062 \text{ Fuß}$$

erhalten.

Es versteht sich von selbst, daß die mit dieser Geschwindigkeit ausströmende Luft eine Dichtigkeit besitzt, welche der Spannung null entspricht.

Wäre man im Stande, die letztere Ausflußgeschwindigkeit V der Luft von mittlerer Spannung in den leeren Raum zu beobachten, und fände der Ausfluß genau nach den vorstehenden Gesetzen statt; so würde Dies zu einem angenäherten Schlusse auf die Höhe H unserer Atmosphäre berechtigen, da nach den obigen Beziehungen

$$H = \frac{V^2}{2g}$$

ist.

Hierbei würde jedoch vorausgesetzt werden müssen, daß die fragliche Geschwindigkeit in einem Punkte des ausströmenden Strahles gemessen werden könnte, wo die Spannung vollkommen gleich null wäre. Nun lehrt aber die Erfahrung, daß wenn eine physische elastische Flüssigkeit sich aus einem Behälter in einen Raum ergießt, in welchem der Druck p'' bedeutend kleiner ist, als der im Behälter selbst herrschende Druck p', die Schichten der Flüssigkeit in dem Augenblicke, wo sie den Querschnitt der größten Kontraktion dicht hinter der Ausflußöffnung passiren, noch nicht die Spannung p'' des äußeren Raumes angenommen haben, daß ein solcher Übergang zur Spannung des äußeren Mediums vielmehr erst in größerer Entfernung von der Ausflußöffnung stattfindet. Es ist Dies die zweite wesentliche Ursache, welche die in §. 188 entwickelten Resultate für den Ausfluß von Gasen unter bedeutenden Pressungsdifferenzen modifizirt. In Erwägung des

Umstandes, daß bei einem ungehinderten Ausflusse des Gases in einen Raum, welcher selbst von einer elastischen Flüssigkeit erfüllt ist, der Strahl des Ersteren sehr bald hinter dem Querschnitte der größten Kontraktion sich ungemein nach allen Seiten hin ausdehnt, sodaß man nicht im Stande ist, die Größe desjenigen Querschnittes anzugeben, in welchem die Dichtigkeit des Strahles gleich der des umgebenden Mediums wird, erfordert die zuletzt erwähnte Ursache die aufmerksamste Berücksichtigung, und trägt in einem viel größeren Maaße zur Modifikation der Formeln des §s 188 bei, als die in §. 189 und 190 erläuterte Wirkung der unvollkommenen Elastizität der Gase.

Endlich behauptet noch eine dritte Eigenschaft der Gase ihren Einfluß auf die Ausströmung derselben. Es ist Dies die Thatsache, daß bei der Ausdehnung eines Gases stets eine gewisse Menge Wärme gebunden wird oder daß sich hierbei die Temperatur des Gases vermindert, während bei der Kompression eines Gases stets eine gewisse Menge Wärme frei wird oder die Temperatur des Gases sich erhöhet. Durch dieses Naturgesetz wird die Beziehung, welche zwischen der Dichtigkeit und der Spannung eines Gases besteht, eine Funktion, welche sich von Punkt zu Punkt der in Bewegung begriffenen Gasmenge in dem Maaße ändert, wie die Dichtigkeit oder die Temperatur derselben von Punkt zu Punkt variirt.

Die Zusammenwirkung aller dieser störenden Ursachen, welche übrigens bloß in dem Falle Berücksichtigung verdienen, wo der Unterschied zwischen dem inneren und äußeren Drucke p' und p'' bedeutend ist, und wo der Ausfluß in ein elastisches Medium erfolgt, benimmt den früheren einfachen Formeln in dem genannten Falle ihre praktische Brauchbarkeit. Wegen der komplizirten Gesetze, welche jenen Störungen zu Grunde liegen, ist man bis jetzt für den fraglichen Fall nur auf einige empirische Formeln verwiesen, welche im Nachstehenden mitgetheilt werden sollen.

Erfahrungen und praktische Formeln für den Ausfluß elastischer Flüssigkeiten unter bedeutenden Pressungsdifferenzen.

§. 192. Erfahrungen von Barré de Saint-Venant und Wantzel.

Mehrere Versuche von Barré de Saint-Venant und Wantzel *) über den Ausfluß atmosphärischer Luft unter bedeutenden Pressungsdifferenzen haben folgende Resultate geliefert.

Unter sonst gleichen Umständen ist die Ausflußmenge aus einem Behälter umso größer, je kleiner der äußere Druck p'' im Vergleich zu dem inneren Drucke p' ist. Solange der äußere Druck p'' nicht den Werth 0,3 bis 0,4 des inneren Druckes p' überschreitet, bleibt sich die Ausflußmenge ziemlich gleich. Wenn der äußere Druck nachundnach vermehrt wird, vermindert sich die Ausflußmenge anfangs langsam, alsdann rascher, und wird endlich gleich null, sobald der äußere Druck dem inneren gleich kommt.

Aus der vorstehenden Beobachtung der beiden genannten Experimentatoren erkennt man, wie die elastischen Flüssigkeiten immerhin eine Neigung besitzen, bei einem gewissen Verhältnisse des äußeren und inneren Druckes, welches in §. 188 für eine vollkommen elastische Flüssigkeit zu $\frac{p''}{p'} = 0{,}6065$ angegeben ist, ein Maximum der Ausflußmenge zu bilden, eine Neigung, welche jedoch durch die vorhin angegebenen Ursachen zum Theil neutralisirt wird. Da die soeben mitgetheilten Versuche auf die Weise angestellt sind, daß man die Flüssigkeit in eine anfangs luftleere Glocke überströmen ließ, und in bestimmten Zeitintervallen die Erhebung des Druckes in dieser Glocke beobachtete; so muß es bei dem obigen Resultate, wonach die Ausflußmenge für die Werthe von $p'' = o$ bis $p'' = 0{,}4p$ nahezu dieselbe geblieben sein soll, sogar noch zweifelhaft erscheinen, ob innerhalb dieser Werthe nicht ein wirkliches Maximum der Ausflußmenge stattgefunden habe.

Für das Volum Q' der Ausflußmenge, welches unter dem Drucke p' im Gasometer gemessen ist, haben jene Experimentatoren eine empirische Formel aufgestellt, welche sich in die nachstehende Form bringen läßt,

$$Q' = \Omega \,.\, \frac{m\sqrt{2gk\left(1 - \frac{p''}{p'}\right)}}{1 + n\left(1 - \frac{p''}{p'}\right)^{n'}} \quad \ldots \; (843^a)$$

*) Comptes rendus des séances de l'académie des sciences. Tome huitième. Janvier – Juin 1839. P. 294.

In dieser Formel haben g, p', p'', Ω die bekannten Bedeutungen; k hat den Werth des Koeffizienten aus Gl. (779) für atmosphärische Luft oder aus Gl. (780) für irgend ein anderes Gas, wenn τ die Temperatur im Behälter bezeichnet; m, n und n' sind drei Zahlengrößen, welche von der Beschaffenheit der Ausflußöffnung Ω abhängen, und man kann setzen

für Öffnungen, welche nach innen gehörig erweitert und abgerundet sind . . . . $m = 1$, $n = 1{,}3$, $n' = 1$,
für Öffnungen in dünnen Wänden mit vollkommener Kontraktion des Strahles . . . . $m = 0{,}61$, $n = 0{,}58$, $n' = \frac{3}{2}$.

Bei den Versuchen, auf welche sich die Formel (843ª) gründet, hat zwar der innere Druck immer nur den Werth Einer Atmosphäre betragen; man hat jedoch Grund zu glauben, daß die Ausflußmenge nur von dem Verhältnisse $\frac{p''}{p'}$ des äußeren Druckes zum inneren Drucke, und nicht von dem absoluten Werthe dieser Pressungen abhängt.

Wenn der innere Druck den äußeren nur unbedeutend übersteigt; so liefert die Formel (843ª) einen Werth, welcher von dem der Formel (794), resp. (805), nahezu übereinstimmt; und für diese Fälle hat auch die in §. 187 gemachte Bemerkung ihre Gültigkeit, daß bei vollkommener Kontraktion des Strahles die Ausflußmenge etwa 0,58 oder nach Barré de Saint-Venant 0,61 von der Ausflußmenge aus einer gehörig erweiterten und abgerundeten Öffnung betrage. Bei den stärksten Pressungsdifferenzen hat Letzterer jedoch gefunden, daß die Ausflußmenge für eine Öffnung in dünner Wand 0,9 von der Ausflußmenge einer gehörig erweiterten Öffnung beträgt, ein Resultat, welches ebenfalls durch die obige Formel ausgedrückt wird, indem man für $p'' = o$ bei einer gehörig erweiterten Öffnung

$$Q' = \Omega \frac{\sqrt{2gk}}{1+1{,}3} = 0{,}4348\,\Omega\sqrt{2gk}$$

und bei einer Öffnung in dünner Wand

$$Q' = \Omega \frac{0{,}61\sqrt{2gk}}{1+0{,}58} = 0{,}3861\,\Omega\sqrt{2gk}$$

erhält.

Für atmosphärische Luft von der Temperatur null würde nach Gl. (779) $k = 25343$ sein, und da eine Substitution dieses Werthes in den ersten der beiden vorstehenden Ausdrücke $Q' = 547\,\Omega$ ergibt; so folgt, daß wenn atmosphärische Luft aus einer gehörig erweiterten Öffnung Ω in den leeren Raum entströmt, die Ausflußmenge gleich der ist, welche eine Röhre vom Querschnitte Ω liefern würde, wenn sich darin die Luft von der Spannung p' des Behälters mit einer Geschwindigkeit von 547 Fuß pro Sekunde fortbewegte.

Die beiden vorhin genannten Beobachter haben endlich noch gefunden, daß der Druck in der Ausflußöffnung nahezu gleich dem des äußeren Mittels ist, solange der Unterschied zwischen dem Drucke außerhalb und innerhalb des Behälters gering ist. Bei großen Pressungsdifferenzen liegt jedoch der Druck in der Ausflußöffnung zwischen dem inneren und äußeren Drucke und es scheint, als ob jener nicht unter den Werth $\frac{3}{5}$ des inneren Druckes herabsänke, wie klein auch der äußere Druck sein möge.

Ausfluß einer schweren vollkommen elastischen Flüssigkeit aus einem Gefäße, welches sich allmählig leert.

§. 193. **Gleichungen für den Ausfluß einer elastischen Flüssigkeit durch eine sehr kleine Öffnung aus einem sich leerenden Gefäße.**

Wenn in einem Gefäße von beliebiger Gestalt fortwährend ein elastisches Fluidum unter konstantem Drucke erhalten wird, und man öffnet das Gefäß plötzlich; so beginnt der Ausfluß des Gases mit einer Geschwindigkeit gleich null. Diese Geschwindigkeit steigert sich jedoch, ähnlich wie bei unpreßbaren Flüssigkeiten wenn die Ausflußöffnung klein ist, in unglaublich kurzer Zeit dergestalt, daß dieselbe von der durch Gl. (801) gegebenen, dem Beharrungszustande entsprechenden nur unmerklich wenig verschieden ist.

Wird nun kein Mittel, sei es durch fortwährende Zuführung von Flüssigkeit in den Behälter oder durch allmählige Verengung des inneren Raumes des Behälters, angewendet, wodurch die Spannung des Gases in diesem Behälter konstant zu erhalten ist; so wird sich diese Spannung bei fortdauerndem Ausflusse vermindern. Unter der Voraussetzung jedoch, daß die Öffnung im Vergleich zu den Querschnitten des Behälters sehr klein sei, wird jene Verminderung des inneren Druckes nur langsam vor sich gehen, und man wird nicht allein ohne erheblichen Fehler annehmen können, daß die Flüssigkeit im Behälter ganz und gar ruhe, sondern auch, daß die Ausflußgeschwindigkeit in jedem Zeitmomente derjenigen Geschwindigkeit gleich sei, welche stattfinden würde, wenn der Ausfluß in jenem Augenblicke unter den alsdann herrschenden Spannungsverhältnissen beharrlich wäre.

Nimmt man unter diesen Voraussetzungen und unter Beibehaltung der sonstigen in §. 186 geltenden Bezeichnungen an, es sei

A das unveränderliche Volum des Behälters, aus welchem sich das Gas ergießt, ohne daß die ausströmende Flüssigkeit wieder ersetzt wird,

P′ der Druck im Behälter im Anfange der Zeitrechnung,

p' dagegen dieser Druck am Ende der Zeit t,

p'' der äußere Druck, welcher als konstant angesehen wird,

Ω die wirkliche Ausflußöffnung, falls dieselbe nach innen gehörig erweitert und abgerundet ist, sonst aber die Fläche des Querschnittes der stärksten Kontraktion des Strahles (vergl. §. 187);

so wird man nach Gl. (801) für die am Ende der Zeit t stattfindende Ausflußgeschwindigkeit

$$V = \sqrt{2gk \log \frac{p'}{p''}} \quad \ldots (844)$$

haben.

Dauerte diese Geschwindigkeit beharrlich fort; so würde nach Gl. (802) in der Zeiteinheit eine Quantität des Gases ausfließen, deren Volum, unter dem inneren Drucke p' gemessen, $\frac{p''}{p'}\Omega\sqrt{2gk\log\frac{p'}{p''}}$ wäre. Im Zeitelemente dt wird daher selbst

bei veränderlicher Geschwindigkeit das Volum $dt.\frac{p''}{p'}\Omega\sqrt{2gk\log\frac{p'}{p''}}$ ausfließen, sodaß sich das Volum A der Flüssigkeit vom Drucke p' am Ende der Zeit $t+dt$ auf das Volum

$$A-dt.\frac{p''}{p'}\Omega\sqrt{2gk\log\frac{p'}{p''}}$$

von dem nämlichen Drucke reduzirte. Dieses Volum nimmt alsdann aber wieder den ganzen Raum A des Gefäßes ein, indem dabei seine Spannung p' in $p'+\frac{dp'}{dt}dt$ übergeht. Demzufolge hat man

$$\frac{p'+\frac{dp'}{dt}dt}{p'}=\frac{A-dt.\frac{p''}{p'}\Omega\sqrt{2gk\log\frac{p'}{p''}}}{A}.$$

oder nach gehöriger Reduktion

$$\frac{dp'}{dt}=-\frac{p''\Omega}{A}\sqrt{2gk\log\frac{p'}{p''}} \quad \ldots . (845)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$dt=-\frac{A}{p''\Omega}\frac{dp'}{\sqrt{2gk\log\frac{p'}{p''}}} \quad \ldots . (845^a)$$

Integrirt man zwischen den entsprechenden Gränzen o und t für t sowie P′ und p' für p'; so kommt für die Zeit t, während welcher sich der Druck im Behälter von P′ auf p' vermindert,

$$t=\frac{A}{p''\Omega\sqrt{2gk}}\int_{p'}^{P'}\frac{dp'}{\sqrt{\log\frac{p'}{p''}}} \quad \ldots . (846)$$

Auf die Bestimmung des Integrales auf der rechten Seite dieser Gleichung kann man die in §. 185 bereits gebrauchte Näherungsformel (799) anwenden. Es würde hier nämlich

$$x = p', \; x' = p', \; x'' = P'$$

und

$$y = \frac{1}{\sqrt{\log \frac{p'}{p''}}}$$

werden. Theilt man nun die Differenz $x'' - x' = P' - p'$ in $n = 2$ gleiche Theile; so erhält man

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{\log \frac{p'}{p''}}},$$

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{\log \frac{P' + p'}{2p''}}},$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{\log \frac{P'}{p''}}};$$

mithin

$$t = \frac{A(P' - p')}{6 p'' \Omega \sqrt{2gk}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\log \frac{p'}{p''}}} + \frac{4}{\sqrt{\log \frac{P' + p'}{2p''}}} + \frac{1}{\sqrt{\log \frac{P'}{p''}}} \right\} \quad \ldots \text{(847)}$$

worin log. immer einen natürlichen Logarithmus bezeichnet.

In dieser Zeit t, während welcher der Druck im Gasometer von dem anfänglichen Werthe P' zum Werthe p' heruntersinkt, ist die ursprünglich im Gefäße enthaltene Gasmenge um eine Gasmenge vermindert worden, deren Volum, unter dem Drucke P' gemessen,

$$A - A\frac{p'}{P'} = \frac{P' - p'}{P'} A$$

ist.

Das Gewicht dieser während der Zeit t ausgeflossenen Gasmenge ist, da Eine Volumeinheit vom Drucke P' nach Gl. (777) $\frac{P'}{k}$ Gewichtseinheiten wiegt, gleich

$$\frac{P' - p'}{P'} A \frac{P'}{k} = \frac{P' - p'}{k} A.$$

§. 194. Ausfluß einer elastischen Flüssigkeit aus einem Gefäße, welches sich leert, in ein Gefäß, welches sich füllt.

Wenn sich das Gas, welches dem im vorhergehenden Paragraphe betrachteten Behälter entströmt, in ein Gefäß ergießt, welches sich durch diesen Zufluß allmählig füllt; so wird man die allgemeinen Betrachtungen jenes Paragraphs hinsichtlich der Ausflußgeschwindigkeit und hinsichtlich der mit der Zeit sich ändernden Pressungsverhältnisse im ersten Behälter auch auf den gegenwärtigen Fall anwenden können. Man hat jedoch jetzt noch zu beachten, daß der äußere Druck p'' im zweiten Behälter nicht konstant bleibt, sondern sich mit der Zeit ändert.

Demnach sei

B der Rauminhalt des zweiten Behälters,

P″ der Druck in diesem Behälter im Anfange der Zeitrechnung, wo im ersten Behälter der Druck P′ herrschte, und

p'' der Druck im zweiten Behälter am Ende der Zeit t, wo der Druck im ersten Behälter gleich p' geworden ist.

Das Gewicht der gesammten im ersten Behälter enthaltenen Flüssigkeit im ersten Augenblicke der Zeitrechnung beträgt, weil ihre Spannung dann $= \mathrm{P}'$ ist, $\mathrm{AW}' = \frac{\mathrm{AP}'}{k}$. Gleichzeitig ist das Gewicht der im zweiten Behälter enthaltenen Flüssigkeit vom Drucke P″ gleich $\frac{\mathrm{BP}''}{k}$. Die Summe dieser beiden Gewichte oder der ganzen in beiden Gefäßen gegebenen Flüssigkeit ist

$$\frac{\mathrm{AP}' + \mathrm{BP}''}{k}.$$

Am Ende der Zeit t ist das Gewicht der im ersten Behälter befindlichen Flüssigkeit $= \frac{\mathrm{A}p'}{k}$ und der im zweiten Behälter befindlichen Flüssigkeit $= \frac{\mathrm{B}p''}{k}$. Die Summe dieser beiden Gewichte ist

$$\frac{\mathrm{A}p' + \mathrm{B}p''}{k}.$$

Da nun das Gewicht der gesammten Flüssigkeit zu allen

Zeiten sich gleich bleibt; so erhält man durch die Gleichsetzung der vorstehenden beiden Summen die Beziehung

$$A p' + B p'' = A P' + B P'',$$

woraus

$$p'' = \frac{A(P' - p') + B P''}{B}$$

folgt.

Dieser Werth des äußeren Druckes p'' am Ende der Zeit t ist in Gleichung (845[a]) für p'' zu substituiren, wodurch man

$$dt = -\frac{AB}{\Omega[A(P' - p') + BP'']} \cdot \frac{dp'}{\sqrt{2gk \log\left(\frac{Bp'}{A(P'-p') + BP''}\right)}} \quad \ldots\ldots (848)$$

erhält.

Aus dieser Gleichung findet man endlich für die Zeit t, während welcher der Druck im ersten Gefäße vom Werthe P' bis zum Werthe p' herabsinkt,

$$t = \frac{AB}{\Omega\sqrt{2gk}} \int_{p'}^{P'} \frac{dp'}{[A(P' - p') + BP''] \sqrt{\log\left(\frac{Bp'}{A(P' - p') + BP''}\right)}} \quad \ldots\ldots (849)$$

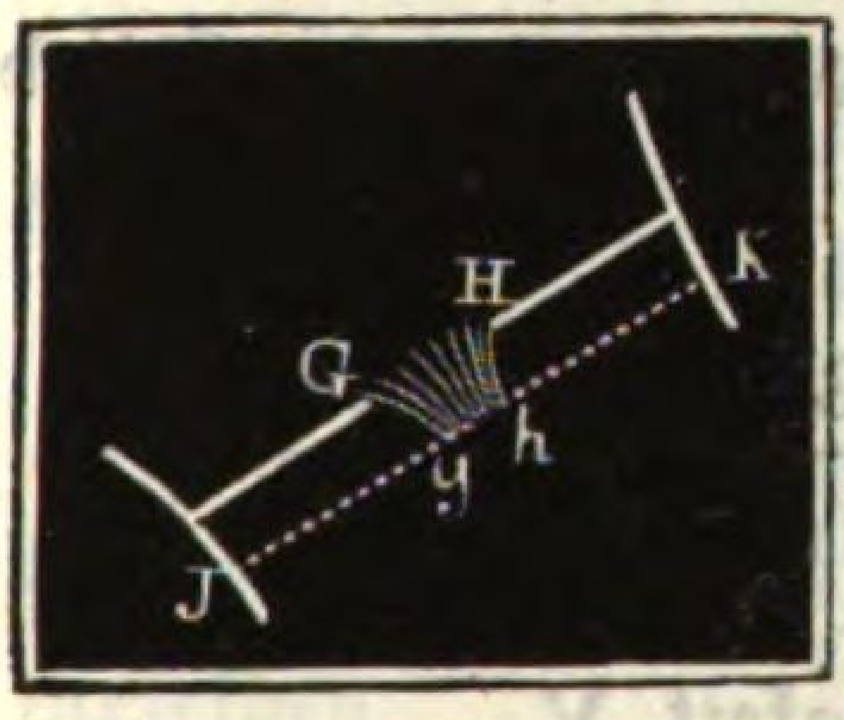
eine Formel, auf welche behuf Ermittelung des Integrales die in §. 185 angegebene Näherungsformel (799) in ähnlicher Weise angewandt werden kann, wie Dies im vorhergehenden Paragraphe bei der Auflösung der Gl. (846) gezeigt ist.

Es wird noch bemerkt, daß wenn die Ausflußöffnung nicht nach innen gehörig erweitert und abgerundet ist, sodaß der flüssige Strahl mit Kontraktion austritt, in den Gleichungen dieses und des vorhergehenden Paragraphs statt Ω die Fläche $m\Omega$ des Querschnittes der stärksten Kontraktion zu setzen ist.

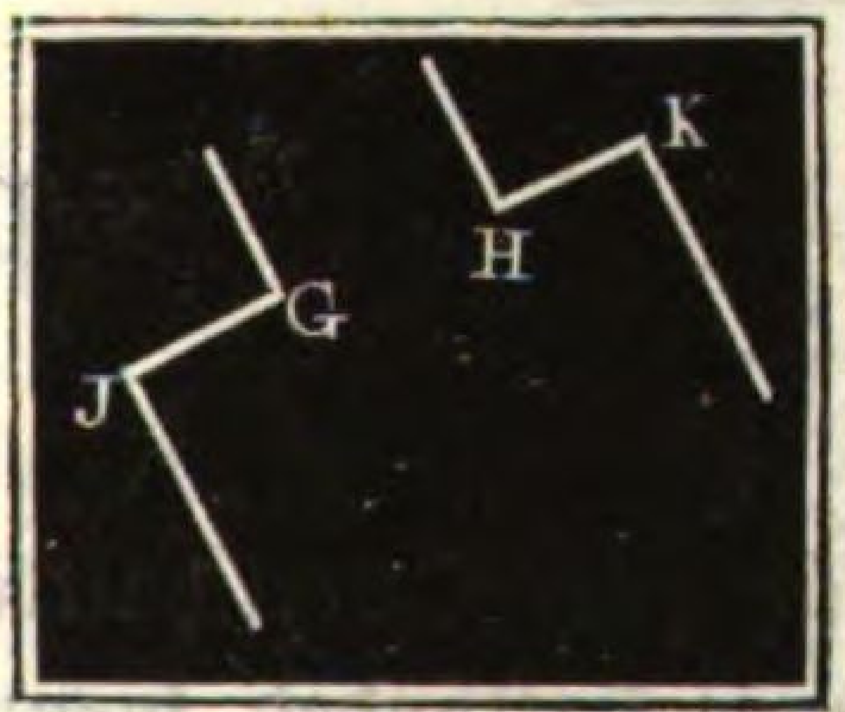
Bewegung einer schweren elastischen Flüssigkeit in einem Gefäße, dessen Querschnitt sich an einigen Stellen plötzlich ändert.

§. 195. **Beharrlicher Ausfluß aus einem Gefäße, dessen Querschnitt sich an gewissen Stellen plötzlich um eine endliche Größe ändert.**

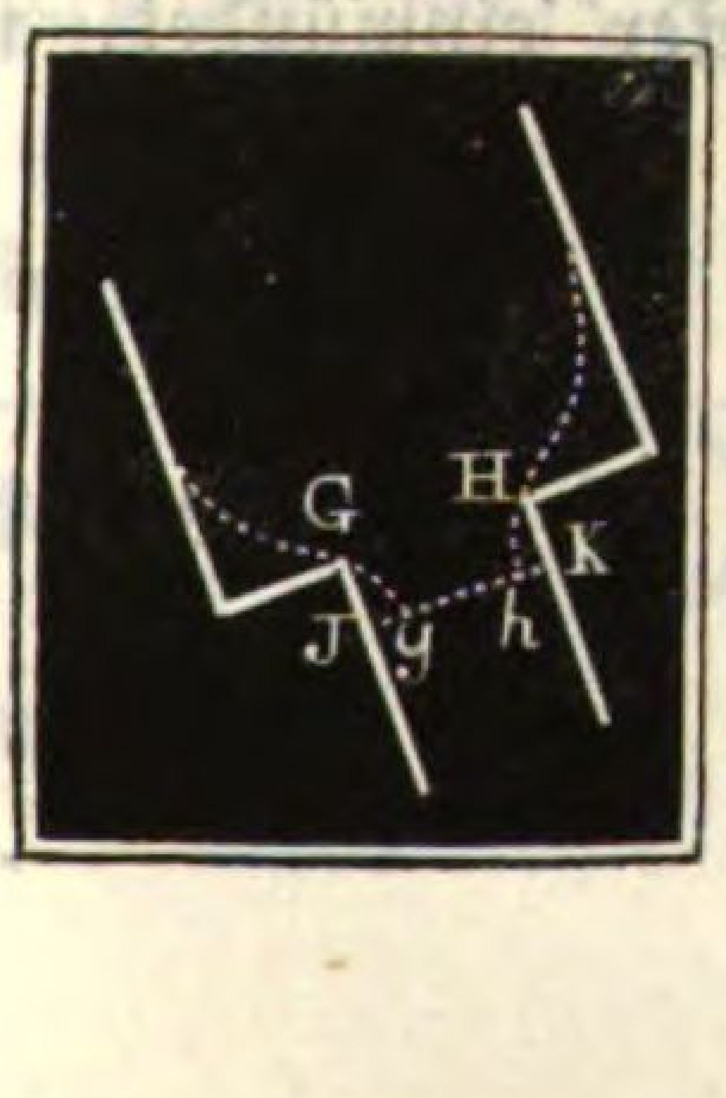
In den Fällen, wo der Querschnitt des Gefäßes, aus welchem sich die elastische Flüssigkeit ergießt, plötzliche Veränderungen darbietet, braucht man, ähnlich wie bei den unpreßbaren Flüssigkeiten (§. 97 und 99), nur solche Dispositionen ins Auge zu fassen, wo die Flüssigkeit gezwungen wird, aus einem kleineren Querschnitte ω_1 plötzlich in einen größeren Querschnitt ω_2 überzugehen. Dies ist an und für sich klar, sobald sich in dem Gefäße irgendwo eine Scheidewand mit einer nach oben gehörig erweiterten und abgerundeten Durchflußöffnung ω_1 befindet, aus welcher dann die Flüssigkeit unmittelbar in den nächstfolgenden größeren Querschnitt ω_2 des Gefäßes tritt.



Besäße eine solche Scheidewand, wie in der seitstehenden Figur, eine Öffnung $GH = \omega_1$, durch welche sich das Gas mit Kontraktion ergießen müßte; so wäre der Querschnitt $gh = m\omega_1$ der stärksten Kontraktion an die Stelle von ω_1 zu setzen, während der nächstfolgende größere Querschnitt JK stets durch ω_2 dargestellt würde.



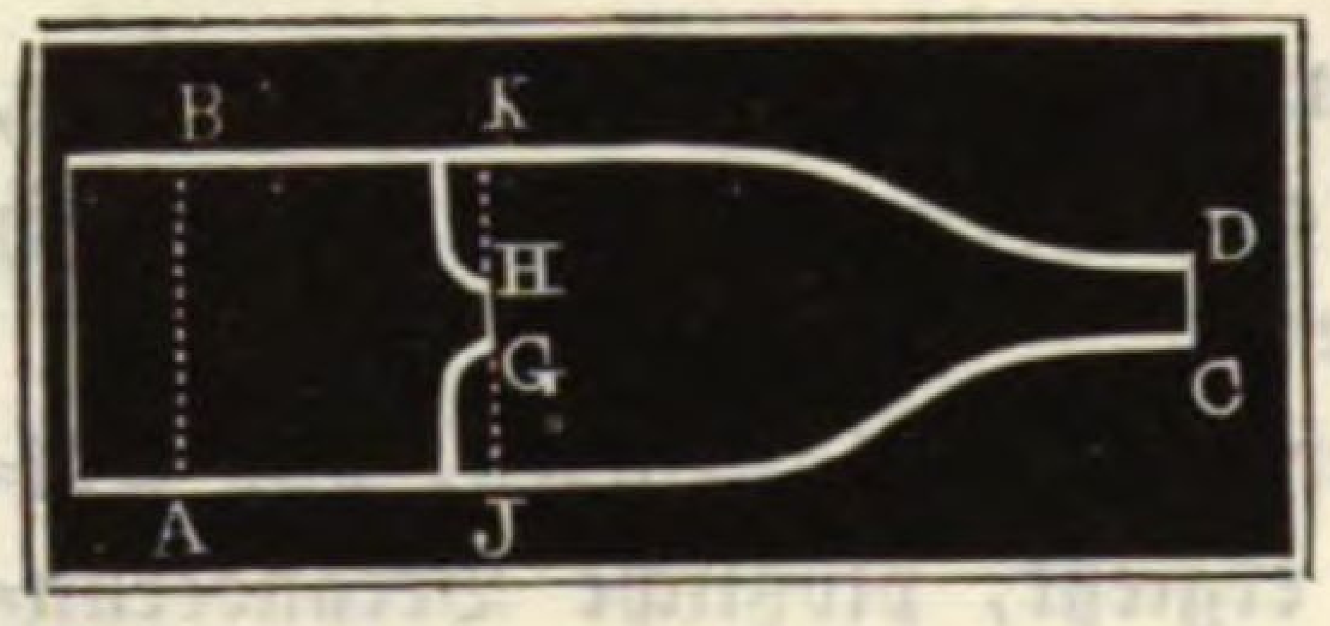
Befände sich im Gefäße eine plötzliche Erweiterung; so würde $GH = \omega_1$ und $JK = \omega_2$ sein.



Wäre endlich an irgend einer Stelle eine Verengung vorhanden, wie in der seitstehenden Figur; so würde die Flüssigkeit mit Kontraktion durch den Querschnitt $GH = \omega_1$ treten und hierauf von dem Querschnitte der stärksten Kontraktion $gh = m\omega_1$ zu dem größeren Querschnitte $JK = \omega_2 = \omega_1$ übergehen.

Denken wir uns daher eine vollkommen elastische Flüssigkeit, welche in be-

harrlichem Flusse einem röhrenförmigen Gefäße ABDC entströmt, indem sie an irgend einer Stelle plötzlich aus dem Querschnitte GH in den größeren Querschnitt JK tritt. Unter Beibehaltung der übrigen früher bereits gebrauchten Bezeichnungen sei



p' der konstante Druck auf die Flächeneinheit im Querschnitte $AB = O'$,

p'' der Druck im Querschnitte $CD = \Omega$, in welchem die Ausflußgeschwindigkeit V stattfindet,

p_1 der Druck im Querschnitte $GH = \omega_1$,

p_2 der Druck im Querschnitte $JK = \omega_2$,

p der Druck in irgend einem anderen Querschnitte ω der Röhre ABDC.

Nach Gl. (784) hat man hier, wo die durch R dargestellten Kräfte nicht vorhanden sind, und die Reibung F der Flüssigkeit an den Gefäßwänden gleich null angenommen wird, indem man gleichzeitig das von dem Gewichte des Gases herrührende Glied gZ vernachlässigt,

$$g k \log \frac{p'}{p''} = \frac{V^2}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{p'' \Omega}{p' O'} \right)^2 + \left(\frac{p'' \Omega}{p_1 \omega_1} - \frac{p'' \Omega}{p_2 \omega_2} \right)^2 \right\}.$$

Hieraus folgt für die Ausflußgeschwindigkeit V

$$V = \sqrt{\frac{2 g k \log \frac{p'}{p''}}{1 - \left(\frac{p'' \Omega}{p' O'} \right)^2 + \left(\frac{p'' \Omega}{p_1 \omega_1} - \frac{p'' \Omega}{p_2 \omega_2} \right)^2}} \quad \ldots . (850)$$

oder wenn die Ausflußöffnung Ω im Vergleich zum Querschnitte $AB = O'$ sehr klein ist, was in dem Falle immer stattfindet, wenn die Röhre ABDC in einen größeren Gasometer einmündet, in welchem der Druck p' herrscht,

$$V = \sqrt{\frac{2 g k \log \frac{p'}{p''}}{1 + \left(\frac{p'' \Omega}{p_1 \omega_1} - \frac{p'' \Omega}{p_2 \omega_2} \right)^2}} \quad \ldots . (851)$$

Wenn man nach dieser Formel den Werth von V berechnen wollte; so müßten zuvörderst die Werthe der resp. in GH und JK stattfindenden Pressungen p_1 und p_2 bekannt sein. Diese findet man durch folgende Betrachtung.

Um den Druck p zu bestimmen, welcher in irgend einem Querschnitte ω der Röhre ABDC stattfindet, hat man sich der Gleichung (788) zu bedienen, indem man unter das Zeichen Σ nur diejenigen Größen bringt, welche oberhalb des zu betrachtenden Querschnittes ω liegen. Demnach hat man für sämmtliche Querschnitte zwischen $AB = O'$ und $GH = \omega_1$ inklusive, unter gehöriger Abkürzung jener Gleichung und Vernachlässigung des Gliedes $\left(\frac{p''\Omega}{p'O'}\right)^2$

$$gk \log \frac{p'}{p} = \frac{V^2}{2}\left(\frac{p''\Omega}{p\omega}\right)^2 \quad \ldots . (852)$$

Ferner hat man für sämmtliche Querschnitte zwischen $JK = \omega_2$ und $CD = \Omega$ inklusive

$$gk \log \frac{p'}{p} = \frac{V^2}{2}\left\{\left(\frac{p''\Omega}{p\omega}\right)^2 + \left(\frac{p''\Omega}{p_1\omega_1} - \frac{p''\Omega}{p_2\omega_2}\right)^2\right\} \quad \ldots . (853)$$

Setzt man also in Gl. (852) $\omega = \omega_1$ und gleichzeitig $p = p_1$, ferner in Gl. (853) $\omega = \omega_2$ und gleichzeitig $p = p_2$; so werden dieselben

$$gk \log \frac{p'}{p_1} = \frac{V^2}{2}\left(\frac{p''\Omega}{p_1\omega_1}\right)^2 \quad \ldots . (854)$$

und

$$gk \log \frac{p'}{p_2} = \frac{V^2}{2}\left\{\left(\frac{p''\Omega}{p_2\omega_2}\right)^2 + \left(\frac{p''\Omega}{p_1\omega_1} - \frac{p''\Omega}{p_2\omega_2}\right)^2\right\} \quad \ldots . (855)$$

oder wenn man in diese beiden Gleichungen für V seinen Werth aus Gl. (851) substituirt,

$$\frac{\log \frac{p'}{p_1}}{\log \frac{p'}{p''}} = \frac{\left(\frac{1}{p_1\omega_1}\right)^2}{\left(\frac{1}{p''\Omega}\right)^2 + \left(\frac{1}{p_1\omega_1} + \frac{1}{p_2\omega_2}\right)^2} \quad \ldots . (856)$$

und

$$\frac{\log\frac{p'}{p_2}}{\log\frac{p'}{p''}}=\frac{\left(\frac{1}{p_2\omega_2}\right)^2+\left(\frac{1}{p_1\omega_1}-\frac{1}{p_2\omega_2}\right)^2}{\left(\frac{1}{p''\Omega}\right)^2+\left(\frac{1}{p_1\omega_1}-\frac{1}{p_2\omega_2}\right)^2}\quad\ldots\ldots(857)$$

Aus den letzteren beiden Gleichungen lassen sich nun durch Näherungsformeln die Werthe der beiden Pressungen p_1 und p_2 ermitteln. Nachdem Dies geschehen ist, ergibt eine Substitution derselben in Gl. (851) den gesuchten Werth für die Ausflußgeschwindigkeit V der Flüssigkeit.

Bei der Entwickelung der Formeln (851) bis (857) ist angenommen, daß die Ausflußöffnung $CD=\Omega$ im Vergleich zu dem oberen Querschnitte $AB=O'$ sehr klein sei. Wäre auch die Durchflußöffnung $GH=\omega_1$ im Vergleich zu dem Querschnitte $JK=\omega_2$ sehr klein; so würde man das Glied $\frac{1}{p_2\omega_2}$ gegen $\frac{1}{p_1\omega_1}$ vernachlässigen können. Unter solchen Umständen ergäbe die Formel (851) für die Ausflußgeschwindigkeit

$$V=\sqrt{\frac{2gk\log\frac{p'}{p''}}{1+\left(\frac{p''\Omega}{p_1\omega_1}\right)^2}}\quad\ldots\ldots(858)$$

Statt der Gleichungen (856) und (857) erhielte man ferner

$$\frac{\log\frac{p'}{p_1}}{\log\frac{p'}{p''}}=\frac{1}{\left(\frac{p_1\omega_1}{p''\Omega}\right)^2-1}\quad\ldots\ldots(859)$$

und

$$\frac{\log\frac{p'}{p_2}}{\log\frac{p'}{p''}}=\frac{1}{\left(\frac{p_1\omega_1}{p''\Omega}\right)^2+1}\quad\ldots\ldots(860)$$

Da nach diesen letzteren beiden Gleichungen

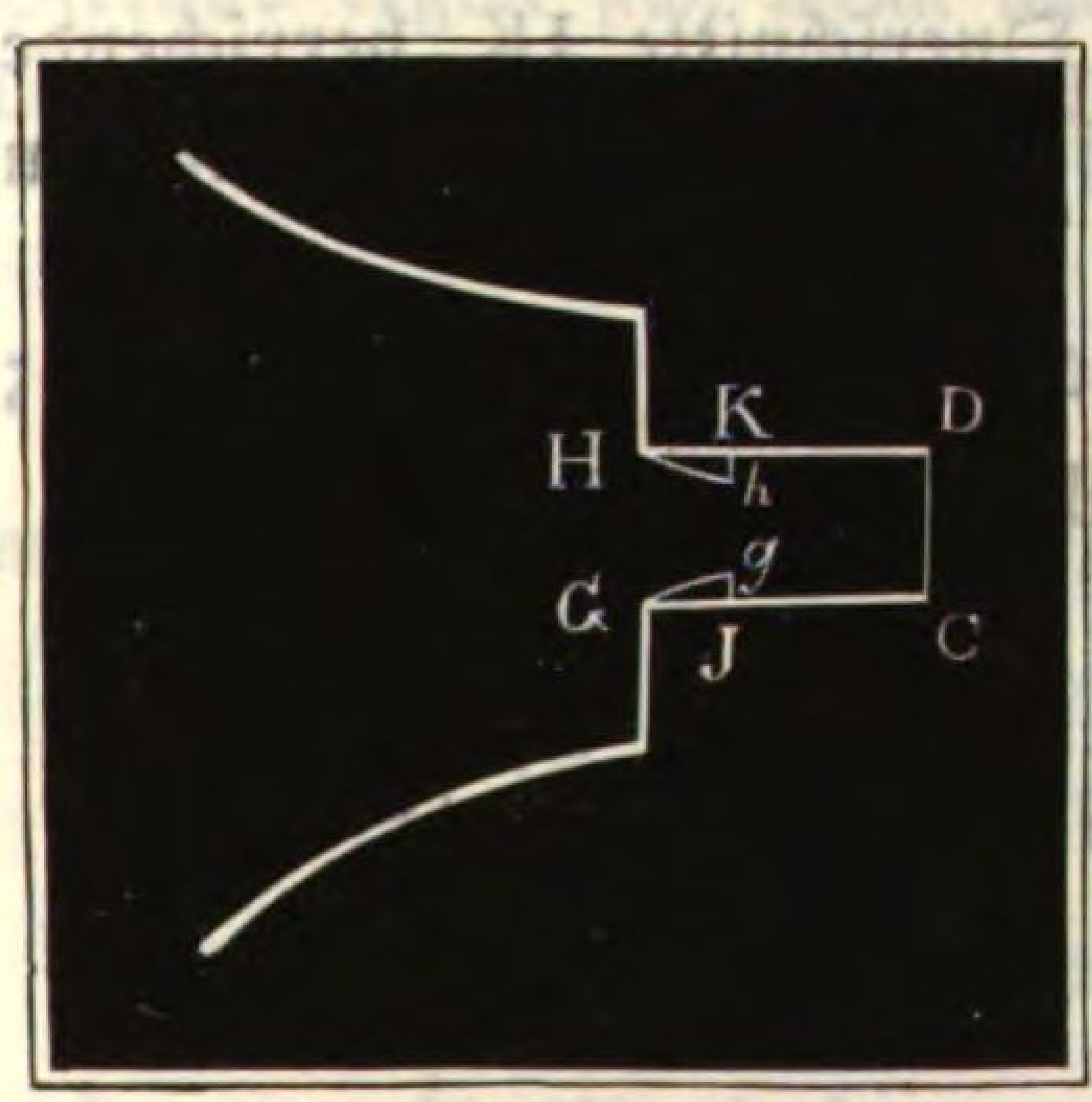
$$\frac{\log\frac{p'}{p_1}}{\log\frac{p'}{p''}}=\frac{\log\frac{p'}{p_2}}{\log\frac{p'}{p''}},$$

also auch $p_1 = p_2$

sein würde; so folgt, daß bei den gemachten Voraussetzungen der Druck und somit die Dichtigkeit der Flüssigkeit bei ihrem Übergange aus dem Querschnitte GH in den Querschnitt JK keine plötzliche Änderung erleidet, daß die Flüssigkeit vielmehr, ohne ihre Dichtigkeit zu ändern, in den größeren Querschnitt JK tritt, wie wenn sie sich aus dem vorderen Theile ABHG der Röhre ungehindert in einen Raum JKDC ergösse, in welchem der Druck $p_2 = p_1$ herrscht.

§. 196. Beharrlicher Ausfluß einer elastischen Flüssigkeit aus einem Gefäße, an welchem die Ausflußöffnung mit einer zylindrischen Ansatzröhre versehen ist.

Die Formeln des vorstehenden Paragraphs finden offenbar auch auf den Fall Anwendung, wo sich eine elastische Flüssigkeit im Beharrungszustande aus einem Gefäße ergießt, welches sich in eine zylindrische Ansatzröhre GHDC endigt. Beim Eintritte in diese Röhre, deren Querschnitt GH $= CD = \Omega$ ist, und welche bei GH nicht nach innen erweitert und abgerundet sein darf, zieht sich der flüssige Strahl vermöge der Kontraktion bis auf einen Querschnitt gh von der Größe $m\Omega$ zusammen, worin m den Kontraktionskoeffizienten bezeichnet. Von diesem Querschnitte geht der Strahl dann plötzlich zum Querschnitte $JK = \Omega$ der Ansatzröhre über und entströmt dieser Röhre in parallelen Fäden.



Setzt man demnach in Gl. (851) $\omega_1 = m\Omega$ und $\omega_2 = \Omega$; so ergibt sich für die Ausflußgeschwindigkeit

$$V = \sqrt{\frac{2gk \log \frac{p'}{p''}}{1 + \left(\frac{p''}{mp_1} - \frac{p''}{p_1}\right)^2}} \quad \ldots . (861)$$

Zur Bestimmung der Pressungen p_1 und p_2, welche resp. in den Querschnitten gh und JK herrschen, erhält man statt der Gleichungen (856) und (857) die folgenden,

$$\frac{\log \frac{p'}{p_1}}{\log \frac{p'}{p''}} = \frac{\left(\frac{1}{mp_1}\right)^2}{\left(\frac{1}{p''}\right)^2 + \left(\frac{1}{mp_1} - \frac{1}{p_2}\right)^2} \quad \ldots \text{(862)}$$

und

$$\frac{\log \frac{p'}{p_2}}{\log \frac{p'}{p''}} = \frac{\left(\frac{1}{p_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{mp_1} - \frac{1}{p_2}\right)^2}{\left(\frac{1}{p''}\right)^2 + \left(\frac{1}{mp_1} - \frac{1}{p_2}\right)^2} \quad \ldots \text{(863)}$$

Die letzte dieser beiden Gleichungen wird durch den Werth

$$p_2 = p'' \quad \ldots \text{(864)}$$

erfüllt, woraus folgt, daß der im Querschnitte JK herrschende Druck gleich dem gegen die Ausflußöffnung CD wirkenden Drucke ist.

Substituirt man diesen Werth von p_2 in die Gleichung (861); so kommt für die Ausflußgeschwindigkeit

$$V = \sqrt{\frac{2gk \log \frac{p'}{p''}}{1 + \left(\frac{p''}{mp_1} - 1\right)^2}} \quad \ldots \text{(865)}$$

Der hierin noch vorkommende Werth von p_1 ist wegen Gl. (826) durch die Beziehung

$$\frac{\log \frac{p'}{p_1}}{\log \frac{p'}{p''}} = \frac{\left(\frac{p''}{mp_1}\right)^2}{1 + \left(\frac{p''}{mp_1} - 1\right)^2} \quad \ldots \text{(866)}$$

zu bestimmen, was vermittelst einer angenäherten Auflösung dieser Gleichung in Beziehung zu p_1 geschehen kann.

Unter der Voraussetzung, daß der im Gasometer herrschende Druck p' nicht viel größer sei, als der äußere Druck p'' gegen die Ausflußöffnung, wird, wenn man mit Navier

$$\left.\begin{array}{l} p' = (1+\alpha)p'' \\ \\ p_1 = (1+\varphi)p'' \end{array}\right\} \quad \ldots . (867)$$

und

setzt, α sowol, wie φ ein kleiner echtig Bruch sein. Die Gleichung (866) wird hierdurch

$$\frac{\log\frac{1+\alpha}{1+\varphi}}{\log(1+\alpha)} = \frac{\frac{1}{m^2(1+\varphi)^2}}{1+\left(\frac{1}{m(1+\varphi)}-1\right)^2}$$

oder wenn man näherungsweise $\log(1+\alpha)=\alpha$ und $\log(1+\varphi) = \varphi$ setzt, ferner die in φ^2 multiplizirten Glieder vernachlässigt,

$$\frac{\alpha-\varphi}{\alpha} = \frac{1}{1-2m+2m^2+(4m^2-2m)\varphi}.$$

Hieraus ergibt sich, wenn man wiederum die in φ^2 und auch die in $\alpha\varphi$ multiplizirten Glieder vernachlässigt,

$$\varphi = -\alpha\frac{2m(1-m)}{1-2m(1-m)},$$

mithin wegen der Gleichungen (867)

$$p_1 = p'' - (p'-p'')\frac{2m(1-m)}{1-2m(1-m)} \quad \ldots . (868)$$

Aus dieser Gleichung erkennt man zuvörderst, da $p' > p''$ und $m > \frac{1}{2}$ ist, daß $p_1 < p''$ oder daß der im kontrahirten Querschnitte gh herrschende Druck kleiner ist, als der in der Ausflußöffnung CD herrschende Druck p''. Nimmt man nach Gl. (187) für den Kontraktionskoeffizienten m den Werth 0,58 an; so würde man nahezu

$$p_1 = p'' - 0{,}95(p'-p'') \quad \ldots . (869)$$

erhalten.

Setzt man endlich den für p_1 gefundenen Werth aus Gl. (868) in Gl. (865); so erhält man für die Ausflußgeschwindigkeit

$$V = \sqrt{\frac{2gk\log\frac{p'}{p''}}{1+\left(\frac{1-2m(1-m)}{m\left[1-2m(1-m)\frac{p'}{p''}\right]}-1\right)^2}} \quad \ldots . (870)$$

Da der Annahme gemäß p' nicht viel größer sein soll, als p''; so ist der vorstehende Werth nur wenig größer, als der Werth

$$V = \sqrt{\frac{2gk\log\frac{p'}{p''}}{1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2}} \quad \ldots . (871)$$

oder

$$V = \frac{m}{\sqrt{m^2+(1-m)^2}}\sqrt{2gk\log\frac{p'}{p''}} \quad \ldots . (871^a)$$

Da $\sqrt{2gk\log\frac{p'}{p''}}$ die Ausflußgeschwindigkeit des Gases in dem Falle sein würde, wenn sich keine zylindrische Ansatzröhre an dem Gefäße befände; so erkennt man aus einer Vergleichung der Formel (871) mit der Formel (403), welche in §. 103 für den ähnlichen Fall einer unpreßbaren Flüssigkeit entwickelt ist, daß unter den gemachten Voraussetzungen die Ausflußgeschwindigkeit einer elastischen Flüssigkeit sich durch die Anbringung einer Ansatzröhre in demselben Maaße verringert, wie Dies bei einer unpreßbaren Flüssigkeit stattfindet.

Die Erfahrung bestätigt das vorstehende Resultat ziemlich genau. Setzt man den Koeffizienten

$$\frac{m}{\sqrt{m^2+(1-m)^2}} = n;$$

so würde derselbe für $m = 0{,}58$

$$n = 0{,}81$$

werden. Die Ermittelungen von Weisbach, welche nach den Versuchen von Koch angestellt sind, lehren jedoch, daß man für die Praxis bei Ansatzröhren, welche höchstens 6mal so lang, als weit sind,

$$n = 0{,}74$$

zu nehmen habe, wodurch also die Ausflußgeschwindigkeit

$$V = 0{,}74 \sqrt{2gk \log \frac{p'}{p''}}$$

wird.

Ist die Ansatzröhre nicht zylindrisch, sondern konisch und nach vorn konvergent; so vermehrt sich die Ausflußgeschwindigkeit. Für eine solche Röhre, deren Seitenlinien sich unter einem Winkel von 6° gegeneinander neigen, und welche 5mal so lang, als im Mittel weit ist, hat Weisbach nach den Kochschen Versuchen

$$n = 0{,}85$$

gefunden.

Bewegung der elastischen Flüssigkeiten in Röhrenleitungen.

§. 197. Reibung einer elastischen Flüssigkeit an den Wänden einer engen Röhre.

Wenn ein Theil des Gefäßes, durch welches sich eine elastische Flüssigkeit bewegt, in einer Röhre besteht, deren Länge im Vergleich zu ihrem Durchmesser bedeutend ist; so muß man den Reibungswiderstand mit in Berücksichtigung ziehen, welchen die Flüssigkeit in dieser Röhre erleidet, und welcher bei den Untersuchungen der vorstehenden Paragraphe vernachlässigt ist.

Dieser Reibungswiderstand ist demjenigen analog, welcher in §. 132 bei der Bewegung unpreßbarer Flüssigkeiten unter ähnlichen Umständen näher erörtert ist. Bezeichnet also

O den als konstant angenommenen kreisförmigen Querschnitt der fraglichen Röhre,

D den Durchmesser dieses Querschnittes,

Ψ den Umfang desselben, sodaß man $D = \frac{4O}{\Psi}$ hat,

v die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in irgend einem Punkte dieser Röhre,

$\varkappa$ den durch Versuche zu bestimmenden Widerstandskoeffizienten für die Reibung und

F den Werth der Reibung an den Röhrenwänden, auf die Masseneinheit bezogen, oder die Geschwindigkeit, welche die Reibung der Materie in der Zeiteinheit mitzutheilen oder zu entziehen fähig ist;

so wird auch hier der Werth von F bei einerlei Geschwindigkeit v umgekehrt, wie der Querschnitt O und direkt, wie der Umfang Ψ des Letzteren variiren. Da aber $\frac{\Psi}{O} = \frac{4}{D}$ ist; so folgt, daß bei einerlei Geschwindigkeit v die Kraft F umgekehrt, wie der Durchmesser D der Röhre variiren wird. Bei einer Änderung der Geschwindigkeit v der Flüssigkeit wird sich F übrigens noch im geraden Verhältnisse mit dem Quadrate von v, also wie v^2 änderen. Demnach kann man setzen

$$F = \varkappa \frac{v^2}{2D} = \varkappa \frac{\Psi}{8O} v^2 \qquad \ldots . (872)$$

für die Intensität, mit welcher die Reibung in eine jede Masseneinheit der Flüssigkeit desjenigen Querschnittes der Röhre wirkt, in welchem die Geschwindigkeit v herrscht.

Was den Werth des Reibungskoeffizienten $\varkappa$ anlangt; so ist derselbe nicht ganz konstant, sondern selbst wiederum von der Geschwindigkeit v abhängig. Für die meisten Fälle der Praxis genügt es jedoch, diesem Koeffizienten nach den Versuchen von Girard und d'Aubuisson bei glatt abgedreheten Metallröhren den konstanten Werth

$$\varkappa = 0{,}02592 \qquad \ldots . (873)$$

oder wie Poncelet will,

$$\varkappa = 0{,}0252 \qquad \ldots . (873^a)$$

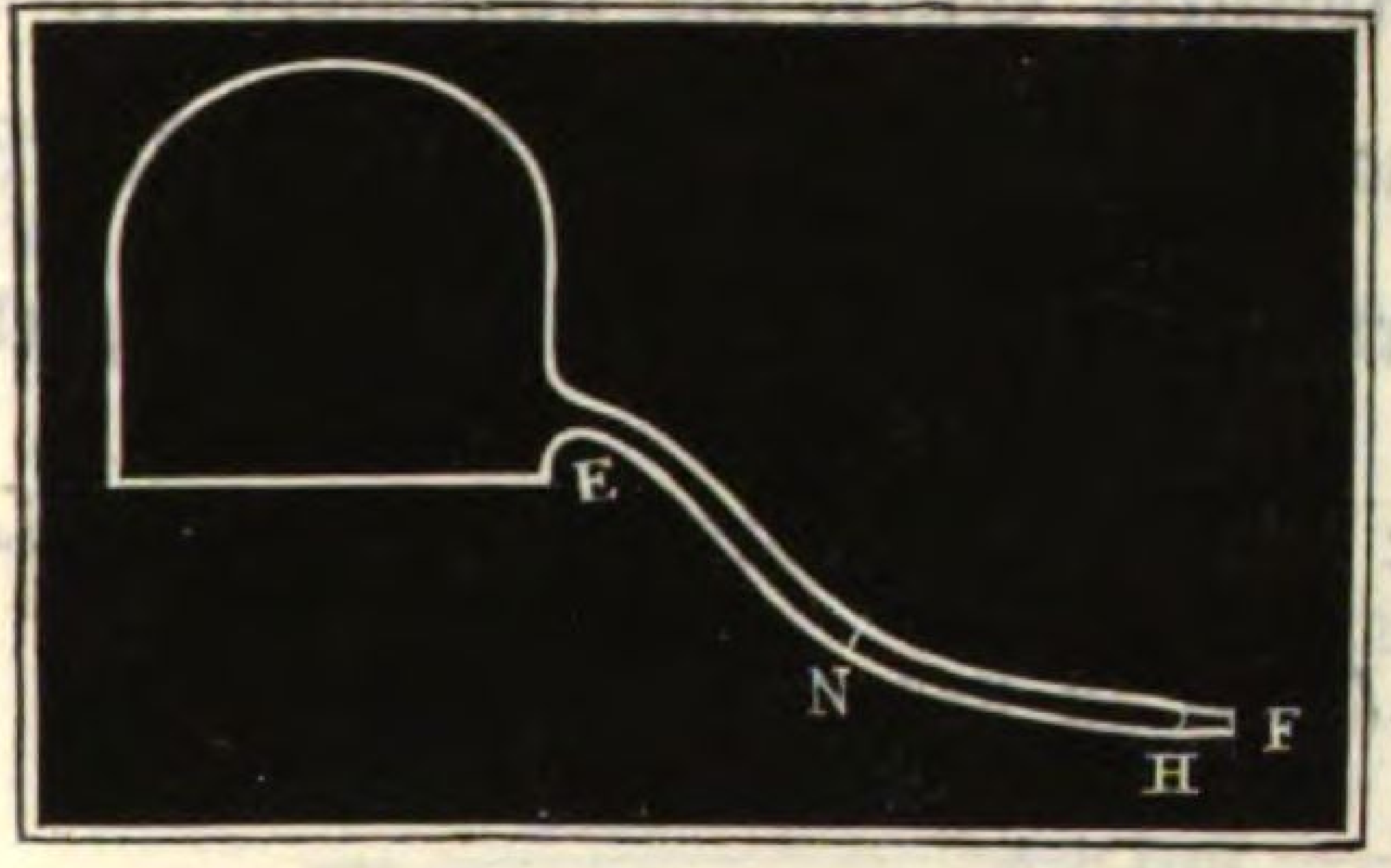
oder endlich nach Weisbach als Mittel aus den Versuchen von Girard, d'Aubuisson, Buff und Pecqueur den Werth

$$\varkappa = 0{,}024 \qquad \ldots . (874)$$

beizulegen, welcher zugleich auf alle elastischen Flüssigkeiten Anwendung findet und von dem für die Bewegung des Wassers durch Metallröhren in §. 132 angegebenen Werthen wenig verschieden ist.

§. 198. Gleichungen für die beharrliche Bewegung einer elastischen Flüssigkeit in einer Röhrenleitung.

Aus einem größeren Behälter ergieße sich eine elastische Flüssigkeit durch eine Leitungsröhre EF von konstantem Querschnitte.



Wir nehmen zuvörderst an, diese Röhre selbst besitze keine plötzlichen Querschnittsveränderungen, die Flüssigkeit trete ohne Kontraktion bei E aus dem Gasometer in die Röhre und entströme der Letzteren bei F ebenfalls ohne Kontraktion durch eine nach innen gehörig erweiterte und abgerundete Ausflußöffnung.

Unter Beibehaltung der frühren allgemeinen Bezeichnungen sei

O der konstante Querschnitt der Leitungsröhre EF,

Ω die Ausflußöffnung bei F,

p' der Druck im Gasometer,

p'' der äußere Druck gegen die Öffnung Ω,

p_3 der Druck, welcher in dem nächsten Punkte der Röhre bei H oberhalb der Ausflußöffnung herrscht, woselbst die Röhre den konstanten Querschnitt O annimmt,

V die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in der Öffnung Ω,

v die Geschwindigkeit in irgend einem Querschnitte O der Röhre bei N,

D der Durchmesser des Querschnittes O der Röhre,

$\Psi = \frac{4\,O}{D}$ der Umfang desselben,

L die Länge ENH der Röhre,

l die Länge EN von E bis zu dem Querschnitte bei N, woselbst der Druck p und die Geschwindigkeit v herrscht,

$\varkappa$ der Widerstandskoeffizient für die Reibung aus dem vorhergehenden Paragraphe.

Auf die im gegenwärtigen Paragraphe zu betrachtende Bewegung einer elastischen Flüssigkeit im Beharrungszustande findet die allgemeine Gleichung (784) Anwendung. Da hier jedoch keine

Widerstände vorkommen, welche in §. 183 mit R bezeichnet sind, und das Gefäß mit der Röhre keine plötzlichen Querschnittsveränderungen enthält; so ergibt die zitirte Formel, wenn man darin das von der Wirkung der Schwere herrührende Glied gZ, sowie das in $\left(\frac{p''\Omega}{p'O'}\right)^2$ multiplizirte Glied, als ungemein klein gegen die übrigen Glieder vernachlässigt, auch für F seinen Werth $\varkappa\frac{v^2}{2D}$ aus Gl. (872) substituirt, und beachtet, daß das Integral $\int F\,ds$ oder $\int F\,dl$ für die Länge der Röhre EH, also zwischen den Gränzen $l=o$ und $l=L$ zu nehmen ist,

$$-\frac{\varkappa}{2D}\int_o^L v^2\,dl+gk\log\frac{p'}{p''}=\frac{V^2}{2} \quad \ldots \quad (875)$$

Ehe aus dieser Gleichung der Werth für die Ausflußgeschwindigkeit V entwickelt werden kann, kommt es darauf an, den Werth des Integrales $\int_o^L v^2\,dl$ zu bestimmen. Da man für den Beharrungszustand nach Gl. (783) $pOv=p''\Omega V$, also $v=\frac{p''\Omega}{pO}V$ hat; so kann man zuvörderst

$$\int_o^L v^2\,dl=\frac{(p''\Omega V)^2}{O^2}\int_o^L\frac{dl}{p^2}$$

setzen.

Jetzt nehmen wir mit Navier die von der Wahrheit gewiß nicht sehr abweichende Hypothese an, daß das Quadrat p^2 des hydraulischen Druckes zwischen den Querschnitten E und H der Röhre gleichförmig mit dem Abstande vom Punkte E abnehme, sodaß man, da der Druck bei E sehr nahe gleich dem Drucke im Gasometer, also $=p'$, und der Druck bei H gleich p_3 ist, für den in N herrschenden Druck p die Bedingungsgleichung

$$p^2=p'^2-\frac{l}{L}(p'^2-p_3{}^2) \quad \ldots \quad (876)$$

hat. Hierdurch wird

$$\int_0^L v^2\,dl = \frac{(p''\Omega V)^2}{O^2}\int_0^L \frac{dl}{p'^2-(p'^2-p_8{}^2)\frac{l}{L}}$$

$$= \frac{L(p''\Omega V)^2}{O^2(p'^2-p_8{}^2)}\int_0^L \frac{dl}{\frac{Lp'^2}{p'^2-p_8{}^2}-l} = \frac{2L(p''\Omega V)^2}{O^2(p'^2-p_8{}^2)}\log\frac{p'}{p_8}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in Gl. (875); so kommt

$$-\frac{\varkappa L p''^2\Omega^2 V^2}{D(p'^2-p_8{}^2)O^2}\log\frac{p'}{p_8} + gk\log\frac{p'}{p''} = \frac{V^2}{2}$$

oder

$$2gk\log\frac{p'}{p''} = V^2\left\{1+2\varkappa\frac{L}{D}\frac{p''^2\Omega^2}{(p'^2-p_8{}^2)O^2}\log\frac{p'}{p_8}\right\} \quad \ldots . \ (877)$$

In diesem Ausdrucke würde endlich noch der Werth des im Querschnitte |H herrschenden Druckes p_8 zu bestimmen sein, ehe man sich desselben zur Berechnung der Ausflußgeschwindigkeit V bedienen könnte. Zu diesem Ende hat man aber als Bestimmungsgleichung für den in irgend einem Querschnitte O bei N herrschenden Druck p nach Gl. (788)

$$-\frac{\varkappa}{2D}\int_0^l v^2\,dl + gk\log\frac{p'}{p} = \frac{V^2}{2}\left(\frac{p''\Omega}{pO}\right)^2,$$

mithin für den Druck p_8 im Querschnitte bei H, für welchen $l = L$ ist,

$$-\frac{\varkappa}{2D}\int_0^L v^2\,dl + gk\log\frac{p'}{p_8} = \frac{V^2}{2}\left(\frac{p''\Omega}{p_8 O}\right)^2,$$

oder wenn man wieder für das Integral $\int_0^L v^2\,dl$ den obigen

Werth einführt, und gehörig reduzirt,

$$2gk\log\frac{p'}{p_3}=V^2\left\{\left(\frac{p''\Omega}{p_3 O}\right)^2+2\varkappa\frac{L}{D}\frac{p''^2\,\Omega^2}{(p'^2-p_3{}^2)\,O^2}\log\frac{p'}{p_3}\right\}\ldots.(878)$$

Eine Verbindung dieser Gleichung mit der Gl. (877) läßt nun sowol den bei H stattfindenden Druck p_3, wie auch die Ausflußgeschwindigkeit V erkennen, indem man zuvörderst bei Elimination von V die Gleichung

$$\frac{\log\frac{p'}{p_3}}{\log\frac{p'}{p''}}=\frac{\left(\frac{p''\Omega}{p_3 O}\right)^2+2\varkappa\frac{L}{D}\frac{p''^2\,\Omega^2}{(p'^2-p_3{}^2)\,O^2}\log\frac{p'}{p_3}}{1+2\varkappa\frac{L}{D}\frac{p''^2\,\Omega^2}{(p'^2-p_3{}^2)\,O^2}\log\frac{p'}{p_3}}\quad\ldots.(879)$$

erhält, aus welcher sich die Größe p_3 ergibt, nach deren Substitution in Gl. (877) man durch die Formel

$$V=\sqrt{\frac{2gk\log\frac{p'}{p''}}{1+2\varkappa\frac{L}{D}\frac{p''^2\,\Omega^2}{(p'^2-p_3{}^2)\,O^2}\log\frac{p'}{p_3}}}\quad\ldots.(880)$$

den Werth von V berechnen kann.

Es ist nicht zu verkennen, daß die strenge Auflösung der Gl. (879) für die Unbekannte p_3 etwas umständlich ist. Für den Fall, daß die Spannung p' im Gasometer nur wenig größer ist, als der äußere Druck p'', sodaß man

$$\left.\begin{aligned}p'&=(1+\alpha)p''\\ \text{und}\qquad & \\ p_3&=(1+\chi)p''\end{aligned}\right\}\quad\ldots.(881)$$

setzen kann, worin α und χ nur kleine echte Brüche bezeichnen, bietet folgender Weg eine bequemere Methode zur Bestimmung der Größen p_3 und V dar.

Setzt man nämlich näherungsweise $\log(1+\alpha)=\alpha$ und $\log(1+\chi)=\chi$, und vernachlässigt Glieder, welche in mehr als Eine Dimension der kleinen Größen α und χ multiplizirt sind; so reduzirt sich Gl. (877) auf

$$2gk\alpha = \frac{V^2\Omega^2}{O^2}\left\{\frac{O^2}{\Omega^2} + \varkappa\frac{L}{D}\left(1 - \frac{\alpha + \chi}{2}\right)\right\} \quad \ldots . (882)$$

und die Gl. (878) auf

$$2gk(\alpha - \chi) = \frac{V^2\Omega^2}{O^2}\left\{1 - 2\chi + \varkappa\frac{L}{D}\left(1 - \frac{\alpha + \chi}{2}\right)\right\} \quad \ldots . (883)$$

Aus diesen Gleichungen folgt bei Elimination von V und Vernachlässigung der Glieder von zwei und mehr Dimensionen der Größen α und χ

$$\chi = \alpha \frac{1 - \frac{\Omega^2}{O^2}}{1 + \varkappa\frac{L}{D}\frac{\Omega^2}{O^2}},$$

mithin wegen der Gleichungen (881) für den im Querschnitte bei H herrschenden Druck

$$p_3 = p'' + (p' - p'')\frac{1 - \frac{\Omega^2}{O^2}}{1 + \varkappa\frac{L}{D}\frac{\Omega^2}{O^2}} \quad \ldots . (884)$$

Durch Substitution dieses Werthes von p_3 in Gl. (880) ergibt sich die Ausflußgeschwindigkeit V. Nach Gl. (882), worin α für $\log(1+\alpha)$ d. i. für $\log\frac{p'}{p''}$ steht, ist die gedachte Geschwindigkeit unter den gemachten Voraussetzungen, wenn man noch das in $\frac{\alpha + \chi}{2}$ multiplizirte Glied auf der rechten Seite gegen die Summe der übrigen vernachlässigt, nicht sehr von dem Werthe

$$V = \sqrt{\frac{2gk\log\frac{p'}{p''}}{1 + \varkappa\frac{L}{D}\frac{\Omega^2}{O^2}}} \quad \ldots . (885)$$

verschieden.

Für den Fall, daß sich die Leitungsröhre an der Ausmündung bei F nicht weiter verengte, daß also die Ausflußöffnung Ω gleich dem konstanten Querschnitte O dieser Röhre wäre, würde

man in den vorstehenden Gleichungen $\Omega = O$ und $p_3 = p''$ zu setzen haben. Demnach erhielte man aus Gl. (877) für die Ausflußgeschwindigkeit V, gleichviel, ob der innere Druck p' den äußeren Druck p'' um ein Bedeutendes oder Geringes überschritte,

$$V = \sqrt{\frac{2gk \log \frac{p'}{p''}}{1 + 2\varkappa \frac{L}{D} \frac{p''^2}{(p'^2 - p''^2)} \log \frac{p'}{p''}}} \quad \ldots \quad (886)$$

Wäre hierbei übrigens p' nur wenig größer, als p'', ein Fall, auf den man überhaupt die praktische Anwendung der vorstehenden Formeln aus den in §. 191 vorgetragenen Gründen beschränken muß; so würde dieser Ausdruck von V wegen Gl. (885) sehr nahe den Werth

$$V = \sqrt{\frac{2gk \log \frac{p'}{p''}}{1 + \varkappa \frac{L}{D}}} \quad \ldots \quad (887)$$

besitzen.

Eine Vergleichung dieser Formel mit der für die Bewegung einer unpreßbaren Flüssigkeit unter ähnlichen Umständen geltenden Formel (574) lehrt, daß durch die Anbringung einer Leitungsröhre die Ausflußgeschwindigkeit einer elastischen, wie einer unpreßbaren Flüssigkeit in gleichem Maaße geschwächt wird.

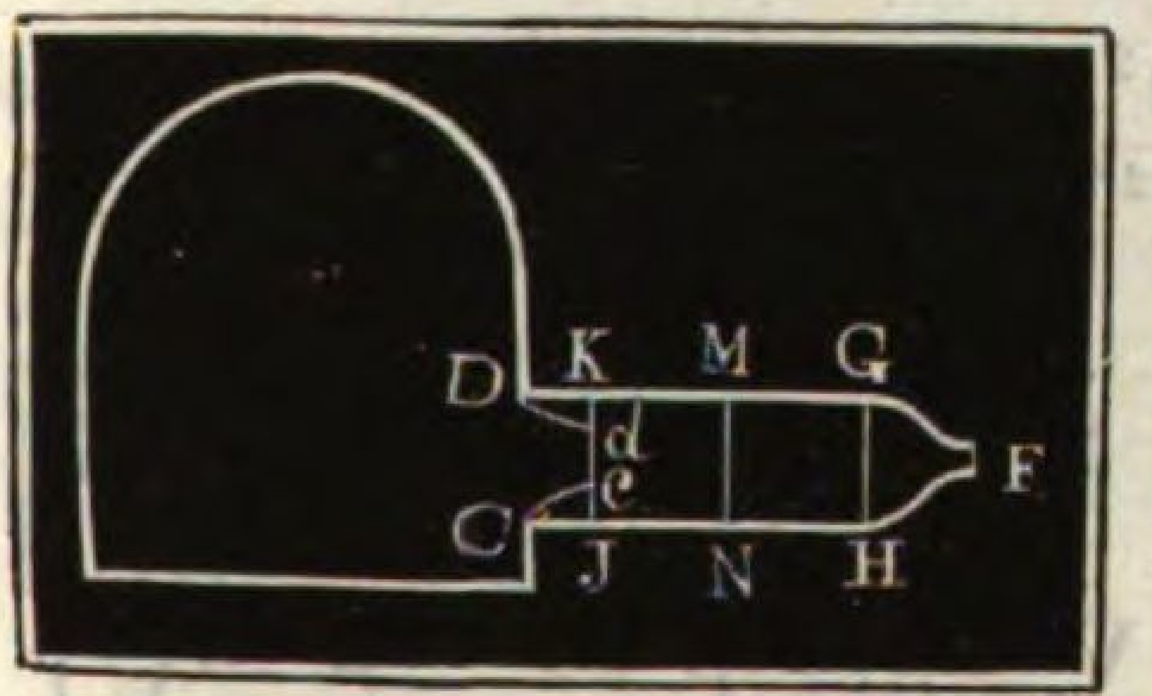
Wenn die Leitungsröhre an ihrer Ausmündung durch eine dünne ebene Wand geschlossen wäre, in welcher sich die Ausflußöffnung Ω befände; so würde die Flüssigkeit mit Kontraktion durch diese Öffnung Ω treten, und dicht hinter derselben den Querschnitt $m\Omega$ der stärksten Kontraktion annehmen, in welchem sich alle Theilchen nach parallelen Richtungen bewegten. Auf diesen Fall würden demnach die Gleichungen dieses Paragraphs bis zur Gl. (885) Anwendung finden, indem man darin $m\Omega$ an die Stelle von Ω setzte. Wäre also der innere Druck p' nur wenig größer, als der äußere Druck p''; so hätte man nach Gl. (885) für die Ausflußgeschwindigkeit in dem Querschnitte $m\Omega$ der stärksten Kontraktion

$$V=\sqrt{\frac{2gk\log\frac{p'}{p''}}{1+m^2\varkappa\frac{L}{D}\frac{\Omega^2}{O^2}}} \quad \ldots \quad (888)$$

Es ist noch zu bemerken, daß bei Röhren, deren Länge L im Vergleich zu ihrem Durchmesser D ungemein groß ist, das in $\frac{L}{D}$ multiplizirte Glied in den Ausdrücken für V so überwiegend groß gegen die Einheit wird, daß man die Letztere in den betreffenden Nennern vernachlässigen kann.

§. 199. **Beharrlicher Ausfluß einer elastischen Flüssigkeit aus einer Leitungsröhre, in welche die Flüssigkeit mit Kontraktion eintritt.**

Betrachten wir jetzt den Ausfluß einer elastischen Flüssigkeit aus einem mit einer Leitungsröhre verbundenen Apparate, welcher dem im vorhergehenden Paragraphe zu Grunde gelegten in allen übrigen Stücken gleich und nur darin von demselben verschieden ist, daß sich die Flüssigkeit mit Kontraktion aus dem Gasometer in die Leitungsröhre ergießt, mithin von dem Querschnitte $cd=mO$ der stärksten Kontraktion plötzlich zu dem Querschnitte JK = O der Röhre übergeht. Die Diskussion dieses Falles wird alsdann bei einem jeden anderen Falle zur Richtschnur dienen können, wo die Flüssigkeit an irgend einer Stelle der Röhre gezwungen werden sollte, plötzlich ihren Querschnitt zu ändern.



Unter Beibehaltung sämmtlicher Bezeichnungen des vorhergehenden Paragraphs sei hier noch

m der Kontraktionskoeffizient für den Eintritt der Flüssigkeit aus dem Gasometer in die Leitungsröhre, also mO der Querschnitt cd der stärksten Kontraktion daselbst,

p_1 der in diesem Querschnitte cd herrschende Druck,

p_2 der im Querschnitte JK herrschende Druck.

Bringt man auf den gegenwärtigen Apparat die allgemeine Gl. (784) unter den im vorhergehenden Paragraphe angedeute-

ten Vereinfachungen in Anwendung, indem man hier ebenfalls das Glied $\left(\frac{p''\Omega}{p'O'}\right)^2$ als ungemein klein gegen die Einheit vernachlässigt, und beachtet, daß hier $\omega_1 = m\text{O}$ und $\omega_2 = \text{O}$ ist; so kommt

$$-\frac{\varkappa}{2\text{D}}\int_o^{\text{L}} v^2\,dl + gk\log\frac{p'}{p''} = \frac{\text{V}^2}{2}\left\{1+\left(\frac{p''\Omega}{mp_1\text{O}} - \frac{p''\Omega}{p_2\text{O}}\right)^2\right\}.$$

Setzt man

$$\int_o^{\text{L}} v^2\,dl = \frac{(p''\Omega\text{V})^2}{\text{O}^2}\int_o^{\text{L}}\frac{dl}{p^2}$$

und nimmt wiederum an, daß der Werth der Größe p^2 von dem Werthe $p_2{}^2$, welcher für den Querschnitt JK oder für $l = o$ gilt, bis zu dem Werthe $p_3{}^2$, welcher für den Querschnitt HG oder für $l = \text{L}$ gilt, gleichförmig mit dem Abstande $\text{JN} = l$ von dem Querschnitte JK abnehme; so erhält man

$$\int_o^{\text{L}} v^2\,dl = \frac{2\text{L}(p''\Omega\text{V})^2}{\text{O}^2(p_2{}^2 - p_3{}^2)}\log\frac{p_2}{p_3},$$

und die obige Gleichung wird

$$-\frac{\varkappa\text{L}p''^2\Omega^2\text{V}^2}{\text{D}(p_2{}^2-p_3{}^2)\text{O}^2}\log\frac{p_2}{p_3} + gk\log\frac{p'}{p''} = \frac{\text{V}^2}{2}\left\{1+\left(\frac{p''\Omega}{mp_1\text{O}} - \frac{p''\Omega}{p_2\text{O}}\right)^2\right\}.$$

Hieraus folgt

$$2gk\log\frac{p'}{p''} = \text{V}^2\left\{1+\left(\frac{p''\Omega}{mp_1\text{O}} - \frac{p''\Omega}{p_2\text{O}}\right)^2 + 2\varkappa\frac{\text{L}}{\text{D}}\frac{p''^2\Omega^2}{(p_2{}^2-p_3{}^2)\text{O}^2}\log\frac{p_2}{p_3}\right\} \quad \ldots \text{(889)}$$

In dieser Formel sind vorerst die Pressungen p_1, p_2 und p_3, welche resp. in den Querschnitten cd, JK und HG stattfinden, zu bestimmen. Unterdrückt man nun in Gl. (788) alle Glieder, welche auf die Reibung der Flüssigkeit an den Wänden der Leitungsröhre und auf die plötzlichen Querschnittsveränderungen

Bezug haben; so dient dieselbe dazu, um die Pressungen p darzustellen, welche in den oberhalb cd liegenden Querschnitten des Apparates, inklusive des letzteren Querschnittes, stattfinden. Demnach hat man für den Druck p in irgend einem Querschnitte ω des kontrahirten Strahles $\mathrm{D}dc\mathrm{C}$, wenn man auch das Glied $\left(\frac{p''\Omega}{p'\mathrm{O}'}\right)^2$ als sehr klein vernachlässigt,

$$gk \log \frac{p'}{p} = \frac{\mathrm{V}^2}{2}\left(\frac{p''\Omega}{p\omega}\right)^2.$$

Hieraus folgt für den Druck p_1 im Querschnitte $cd = m\mathrm{O}$, wenn man $p = p_1$ und $\omega = m\mathrm{O}$ setzt,

$$2gk \log \frac{p'}{p_1} = \mathrm{V}^2\left(\frac{p''\Omega}{mp_1\mathrm{O}}\right)^2 \quad \ldots \; (890)$$

Der in irgend einem Querschnitte NM des Röhrenstückes JKF herrschende Druck p wird ebenfalls aus Gl. (788) zu bestimmen sein, wenn man darin das auf die Reibung an den Röhrenwänden bezügliche Integral $\int \mathrm{F}ds$ bis auf die Länge $\mathrm{JN} = l$ nimmt, und außerdem diejenigen Glieder beibehält, welche von dem plötzlichen Übergange der Flüssigkeit von dem Querschnitte $cd = m\mathrm{O}$ zu dem Querschnitte $\mathrm{JK} = \mathrm{O}$ ihren Ursprung herleiten. Dies gibt unter Vernachlässigung des Gliedes $\left(\frac{p''\Omega}{p'\mathrm{O}'}\right)^2$

$$-\frac{\varkappa}{2\mathrm{D}}\int_o^l v^2\,dl + gk\log\frac{p'}{p} = \frac{\mathrm{V}^2}{2}\left\{\left(\frac{p''\Omega}{p\omega}\right)^2 + \left(\frac{p''\Omega}{mp_1\mathrm{O}} - \frac{p''\Omega}{p_2\mathrm{O}}\right)^2\right\}.$$

Um hieraus den im Querschnitte JK herrschenden Druck p_2 zu erhalten, hat man $\omega = \mathrm{O}$, $p = p_2$, $l = o$ zu setzen, wodurch das erste Glied auf der linken Seite verschwindet und man

$$2gk\log\frac{p'}{p_2} = \mathrm{V}^2\left\{\left(\frac{p''\Omega}{p_2\mathrm{O}}\right)^2 + \left(\frac{p''\Omega}{mp_1\mathrm{O}} - \frac{p''\Omega}{p_2\mathrm{O}}\right)^2\right\} \quad \ldots \; (891)$$

bekommt.

Um jedoch den Werth des Druckes p_3 im Querschnitte HG zu bestimmen, hat man $\omega = \mathrm{O}$, $p = p_3$, $l = \mathrm{L}$ zu substituiren, was nach gehöriger Reduktion, da

$$\int_0^L v^2 dl = \frac{2L(p''\Omega V)^2}{O^2(p_2{}^2 - p_3{}^2)} \log\frac{p_2}{p_3}$$

ist,

$$2gk\log\frac{p'}{p_3}$$

$$= V^2 \left\{ \left(\frac{p''\Omega}{p_3 O}\right)^2 + \left(\frac{p''\Omega}{mp_1 O} - \frac{p''\Omega}{p_2 O}\right)^2 + 2\varkappa\frac{L}{D}\,\frac{p''^2\Omega^2}{(p_2{}^2 - p_3{}^2)O^2}\log\frac{p_2}{p_3} \right\}$$

. . . . (892)

ergibt.

Vermittelst der vier Gleichungen (889) bis (892) wird man im Stande sein, sowol die drei Pressungen p_1, p_2, p_3, wie auch die Ausflußgeschwindigkeit V zu berechnen.

Für den Fall, daß der innere Druck p' im Gasometer den äußeren Druck p'' nur wenig überschreitet, werden in den folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} p' &= (1+\alpha)p'' \\ p_1 &= (1+\varphi)p'' \\ p_2 &= (1+\psi)p'' \\ p_3 &= (1+\chi)p'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (893)$$

die Größen α, φ, ψ, χ kleine echte Brüche sein, und man wird näherungsweise $\log(1+\alpha)=\alpha$, $\log(1+\varphi)=\varphi$ etc. setzen, auch Glieder von zwei und mehr Dimensionen aus diesen Größen vernachlässigen können. Unter solchen Voraussetzungen gehen aber die vier Gleichungen (889) bis (892) in die folgenden über,

$$2gk\alpha$$

$$= \frac{V^2\Omega^2}{O^2}\left\{\frac{O^2}{\Omega^2} + \left(\frac{1}{m}-1\right)^2 - 2\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{\varphi}{m}-\psi\right) + \varkappa\frac{L}{D}\left(1-\frac{\psi+\chi}{2}\right)\right\}$$

. . . . (894)

$$2gk(\alpha-\varphi) = \frac{V^2\Omega^2}{O^2}\cdot\frac{1-2\varphi}{m^2} \quad \ldots\ldots (895)$$

$$2gk(\alpha-\psi) = \frac{V^2\Omega^2}{O^2}\left\{1-2\psi+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2 - 2\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{\varphi}{m}-\psi\right)\right\}$$

. . . . (896)

$$2gk(\alpha-\chi)$$
$$=\frac{V^2\Omega^2}{O^2}\left\{1-2\chi+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2-2\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{\varphi}{m}-\psi\right)+\varkappa\frac{L}{D}\left(1-\frac{\psi+\chi}{2}\right)\right\}$$
$$\ldots . (897)$$

Eliminirt man zwischen diesen Gleichungen die Größe $\frac{V^2\Omega^2}{O^2}$, indem man den Werth $\frac{2gkm^2(\alpha-\varphi)}{1-2\varphi}$ derselben aus Gl. (895) in die übrigen substituirt; so kommt

$$\alpha=\frac{m^2(\alpha-\varphi)}{1-2\varphi}\times$$
$$\left\{\frac{O^2}{\Omega^2}+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2+2\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{\varphi}{m}-\psi\right)+\varkappa\frac{L}{D}\left(1-\frac{\psi+\chi}{2}\right)\right\},$$

$$\alpha-\psi=\frac{m^2(\alpha-\varphi)}{1-2\varphi}\left\{1-2\psi+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2-2\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{\varphi}{m}-\psi\right)\right\},$$

$$\alpha-\chi=\frac{m^2(\alpha-\varphi)}{1-2\varphi}\times$$
$$\left\{1-2\chi+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2-2\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{\varphi}{m}-\psi\right)+\varkappa\frac{L}{D}\left(1-\frac{\psi+\chi}{2}\right)\right\}.$$

Multiplizirt man jetzt diese drei Gleichungen mit $(1-2\varphi)$ und unterdrückt alle Glieder, welche in mehr, als Eine Dimension von α, φ, ψ, χ multiplizirt sind; so ergibt sich

$$\alpha=m^2(\alpha-\varphi)\left\{\frac{O^2}{\Omega^2}+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2+\varkappa\frac{L}{D}\right\},$$

$$\alpha-\psi=m^2(\alpha-\varphi)\left\{1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2\right\},$$

$$\alpha-\chi=m^2(\alpha-\varphi\left\{1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2+\varkappa\frac{L}{D}\right\}.$$

Hieraus folgt

$$\alpha-\varphi=\alpha.\frac{\frac{1}{m^2}}{\frac{O^2}{\Omega^2}+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2+\varkappa\frac{L}{D}},$$

$$\alpha-\psi=\alpha\cdot\frac{1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2}{\frac{O^2}{\Omega^2}+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2+\varkappa\frac{L}{D}},$$

$$\alpha-\chi=\alpha\cdot\frac{1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2+\varkappa\frac{L}{D}}{\frac{O^2}{\Omega^2}+\left(\frac{1}{m}-1\right)+\varkappa\frac{L}{D}},$$

und aus den letzteren Gleichungen endlich

$$\varphi=\alpha\cdot\frac{\frac{O^2}{\Omega^2}-\left(\frac{2}{m}-1\right)+\varkappa\frac{L}{D}}{\frac{O^2}{\Omega^2}+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2+\varkappa\frac{L}{D}} \quad \ldots\ (898)$$

$$\psi=\alpha\cdot\frac{\frac{O^2}{\Omega^2}-1+\varkappa\frac{L}{D}}{\frac{O^2}{\Omega_2}+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2+\varkappa\frac{L}{D}} \quad \ldots\ (899)$$

$$\chi=\alpha\cdot\frac{\frac{O^2}{\Omega^2}-1}{\frac{O^2}{\Omega^2}+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2+\varkappa\frac{L}{D}} \quad \ldots\ (900)$$

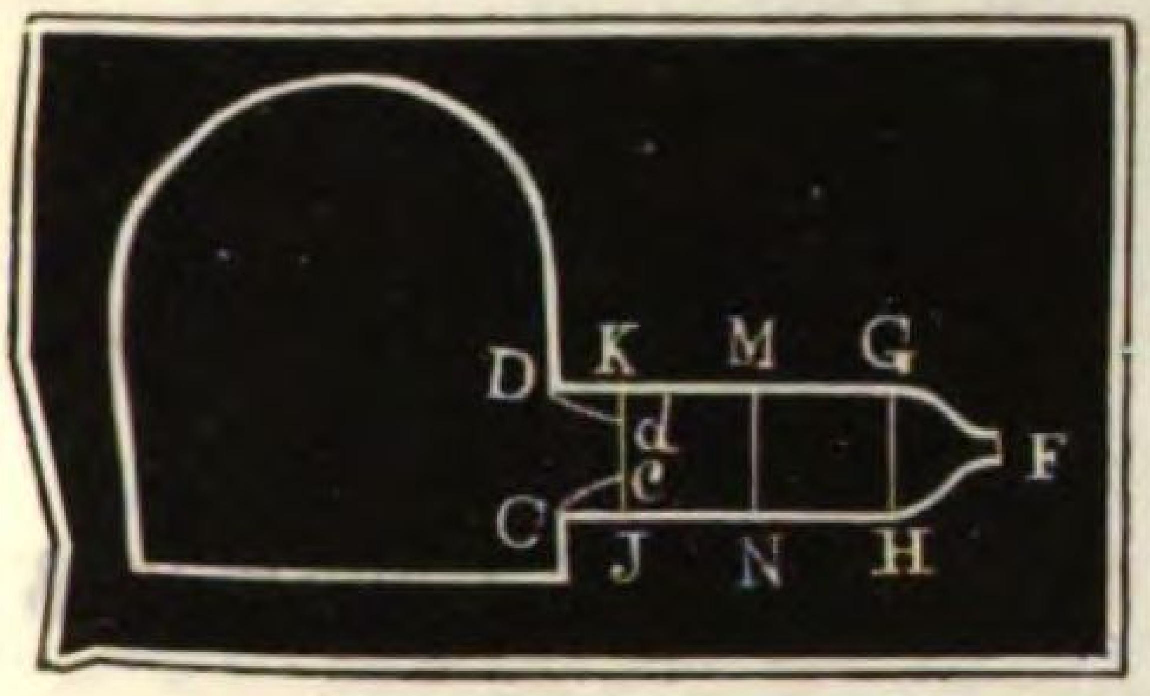
Um jetzt die Pressungen p_1, p_2, p_3 zu berechnen, braucht man in die Gleichungen

$$p_1=p''+(p'-p'')\frac{\varphi}{\alpha},$$

$$p_2=p''+(p'-p'')\frac{\psi}{\alpha},$$

$$p_3=p'+(p'-p'')\frac{\chi}{\alpha},$$

welche sich aus den Gleichungen (893) ergeben, nur die Werthe der Quotienten $\frac{\varphi}{\alpha}$, $\frac{\psi}{\alpha}$, $\frac{\chi}{\alpha}$ aus den drei Gleichungen (898)



bis (900) zu substituiren.

Der in irgend einem Querschnitte NM der Röhre zwischen JK und HG herrschende Druck ist hierauf nach der durch Gl. (876) dargestellten Hypothese vermittelst der Formel

$$p = \sqrt{p_2{}^2 - \frac{l}{L}(p_2{}^2 - p_3{}^2)}$$

zu berechnen.

Für die Ausflußgeschwindigkeit V erhält man nach Gl. (894), indem man für α den ursprünglichen Werth $\log(1+\alpha) = \log\frac{p'}{p''}$ wieder einführt, und die in φ, ψ, χ multiplizirten Glieder auf der rechten Seite gegen die Summe der übrigen Glieder außer Acht läßt,

$$V = \sqrt{\frac{2gk\log\frac{p'}{p''}}{1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2\frac{\Omega^2}{O^2}+\varkappa\frac{L}{D}\frac{\Omega^2}{O^2}}} \quad \ldots . (901)$$

Für den Fall, daß sich vorn an der Röhre bei F kein Mundstück befände, und daß sich die Flüssigkeit aus der vollen Öffnung O ergösse, würde man $\Omega = O$ zu setzen haben, wodurch unter den obigen Voraussetzungen

$$V = \sqrt{\frac{2gk\log\frac{p'}{p''}}{1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2+\varkappa\frac{L}{D}}} \quad \ldots . (902)$$

oder wenn man der Kürze wegen

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2}} = \frac{m}{\sqrt{m^2+(1-m)^2}} = n$$

setzt,

$$V = n\sqrt{\frac{2gk\log\frac{p'}{p''}}{1+n^2\varkappa\frac{L}{D}}} \quad \ldots\ldots (902^a)$$

werden würde. Der Größe n müßte man für die Anwendung in der Praxis den Werth

$$n = 0{,}76$$

beilegen, und Dies setzt voraus, daß man statt des Kontraktionskoeffizienten m in den obigen Formeln den Werth

$$m = 0{,}54$$

substituirte. Es muß hierbei darauf aufmerksam gemacht werden, daß der letztere Werth des Kontraktionskoeffizienten m nur in dem eben namhaft gemachten Falle zu gebrauchen sein würde, wo sich die Flüssigkeit aus einem größeren Behälter mit Kontraktion in eine Leitungsröhre ergießt, in der dieselbe alsdann plötzlich zu dem Querschnitte der Röhre übergeht. Auf eine reine Kontraktion bei dem Durchgange durch eine Öffnung in dünner Wand, wobei diese Öffnung die letzte Ausflußöffnung der Flüssigkeit bildete, würde man dagegen nach §. 187 den Werth $m = 0{,}58$ anzuwenden haben.

Auch ist noch zu erwähnen, daß der vorstehende Werth 0,76 von n hier etwas größer angenommen ist, als ihn nach §. 196 die Erfahrungen für kurze Ansatzröhren geliefert haben, und zwar deshalb, weil in dem gegenwärtigen Ausdrucke für V der Widerstand der Reibung an den Röhrenwänden vollständig berücksichtigt ist, was in den Formeln des §s 196 für kurze Ansatzröhren nicht geschieht, obgleich auch dort die Reibung schon einigen Einfluß auf die Bewegung der Flüssigkeit ausübt.

Wäre die Röhre vorn durch eine ebene Wand geschlossen, in welcher sich die Öffnung Ω befände, sodaß sich die Flüssigkeit mit Kontraktion durch diese Öffnung ergießen müßte; so würde in die Gleichungen dieses Paragraphs bis zur Gl. (901) der Querschnitt $m'\Omega$ der stärksten Kontraktion als eigentliche Ausflußöffnung anzusehen und statt Ω zu substituiren sein. Hiernach würde man aus Gl. (901) für die im kontrahirten Querschnitte $m'\Omega$ stattfindende Ausflußgeschwindigkeit

$$V=\sqrt{\frac{2gk\log\frac{p'}{p''}}{1+m'^2\left(\frac{1}{m}-1\right)^2\frac{\Omega^2}{O^2}+m'^2\varkappa\frac{L}{D}\frac{\Omega^2}{O^2}}} \quad \ldots\ldots(903)$$

erhalten, worin nach dem Obigen $m=0{,}52$ und $m'=0{,}58$ zu setzen wäre.

Bei Röhren von sehr großer Länge würden in den vorstehenden Formeln für V alle übrigen Glieder gegen das in $\frac{L}{D}$ multiplizirte Glied verschwinden.

Zur Bestimmung des unter dem äußeren Drucke p'' gemessenen Volums Q'', sowie des unter dem inneren Drucke p' gemessenen Volums Q', wie endlich des Gewichtes W der Ausflußmenge für die Zeiteinheit, dienen immer die allgemeinen Formeln (785), (785ᵃ) und (787), wonach man

$$Q''=\Omega V,$$

$$Q'=\frac{p''}{p'}\Omega V,$$

$$W=\frac{p''\Omega V}{k}$$

hat. In diesen Formeln erhält V je nach den Umständen den Werth aus Gl. (901), (902) oder (903). Ω stellt darin die Ausflußöffnung dar, wobei vorausgesetzt ist, daß die Fäden der Flüssigkeit sämmtlich in parallelen Richtungen durch dieselbe treten. Demnach wird man in den vorstehenden Ausdrücken bei Anwendung des Werthes von V aus Gl. (901) $\Omega=\Omega$, bei Anwendung des Werthes aus Gl. (902) $\Omega=O$, und bei Anwendung des Werthes aus Gl. (903) $m'\Omega$ statt Ω zu setzen haben, sodaß in dem letzteren Falle, wo die Flüssigkeit mit Kontraktion aus der Röhre herausritt,

$$Q''=m'\Omega V,$$

$$Q'=m'\frac{p''}{p'}\Omega V,$$

$$W=m'\frac{p''\Omega V}{k}$$

ist.

§. 200. Beharrlicher Ausfluß einer elastischen Flüssigkeit aus einer Röhrenleitung, in welcher sich verschiedene Zwischenwände, Erweiterungen und Verengungen, Ventile und Hähne, Kniee und starke Krümmungen befinden.

Obgleich über die Wirkung der vorstehend genannten Hindernisse auf die Bewegung einer elastischen Flüssigkeit in einer Röhrenleitung noch keine genauen und umfassenden Versuche vorliegen; so berechtigt doch die Analogie zwischen den Kontraktions- und Reibungserscheinungen der unpreßbaren und der elastischen Flüssigkeiten unter den bisher betrachteten einfachen Verhältnissen zu dem Schlusse, daß die in den §§. 136 bis 140 mitgetheilten, auf unpreßbare Flüssigkeiten bezüglichen Resultate der Erfahrung auch auf elastische Flüssigkeiten unter ähnlichen Umständen und bei einigen noch näher anzugebenden Einschränkungen näherungsweise Anwendung finden werden.

Die allgemeine Formel für die Bewegung der Flüssigkeit bleibt immer die Gl. (784). Mit dieser ist noch die Gl. (788), welche den in den verschiedenen Querschnitten herrschenden Druck kennen lehrt, auf eine Weise zu verbinden, welche in den vorhergehenden Paragraphen bereits mehrere Male zur Anwendung gekommen ist. Der Gebrauch der letzteren Gleichung besteht darin, daß man mit Hülfe derselben aus der Gl. (784) die a priori nicht bekannten Pressungen p_1, p_2 etc. eliminirt. Wenn jedoch die Annahme gemacht wird, daß der innere im Gasometer herrschende Druck p' nur wenig größer sei, als der äußere Druck p'', sodaß auch alle übrigen in dem Apparate vorkommenden Pressungen p_1, p_2, etc. nur wenig größer oder kleiner sein werden, als p''; so wird man ohne die Gl. (788) im Stande sein, einen angenäherten Werth für die Ausflußgeschwindigkeit V anzugeben.

Denn da Kräfte, welche in Gl. (784) mit R bezeichnet sind, hier nicht vorkommen; so reduzirt sich jene Gleichung bei Vernachlässigung der sehr kleinen Glieder gZ und $\frac{V^2}{2}\left(\frac{p''\Omega}{p'O'}\right)^2$ auf

$$2gk\log\frac{p'}{p''} = V^2\left\{1+\Sigma\left(\frac{p''\Omega}{p_1\omega_1}-\frac{p''\Omega}{p_2\omega_2}\right)^2\right\}+2\int F ds \quad \dots (904)$$

Ist nun irgend ein Druck, wie p_1 und p_2, nur wenig von p'' verschieden, sodaß in den Ausdrücken

$$p_1 = (1+\varphi)p'' \text{ und } p_2 = (1+\psi)p''$$

φ und ψ kleine echte Brüche sind; so kann man unter Vernachlässigung derjenigen kleinen Glieder, welche in mehr, als Eine Dimension von φ und ψ multiplizirt sind, einen jeden Faktor von der Form $\left(\frac{p''\Omega}{p_1\omega_1} - \frac{p''\Omega}{p_2\omega_2}\right)^2$ oder $\left(\frac{\Omega}{(1+\varphi)\omega_1} - \frac{\Omega}{(1+\psi)\omega_2}\right)^2$ gleich

$$\left[(1-\varphi)\frac{\Omega}{\omega_1} - (1-\psi)\frac{\Omega}{\omega_2}\right]^2 = \left(\frac{\Omega}{\omega_1} - \frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2 - 2\left(\frac{\Omega}{\omega_1} - \frac{\Omega}{\omega_2}\right)\left(\frac{\Omega}{\omega_1}\varphi - \frac{\Omega}{\omega_2}\psi\right)$$

setzen. Ließe man jedoch auch die in φ und ψ multiplizirten Glieder dieses Ausdruckes gegen die Summe der übrigen auf der rechten Seite der Gl. (904) befindlichen Glieder außer Acht; so würde man näherungsweise

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_1} - \frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2 \text{ für } \left(\frac{p''\Omega}{p_1\omega_1} - \frac{p''\Omega}{p_2\omega_2}\right)^2$$

substituiren können.

Was den Werth des Integrales $\int \mathrm{F}\,ds$ in der obigen Gleichung (904) betrifft; so wird dasselbe, wenn der gleichförmige Querschnitt der Röhre an verschiedenen Stellen durch Zwischenwände, Erweiterungen oder Verengungen unterbrochen ist, aus mehreren Theilen bestehen. Irgend Einer dieser Theile, welcher sich auf eine Röhrenlänge $= \mathrm{L}_1$ beziehen möge, wird durch

$$\int_0^{\mathrm{L}_1} \mathrm{F}\,dl = \frac{\varkappa}{2\mathrm{D}} \int_0^{\mathrm{L}_1} v^2\,dl,$$

oder wenn der Druck im vorderen und hinteren Querschnitte dieses Röhrenstückes resp. durch p_1 und p_2 bezeichnet ist, nach §. 197 oder (198) durch

$$\varkappa \frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{D}} \frac{(p''\Omega \mathrm{V})^2}{\mathrm{O}^2(p_1{}^2 - p_2{}^2)} \log \frac{p_1}{p_2}$$

dargestellt.

Setzt man hierin $p_1 = (1+\varphi)p''$ und $p_2 = (1+\psi)p''$; so reduzirt sich dieser Ausdruck bei Vernachlässigung der Glieder vom zweiten und von höheren Graden in φ und ψ auf

$$\frac{1}{2}\varkappa\frac{L_1}{D}\frac{\Omega^2 V^2}{O^2}\left(1-\frac{\varphi+\psi}{2}\right),$$

wofür man näherungsweise, wenn man die in φ und ψ multiplizirten Glieder gegen die Summe der übrigen Glieder auf der rechten Seite der Gl. (904) unterdrückt,

$$\frac{1}{2}\varkappa\frac{L_1}{D}\frac{\Omega^2 V^2}{O^2}$$

setzen kann.

Wäre nun die ganze Länge $L_1 + L_2 + L_3 + \ldots$ solcher Röhrenstücke $= L$; so würde man für die Wirkung der Reibung der Flüssigkeit an den Wänden dieser sämmtlichen Röhrenstücke näherungsweise

$$\int F ds = \frac{1}{2}\varkappa\frac{L}{D}\frac{\Omega^2 V^2}{O^2}$$

haben.

Durch eine Substitution der vorstehenden abgekürzten Ausdrücke in Gl. (904) wird dieselbe

$$2gk\log\frac{p'}{p''} = V^2\left\{1+\Sigma\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2+\varkappa\frac{L}{D}\frac{\Omega^2}{O^2}\right\} \quad \ldots \quad (905)$$

Wegen einer besseren Übereinstimmung der nachfolgenden Formeln mit den in den §§. 133 ff. für die Bewegung einer unpreßbaren Flüssigkeit durch Röhrenleitungen aufgestellten Gleichungen sei U diejenige Geschwindigkeit, welche das elastische Fluidum in dem Querschnitte O der Leitungsröhre an einer Stelle haben müßte, wo der äußere Druck p'' herrschte, wenn durch diesen Querschnitt in der Zeiteinheit dieselbe Masse fließen sollte, welche sich in derselben Zeit durch die Ausflußöffnung Ω ergießt. Hiernach müßte wegen Gl. (783)

$$p'' O U = p'' \Omega V$$

oder

$$O U = \Omega V$$

sein.

Substituirt man den hieraus folgenden Werth von $V = \frac{O}{\Omega} U$ in Gl. (905); so wird dieselbe

$$k \log \frac{p'}{p''} = \left\{ \frac{O^2}{\Omega^2} + \Sigma \left(\frac{O}{\omega_1} - \frac{O}{\omega_2} \right)^2 + \varkappa \frac{L}{D} \right\} \frac{U^2}{2g} \quad \ldots\ldots (906)$$

Man erkennt, daß die rechte Seite dieser Gleichung mit den allgemeinen Formeln für die Druckhöhe Z genau übereinstimmt, welche in den §§. 136 ff. für die Bewegung des Wassers durch Röhrenleitungen aufgestellt sind, wenn man beachtet, daß dort Ω den konstanten Querschnitt der Röhre (welcher hier mit O bezeichnet ist) ferner O'' die letzte Ausflußöffnung (welche hier mit Ω bezeichnet ist) darstellt und daß in §. 136 zuvörderst angenommen war, daß die Röhre mit voller Öffnung, ohne Mundstück, in die freie Luft ergieße, wodurch das erste Glied in dem Faktor von $\frac{U^2}{2g}$ gleich 1 werden mußte. In §. 140 ist jedoch die Wirkung eines Mundstückes berücksichtigt, und dadurch das vorstehende Glied $\frac{O^2}{\Omega^2}$ eingeführt worden.

Nun sei

1) wenn die Leitungsröhre ein kurzes Mundstück besitzt, der Widerstandskoeffizient für dasselbe nach §. 140

$$K'' = \frac{O^2}{\Omega^2} \quad \ldots (907)$$

Bestände dieses Mundstück darin, daß die Ausmündung der Röhre einfach durch eine dünne ebene Wand geschlossen wäre, in welcher sich die Öffnung Ω befände, sodaß die Flüssigkeit mit Kontraktion durch diese Öffnung träte; so würde man für Ω den Querschnitt $m\Omega$ der stärksten Kontraktion, also

$$K'' = \frac{O^2}{m^2 \Omega^2},$$

zu setzen haben. Hierin würde m den Werth 0,58 haben, wenn die Kontraktion vollkommen wäre. Bei unvollkommener Kontraktion, wie es hier in der Regel der Fall sein wird, ist jener Werth nach §. 85 zu korrigiren.

Wäre gar kein Mundstück vorhanden, und ergösse sich die Flüssigkeit aus der vollen Öffnung O der Röhre; so hätte man $\Omega = O$, also

$$K'' = 1$$

zu setzen.

Befinden sich ferner Scheidewände, Verengungen und Erweiterungen in der Röhre; so sind die Wirkungen derselben, welche Glieder von der Form $\left(\frac{O}{\omega_1} - \frac{O}{\omega_2}\right)^2$ erzeugen, ganz nach §. 136 zu bestimmen. Es sei demnach mit Bezugnahme auf jenen Paragraph

2) der Widerstandskoeffizient für den **Eintritt** der Flüssigkeit aus dem Gasometer in die Röhre, wenn die Einmündung allgemein durch eine Öffnung O_1 in dünner Wand gebildet ist, sodaß man $\frac{O_1}{O} = \delta$ hat,

$$k' = \left(\frac{1}{\delta m} - 1\right)^2 \quad \ldots \text{(908)}$$

Wäre die Scheidewand vor der Einmündung in die Leitungsröhre nicht vorhanden, träte aber gleichwol die Flüssigkeit mit vollkommener Kontraktion in die Röhre; so hätte man $O_1 = 0$, also $\delta = 1$ und mithin

$$k' = \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2.$$

In diesen Ausdrücken von k' würde man, da auf die Kontraktion des Strahles plötzliche Ausdehnung desselben folgt, nach §. 198 $m = 0{,}54$ zu nehmen haben.

Fände jedoch gar keine Kontraktion beim Eintritte in die Leitungsröhre statt, indem der Anschluß derselben an den Gasometer gehörig abgerundet wäre; so würde Dies einem Falle entsprechen, für welchen man $m = 1$, also

$$k' = o$$

zu setzen hätte.

3) Für eine in der Röhre vorkommende plötzliche **Erweiterung** vom Querschnitte O auf den Querschnitt O_1, hinter

welcher sich die Röhre dann wiederum auf den konstanten Querschnitt O verengt, sei der Widerstandskoeffizient nach Gl. (599)

$$k_1 = \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2, \quad \ldots . (909)$$

worin $\delta = \frac{O_1}{O}$ ist.

4) Für eine plötzliche Verengung vom Querschnitte O auf den Querschnitt O_1, hinter welcher sich die Röhre wiederum auf den konstanten Querschnitt O erweitert, sei der Widerstandskoeffizient nach Gl. (602)

$$k_1 = \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{\delta} - 1\right)^2, \quad \ldots . (910)$$

worin ebenfalls $\delta = \frac{O_1}{O}$ ist.

5) Für eine dünne Scheidewand, in welcher sich die Öffnung O_1 befindet, sei der Widerstandskoeffizient nach Gl. (603)

$$k_1 = \left(\frac{1}{\delta m} - 1\right)^2, \quad \ldots . (911)$$

worin man, wie vorhin, $\delta = \frac{O_1}{O}$ hat.

In den letzten drei Gleichungen (909), (910), (911) würde man, wenn die Kontraktion an den betreffenden Stellen vollkommen wäre, nach §. 198 $m = 0{,}54$ setzen müssen. Da diese Kontraktion aber wegen des nicht sehr großen Querschnittes, welcher der Durchflußöffnung vorhergeht, unvollkommen ist; so hat man den Werth 0,54 nach der in §. 85 angegebenen Tabelle den Umständen angemessen zu korrigiren.

6) Befände sich in der Röhre ein Ventil oder ein Hahn, welcher eine plötzliche Verengung und Erweiterung des flüssigen Strahles herbeiführte; so würde man den dadurch verursachten Widerstand, bis hierüber bestimmtere Versuche angestellt sein werden, nach den Angaben für die Bewegung des Wassers unter gleichen Umständen, wie sie in §. 137 mitgetheilt sind, schätzen und den betreffenden Widerstandskoeffizienten aus den dortigen Tabellen I bis VII entnehmen können.

Nach der vorstehenden Bezeichnung würde nun die Gl. (906)

$$k \log \frac{p'}{p''} = \left(K'' + k' + \Sigma k_1 + \varkappa \frac{L}{D}\right) \frac{U^2}{2g}$$

werden, worin k_1 allgemein einen Widerstandskoeffizienten für den Durchgang durch eine Erweiterung, eine Verengung, eine Scheidewand oder ein Ventil darstellt.

Wäre das Mundstück, aus welchem sich die Flüssigkeit ergießt, in Beziehung zu seiner Weite ziemlich lang, und träte die Flüssigkeit wol gar noch mit Kontraktion in dasselbe ein; so würde man dem auf dieses Mundstück bezüglichen Werthe von K″ nach §. 140 noch die Glieder

$$k'' + \varkappa'' \frac{l}{d} \frac{D^4}{d^4}$$

hinzuzufügen haben.

7) Kämen in der Leitungsröhre **Kniee** vor, in welchen die Axe der Röhre eine scharfe Ecke bildete; so würde auch hieraus ein bedeutender Widerstand für die Bewegung der Flüssigkeit sich ergeben. Es läßt sich annehmen, daß die Wirkung dieses Widerstandes unter den hier gemachten Voraussetzungen nicht wesentlich von derjenigen abweiche, welche die Bewegung des Wassers unter gleichen Umständen erleidet, daß man also die praktischen Resultate des §s 138 näherungsweise auch auf den Fall einer elastischen Flüssigkeit anwenden und dem Faktor von $\frac{U^2}{2g}$ in der obigen Gleichung für das Vorkommen eines Kniees ein Glied $= k_2$ nach Gl. (611) zufügen könne.

8) Ein Gleiches gilt von dem Widerstande, welchen die elastische Flüssigkeit bei dem Durchgange durch eine gehörig abgerundete **Krümmung** erleiden würde. Für eine jede solche Krümmung würde man nach §. 139 unter den Faktoren von $\frac{U^2}{2g}$ einen Widerstandskoeffizienten $= k_3$ einzuführen haben.

Unter Berücksichtigung aller dieser verschiedenartigen Widerstände der Bewegung einer elastischen Flüssigkeit durch eine Röhrenleitung geht endlich die obige Gleichung über in

$$k \log \frac{p'}{p''} = \left(K'' + k' + k'' + \varkappa \frac{L}{D} + \varkappa'' \frac{l}{d} \frac{D_4}{d^4} + \Sigma k_1 + \Sigma k_2 + \Sigma k_3\right) \frac{U^2}{2g} \quad \ldots . (912)$$

Hieraus folgt

$$U = \sqrt{\frac{2gk \log \frac{p'}{p''}}{K'' + k' + k'' + \varkappa \frac{L}{D} + \varkappa'' \frac{l}{d} \frac{D^4}{d^4} + \Sigma k_1 + \Sigma k_2 + \Sigma k_3}} \quad \ldots . (913)$$

Die Ausflußgeschwindigkeit V der Flüssigkeit im vordersten Querschnitte Ω des Mundstückes ist bekanntlich

$$V = \frac{O}{\Omega} U, \quad \ldots . (914)$$

worin $m\Omega$ statt Ω zu setzen wäre, falls sich die Ausflußöffnung Ω in einer dünnen Wand befände. Für m würde man den Werth 0,58 haben, sobald diese Kontraktion als eine vollkommene zu betrachten wäre. Da Dies jedoch hier in den wenigsten Fällen möglich sein wird, weil der der eigentlichen Ausflußöffnung Ω vorhergehende Querschnitt der Leitungsröhre selbst nur klein sein kann; so wird man den Werth $m = 0{,}58$ nach den Tabellen des §s 85 angemessen zu korrigiren haben.

Das Volum der Ausflußmenge in der Zeiteinheit, unter dem äußeren Drucke p'' gemessen, ist offenbar

$$Q'' = OU \quad \ldots . (915)$$

Unter dem inneren Drucke p' des Gasometers gemessen, ist das Volum dieser Ausflußmenge

$$Q' = \frac{p''}{p'} OU, \quad \ldots . (916)$$

und für das Gewicht dieser Ausflußmenge hat man Gl. (787)

$$W = \frac{p'' OU}{k} \quad \ldots . (917)$$

Wenn die Pressungen p' und p'' resp. im Gasometer und in dem äußeren Raume, in welchen sich die Flüssigkeit ergießt, durch

die vertikalen Säulen einer unpreßbaren Flüssigkeit, z. B. durch Quecksilber, gemessen werden; so sei

h' die Barometerhöhe für den inneren Druck p',

h'' die Barometerhöhe für den äußeren Druck p'',

H die Manometerhöhe, welche den Unterschied des inneren und äußeren Druckes mißt, sodaß $H = h' - h''$ ist,

W_1 das Gewicht der Volumeinheit des Quecksilbers; also 898,75 Pfund pro Kubikfuß bei der Temperatur null oder 895,72 Pfd. pro Kubikfuß bei der Temperatur von 15° R. = 18,75° C.

so hat man

$$p' = h' W_1 = (H - h'') W_1,$$

$$p'' = h'' W_1,$$

$$p' - p'' = (h' - h'') W_1 = H W_1;$$

mithin auch

$$\frac{p'}{p''} = \frac{h'}{h''} = 1 + \frac{H}{h''}.$$

Mit Hülfe dieser Formeln kann man die Höhen H und h'' oder auch h' und h'' anstatt der Pressungen p' und p'' in die obigen Formeln einführen.

Wenn der innere Druck p', wie es in den letzteren Paragraphen gewöhnlich angenommen wurde, nur wenig größer ist, als der äußere Druck p'', sodaß in dem Ausdrucke

$$\frac{p'}{p''} = 1 + \alpha = 1 + \frac{H}{h''}$$

α oder $\frac{H}{h''}$ ein kleiner echter Bruch ist; so hat man

$$\log \frac{p'}{p''} = 2{,}30258 \log. \text{vulg.} \frac{p'}{p''} \text{ sehr nahe } = \frac{H}{h''}.$$

§. 201. Geschwindigkeit des Stempels in der Triebröhre einer atmosphärischen Eisenbahn.

Die Resultate der letzteren Paragraphe finden eine unmittelbare Anwendung auf die Geschwindigkeit, welche der Stempel in der Triebröhre einer sogenannten atmosphärischen Eisenbahn annehmen wird, sobald man dabei die Wirkungen vernachlässigt, welche aus der Trägheit der in Bewegung gesetzten Körpermassen

hervorgehen, und welche dann umso bedeutender sind, je stärker die Geschwindigkeit dieser Bewegung variirt. Setzen wir nun aber voraus, der gedachte Stempel habe sofort beim Eintreten in die Triebröhre diejenige Geschwindigkeit erhalten, welche ihm an dieser Stelle der äußere Druck der atmosphärischen Luft würde mitgetheilt haben, wenn derselbe schon eine längere Zeit hindurch unter den nämlichen Verhältnissen auf den Stempel eingewirkt hätte; so wird die Variation der Geschwindigkeit dieses Stempels, welche alsdann nur noch von der zunehmenden Reibung der eindringenden Luft an den Wänden der Triebröhre und von den etwaigen Veränderungen des Druckes in dem Medium auf der entgegengesetzten Seite des Stempels herrühren kann, gering sein, und man wird unter dieser Voraussetzung umso mehr berechtigt sein, die Wirkung der Trägheit der bewegten Massen außer Acht zu lassen.

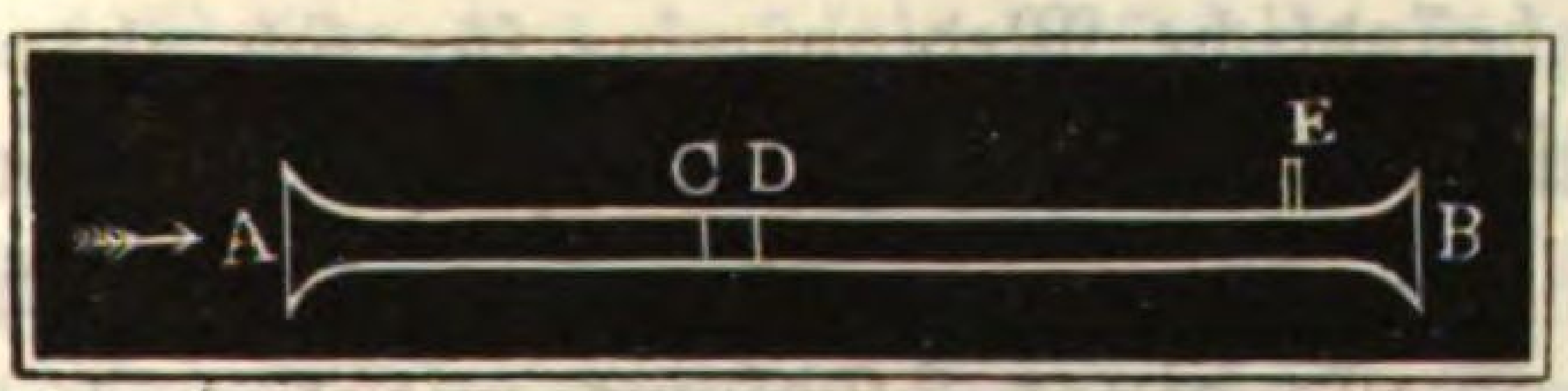
Demnach sei

p' der atmosphärische Druck außerhalb der Triebröhre, auf die Flächeneinheit,

P der Widerstand pro Flächeneinheit des Stempels, welchen die verschiedenen Reibungen an dem fortzuschaffenden Wagenzuge, sowie die Reibung des Stempels an den Röhrenwänden der Bewegung des Letzteren entgegensetzen,

q der Druck des in der Röhre auf entgegengesetzter Seite des Stempels befindlichen Mediums, auf die Flächeneinheit am Ende der Zeit t,

$p'' = P + q$ die Spannung, welche die Luftschicht unmittelbar vor dem Stempel besitzen muß, um die beiden vorstehenden Widerstände P und q zu überwinden,



O der Querschnitt der Triebröhre,

D der Durchmesser derselben,

L die ganze Länge AB derselben,

x der Abstand AC, in welchem sich der Stempel am Ende der Zeit t von der Einmündung in die Triebröhre befindet,

V die Geschwindigkeit des Stempels an demselben Orte zu derselben Zeit.

Da der in der vorderen Fläche des Stempels herrschende

Druck p'' nicht immer von dem äußeren Drucke p' nur um wenig verschieden sein wird; so darf man sich auch im Allgemeinen der auf diese Annahme gegründeten Näherungsformeln der letzteren Paragraphe nicht bedienen. Im Übrigen sind die Triebröhren der atmosphärischen Eisenbahnen an ihren Einmündungen in der Regel gehörig erweitert und abgerundet, sodaß die Luft ohne Kontraktion in dieselben treten kann. Unter diesen Umständen hat man nach Gl. (886) für die Geschwindigkeit des Stempels im Punkte C oder am Ende der Zeit t

$$V = \sqrt{\frac{2gk\log\frac{p'}{p''}}{1+2\varkappa\frac{x}{D}\frac{p''^2}{(p'^2-p''^2)}\log\frac{p'}{p''}}} \quad \ldots\ldots (918)$$

Behielte das auf der entgegengesetzten Seite des Stempels, also in dem Theile CB der Röhre befindliche Medium unter allen Umständen dieselbe konstante Spannung q; so würde in dem vorstehenden Ausdrucke

$$p'' = P + q \quad \ldots\ldots (919)$$

eine konstante Größe sein, da auch P eine solche ist.

Der Druck q auf der entgegengesetzten Seite des Stempels wird jedoch gewöhnlich mit der Zeit variiren, und zwar sind hierbei zwei Fälle zu unterscheiden: 1) wenn das jenseit des Stempels im Raume CB befindliche Medium eine für sich abgeschlossene Masse eines elastischen Fludiums ist, welche sich bei der fortschreitenden Bewegung des Stempels weder vermehrt, noch vermindert; 2) wenn die Masse dieses Fludiums mit der Zeit vermindert wird, wie Dies in der Wirklichkeit durch Luftpumpen E geschieht, welche selbst während der Bewegung des Stempels fortwährend wirksam bleiben, um den jenseit des Stempels befindlichen Raum möglichst zu verdünnen.

Im ersteren dieser beiden Fälle sei q_1 die Spannung des auf der entgegengesetzten Seite des Stempels befindlichen Mediums in dem Augenblicke, wo der Stempel bei A in die Röhre tritt, wo dieses Medium also die ganze Röhre AB ausfüllt. Sobald der Stempel bis C vorgerückt sein wird, ist die Masse des ge-

dachten Mediums auf den Raum CB von der Länge $L-x$ reduzirt worden. Demnach hat man

$$\frac{q_1}{q}=\frac{L-x}{L},$$

woraus

$$q=\frac{L-x}{L}\,q_1,$$

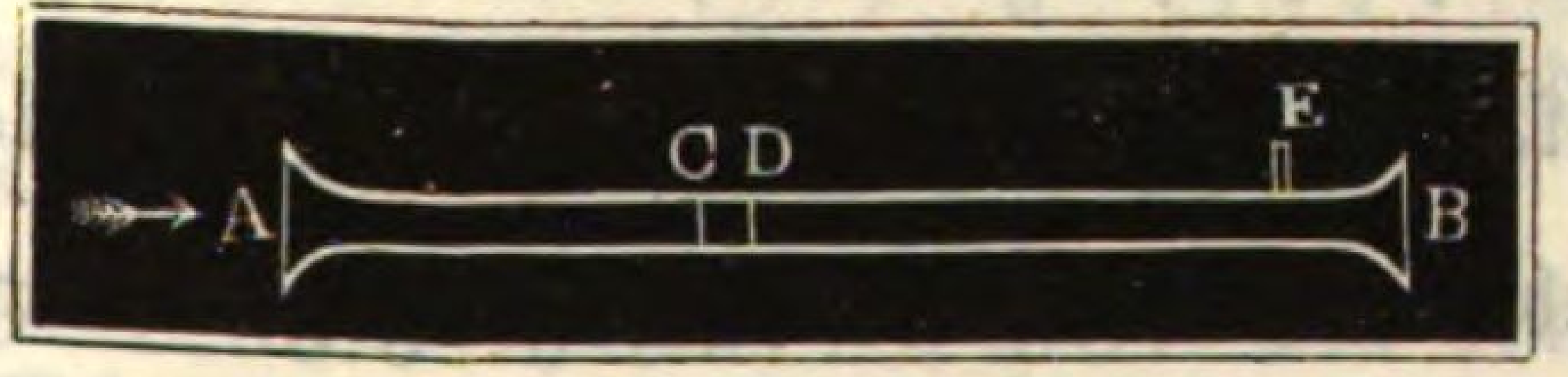
und somit für den am Ende der Zeit t am Stempel zu überwindenden Widerstand

$$p''=P+\frac{L-x}{L}\,q_1$$

folgt.

Substituirt man diesen Werth von p'' in Gl. (918); so erhält man die Geschwindigkeit des Stempels im Punkte C unter den angenommenen Bedingungen als eine Funktion des Abstandes $AC=x$.

Wäre dagegen bei E eine Luftpumpe wirksam, welche in jeder Zeiteinheit den gesammten jenseit des Stempels befindlichen Raum um das Volum A vergrößerte und dadurch das in CB enthaltene Medium entsprechend verdünnte; so hat man für



das Volum des jenseit des Stempels am Ende der Zeit t befindlichen Mediums $O(L-x)$, wobei die Spannung desselben q ist. Während nun in dem Zeitelemente dt der Stempel um $CD=dx$ weiterrückt, vermindert sich jenes Volum um Odx und vergrößert sich wegen der Luftpumpe E um $A\,dt$, sodaß das Volum jenes Mediums am Ende der Zeit $t+dt$ gleich $O(L-x)-Odx+Adt$ ist, während dessen Spannung in $q+dq$ übergegangen ist. Hiernach hat man aber

$$\frac{q}{q+dq}=\frac{O(L-x)-O\,dx+A\,dt}{O\,(L-x)},$$

woraus bei Unterdrückung der unendlich kleinen Glieder des zweiten Grades

$$\frac{dq}{q} - \frac{dx}{L-x} + \frac{A\,dt}{O(L-x)} = o \quad \ldots\ldots (921)$$

folgt. In dieser Gleichung sind q und x als Funktionen von t anzusehen. Man hat dieselbe mit Gl. (918) zu verbinden, um von den drei Größen V, x, t irgend Eine durch irgend eine andere auszudrücken. Dabei hat man nur zu bemerken, daß $V = \frac{dx}{dt}$ und daß $p'' = P + q$, also auch $dp'' = dq$ ist.

Wollte man die weitläuftigen Operationen vermeiden, welche mit der Elimination der Veränderlichen aus den beiden Gleichungen (921) und (918) verbunden sein würden, und sich mit einem Näherungswerthe begnügen; so könnte man, wenn man in Gl. (921) x als die unabhängig Veränderliche ansieht und demgemäß

$$\frac{dq}{q} - \frac{dx}{L-x} + \frac{A}{O(L-x)}\,\frac{dt}{dx}\,dx = o$$

schreibt, hierin für $\frac{dx}{dt}$ irgend einen leicht zu bestimmenden Mittelwerth der Geschwindigkeit V substituiren. Einen solchen Mittelwerth, welchen wir mit V_1 bezeichnen wollen, würde man z. B. erhalten, wenn man in Gl. (918) $x = \frac{L}{2}$ und $p'' = q_1$ substituirte. Hierdurch würde aber die vorstehende Bedingungsgleichung

$$\frac{dq}{q} - \left(1 - \frac{A}{OV_1}\right)\frac{dx}{L-x} = o$$

werden, woraus

$$\int_{q_1}^{q}\frac{dq}{q} = \left(1 - \frac{A}{OV_1}\right)\int_{o}^{x}\frac{dx}{L-x}$$

oder

$$\log\frac{q}{q_1} = \left(1 - \frac{A}{OV_1}\right)\log\frac{L}{L-x}$$

mithin

$$q = q_1\left(\frac{L}{L-x}\right)^{1-\frac{A}{OV_1}}$$

folgt. Diesemnach ist

$$p'' = \mathrm{P} + q_1 \left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L} - x}\right)^{1 - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{O}V_1}} \quad \ldots \; (922)$$

ein Werth, welchen man statt p'' in Gl. (918) einzuführen hat, um die Geschwindigkeit V zu berechnen, welche der Stempel im Abstande AC $= x$ von der Einmündung in die Triebröhre besitzt.

Vibrationen einer elastischen Flüssigkeitssäule. – Fortpflanzung des Schalles in engen Röhren.

§. 202. **Allgemeine Gleichungen für die Geschwindigkeit und Dichtigkeit in den verschiedenen Punkten einer bewegten Luftsäule.**

Als eine interessante Anwendung der in §. 55 entwickelten allgemeinen Gleichungen für die Bewegung einer Flüssigkeit wollen wir im Nachstehenden die Vibrationen einer Luftsäule betrachten, welche durch irgend eine Ursache in Bewegung gebracht ist. Um die Untersuchung nicht zu sehr zu verwickeln, nehmen wir an, diese Säule habe eine geradlinige Axe und einen konstanten ungemein kleinen Querschnitt. Außerdem vernachlässigen wir die Wirkung der Schwere und eine etwaige Reibung an den Wänden der Röhre, in welcher die Luftmasse vibrirt.

Messen wir die Abszissen s von irgend einem festen Punkte A der Axe jener Röhre; so sei am Ende der Zeit t

μ, p, v resp. die Dichtigkeit, der Druck und die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Punkte M, für welchen AM $= s$ ist,

μ', p', v' resp. diese Größen im Punkte A, für welchen $s = s' = o$ ist,

ω der konstante Querschnitt der Röhre.

Bezieht man die allgemeine Gleichung (234) auf die zwischen A und M liegende flüssige Masse, für welche man $s' = o$ und $s'' = s$ hat; so erhält man unter den oben angegebenen Abkürzungen

$$\omega p' v' - \omega p v - \int_o^s \frac{\omega p}{\mu} \frac{d\mu}{dt} ds - \int_o^s \frac{\omega p v}{\mu} \frac{d\mu}{ds} ds$$

$$= \int_o^s \mu \omega v \frac{dv}{dt} ds + \int_o^s \mu \omega v^2 \frac{dv}{ds} ds.$$

Wenn man diese Gleichung in Beziehung zu s differenziirt und dabei beachtet, daß die Größe $\omega p' v'$, welche sich auf den festen Ort bei A bezieht, von s unabhängig ist; so ergibt sich nach geschehener Division mit der konstanten Größe ωds

$$-\frac{d(pv)}{ds} - \frac{p}{\mu}\frac{d\mu}{dt} - \frac{pv}{\mu}\frac{d\mu}{ds} = \mu v \frac{dv}{dt} + \mu v^2 \frac{dv}{ds} \quad \ldots \text{(923)}$$

Mit dieser Gleichung ist die Bedingungsgleichung (235) für die Kontinuität der Flüssigkeit, welche bei Division mit ω

$$\frac{d\mu}{dt} + \frac{d(\mu v)}{ds} = o$$

oder

$$\frac{d\mu}{dt} + v\frac{d\mu}{ds} + \mu\frac{dv}{ds} = o \quad \ldots \text{(924)}$$

ergibt, zu verbinden. Substituirt man den hieraus für $\frac{d\mu}{dt}$ sich ergebenden Werth $-\left(v\frac{d\mu}{ds} + \mu\frac{dv}{ds}\right)$ in Gl. (923), indem man auch das Glied $\frac{d(pv)}{ds}$ in $p\frac{dv}{ds} + v\frac{dp}{ds}$ entwickelt; so reduzirt sich jene erstere Gleichung nach Division mit v auf

$$\frac{dp}{ds} = \mu\frac{dv}{dt} + \mu v\frac{dv}{ds} = o \quad \ldots \text{(925)}$$

Nehmen wir die Flüssigkeit als vollkommen elastisch an; so hat man

$$p = gk\mu = a^2\mu, \quad \ldots \text{(926)}$$

worin a^2 einfach für gk gesetzt ist. Hierdurch geht Gl. (925) über in

$$a^2 \frac{d\mu}{ds} + \mu \frac{dv}{dt} + \mu v \frac{dv}{ds} = o \quad \ldots . (927)$$

Beschränken wir die gegenwärtige Untersuchung auf diejenigen Fälle, wo der partielle Differenzialkoeffizient in Beziehung zu s sowol von der Dichtigkeit μ, wie von der Geschwindigkeit v nur einen geringen Werth hat im Vergleich zu dem partiellen Differenzialkoeffizienten jener Größen in Beziehung zu t, oder wo sich die Dichtigkeit und Geschwindigkeit weit schwächer bei einem Fortschritte von Punkt zu Punkt der Röhre am Ende einer gewissen Zeit t, als bei einem Fortschritte von Zeitmoment zu Zeitmoment am Ende einer gewissen Abszisse s verändert, wie Dies bei den schallerzeugenden Schwingungen der Luft in der That stattfindet; so kann man mit Moseley*) aus Gl. (924) das in $\frac{d\mu}{ds}$ multiplizirte und aus Gl. (927) das in $\frac{dv}{ds}$ multiplizirte Glied resp. gegen das Glied $\frac{d\mu}{dt}$ und $\frac{dv}{dt}$ vernachlässigen, und Dies umso mehr, da jene Glieder noch mit dem ebenfalls kleinen Faktor v behaftet sind. Hierdurch erhält man einfach

$$\frac{a^2}{\mu} \frac{d\mu}{ds} = -\frac{dv}{dt}, \quad \ldots . (928)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt} = -\frac{dv}{ds} \quad \ldots . (929)$$

Um die Integration dieser Gleichungen zu bewirken, schreibe man dieselben

$$a^2 \frac{d(\log \mu)}{ds} = -\frac{dv}{dt},$$

$$\frac{d(\log \mu)}{dt} = -\frac{dv}{ds}.$$

Differenziirt man die erste dieser beiden Gleichungen in Beziehung zu t und die zweite in Beziehung zu s; so ergeben dieselben

---

*) A treatise on hydrostatics and hydrodynamics. P. 267.

$$a^2 \frac{d^2 (\log \mu)}{ds\,dt} = -\frac{d^2 v}{dt^2},$$

$$\frac{d^2 (\log \mu)}{ds\,dt} = -\frac{d^2 v}{ds^2},$$

und wenn man die beiden für $\frac{d^2 (\log \mu)}{ds\,dt}$ hieraus folgenden Werthe einander gleich setzt,

$$a^2 \frac{d^2 v}{ds^2} = \frac{d^2 v}{dt^2} \quad \ldots . (930)$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung, worin $\frac{d^2 v}{ds^2}$ und $\frac{d^2 v}{dt^2}$ die zweiten partiellen Differenzialkoeffizienten von v resp. in Beziehung zu s und zu t darstellen, ist eine Reihe beliebig vieler Glieder von der Form

$$A e^{ms+nt};$$

worin e die Basis der natürlichen Logarithmen, A einen willkürlichen konstanten Koeffizienten, der in den einzelnen Gliedern verschieden sein kann, und m, n ebenfalls willkürliche konstante Größen, welche jedoch der Bedingung

$$a^2 m^2 = n^2$$

entsprechen müssen, bezeichnen*) Da nach dieser letzteren Bedingung

$$n = \mp am$$

sein muß; so kann man setzen

$$v = \Sigma A e^{m(s-at)} + \Sigma B e^{n(s+at)}, \quad \ldots . (931)$$

worin A, B, m, n ganz willkürliche, voneinander unabhängige konstante Größen und Σ eine Summe beliebig vieler Glieder der obigen Form darstellen.

---

*) Vergl. Navier, Résumé des leçons d'analyse. Deuxième année. No. 487.

Wegen der Willkürlichkeit in der Wahl der Größen A, B, m, n leuchtet ein, daß $\Sigma \mathrm{A} e^{m(s-at)}$ und $\Sigma \mathrm{B} e^{n(s+at)}$ eine jede beliebige Funktion resp. von $(s-at)$ und $(s+at)$ vertreten kann. Bezeichnet man diese Funktionen resp. mit F und f; so kann man schreiben

$$v = \mathrm{F}(s-at) + f(s+at) \quad \ldots \quad (932)$$

Die in diesen Funktionen oder auch in Gl. (931) enthaltenen konstanten Größen werden in jedem besonderen Falle durch die Bedingung zu bestimmen sein, daß der Zustand der Bewegung der Luftsäule am Ende einer gegebenen Zeit in jedem Punkte der Röhre ein bestimmter sei.

Was den Werth der Dichtigkeit μ der Flüssigkeit im Abstande s und am Ende der Zeit t betrifft; so hat man nach Gl. (932), wenn man den ersten Differenzialkoeffizienten der Funktion $\mathrm{F}(s-at)$ in Beziehung zu $(s-at)$ mit $\mathrm{F}'(s-at)$ und den von $f(s+at)$ in Beziehung zu $s+at$ mit $f'(s+at)$ bezeichnet,

$$\frac{dv}{dt} = -a\mathrm{F}'(s-at) + af'(s+at).$$

Substituirt man diesen Werth für $\frac{dv}{dt}$ in Gl. (928); so kommt

$$a\frac{d(\log \mu)}{ds} = \mathrm{F}'(s-at) - f'(s+at).$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit ds und integrirt alsdann in Beziehung zu s; so erhält man, da $\int \mathrm{F}'(s-at).ds = \mathrm{F}(s-at)$ und $\int f'(s+at).ds = f(s+at)$ ist,

$$a \log \mu = \mathrm{F}(s-at) - f(s+at) + \mathrm{C} \quad \ldots \quad (933)$$

Da diese Integration nur in Beziehung zu s stattfindet; so fragt es sich, ob die unter dem Zeichen C hinzugefügte Größe, welche in Beziehung zu s eine Konstante sein muß, nicht etwa die Veränderliche t enthalten könne. Um Dies zu entscheiden; so differenziiren wir die vorstehende Gleichung für t. Dies ergibt

$$a\frac{d(\log\mu)}{dt} = -a\mathrm{F}'(s-at) - af'(s+at) \cdot + \frac{d\mathrm{C}}{dt}.$$

Nach Gl. (929) muß aber $\frac{d(\log\mu)}{dt} = -\frac{dv}{ds}$, d. i. wegen Gl. (932)

$$\frac{d(\log\mu)}{dt} = \mathrm{F}'(s-at) + f'(s+at)$$

sein. Aus dieser und der vorhergehenden Gleichung folgt aber

$$\frac{d\mathrm{C}}{dt} = o,$$

$$\text{also } \mathrm{C} = \text{const.}$$

Demnach ist C eine Konstante sowol in Beziehung zu s, wie zu t. Um ihren Werth zu bestimmen; so nehmen wir an, die Dichtigkeit der Flüssigkeit sei im Anfangspunkte der Abszissen und der Zeit $= \mu_1$, sodaß man $\mu = \mu_1$ für $s = o$ und $t = o$ haben müsse. Dies ergibt nach Gl. (933)

$$\mathrm{C} = a\log\mu_1 - \mathrm{F}(o) + f(o),$$

wodurch jene Gleichung in

$$a\log\frac{\mu}{\mu_1} = \mathrm{F}(s-at) - f(s+at) - \mathrm{F}(o) + f(o) \quad \ldots . \ (934)$$

übergeht.

Nach der Bezeichnung in Gl. (831) würde man offenbar $\mathrm{F}(o) = \Sigma\mathrm{A}$, $f(o) = \Sigma\mathrm{B}$, also

$$a\log\frac{\mu}{\mu_1} = \Sigma\mathrm{A}e^{m(s-at)} + \Sigma\mathrm{B}e^{n(s+at)} - \Sigma\mathrm{A} + \Sigma\mathrm{B} \quad \ldots . \ (935)$$

haben.

Setzt man

$$\mu = (1+\delta)\mu_1$$

und nimmt an, die Dichtigkeit μ an irgend einem Orte und zu irgend einer Zeit weiche nur wenig von der Dichtigkeit μ_1 im Anfangspunkte der Abszissen und der Zeit ab, sodaß δ stets einen

kleinen echten Bruch darstellt, wie es bei den Vibrationen einer Luftsäule in der That stattfindet; so kann man

$$\log \frac{\mu}{\mu_1} = \log(1+\delta) \text{ sehr nahe } = \delta$$

und demnach

$$a\delta = F(s-at) - f(s+at) - F(o) + f(o) \quad \ldots . (936)$$

setzen.

§. 203. Diskussion der allgemeinen Gleichungen des vorstehenden Paragraphs. — Fortpflanzung der Bewegung. — Koexistenz verschiedener Systeme von Bewegungen.

An die Gleichungen (932) und (936) knüpfen sich folgende Betrachtungen. Die Differenzialgleichungen (928) und (929), welche die allgemeinsten Bedingungen für die veränderliche Bewegung einer elastischen Flüssigkeitssäule unter den gemachten Voraussetzungen enthalten, werden erfüllt, wenn man der Geschwindigkeit v nur den ersten Theil der Gleichung (932) als Werth beilegt, indem man also

$$v = F(s-at) \quad \ldots . (937)$$

setzt. Wäre die Funktion F, welche sonst einen ganz beliebigen Typus haben kann, von der Art, daß man $F(o) = o$ hätte; so würde nach Gl. (936) gleichzeitig

$$a\delta = F(s-at) = v \quad \ldots . (938)$$

sein.

Die Formel (937) gibt den Werth der Geschwindigkeit v an, welche ein Massentheilchen im Abstande s vom Anfangspunkte der Abszissen am Ende der Zeit t besitzt. Da $s-at=s+a\tau-a(t+\tau)$ ist, worin τ einen beliebigen Zeitabschnitt, vom Ende der Zeit t an gerechnet, bezeichnen soll; so hat man auch

$$v = F[s+a\tau - a(t+\tau)].$$

Da dieser Werth von v mit dem aus Gl. (937) vollkommen übereinstimmt; so ersieht man, daß dieselbe Geschwindigkeit v, welche am Ende der Zeit t im Abstande s stattfindet, am Ende

der Zeit $t+\tau$ im Abstande $s+a\tau$ stattfinden wird, daß also irgend ein augenblicklicher Zustand der Bewegung der ganzen Luftsäule in der Zeit τ um den Raum $a\tau$ oder in der Zeiteinheit um den Raum a fortrückt. Diese Erscheinung nennt man die Fortpflanzung der Bewegung. So willkürlich nun auch die Konstitution der Funktion F sein mag, die Größe der Fortpflanzung der Bewegung in der Zeiteinheit beträgt immer die konstante Größe a. Nach Gl. (926) hat man

$$a=\sqrt{gk}=\sqrt{2g.\frac{1}{2}k} \quad . \; . \; . \; . \; (939)$$

Wenn w das Gewicht einer Volumeinheit der als schwer gedachten Flüssigkeit und p den Druck derselben auf die Flächeneinheit bezeichnet; so hat man bekanntlich $p=kw$. Denkt man sich eine vertikale Säule derselben Flüssigkeit, deren Querschnitt gleich der Flächeneinheit ist; so stellt p auch das Gewicht dieser ganzen Säule dar; k ist mithin gleich der Höhe, welche jene Säule einnehmen würde, wenn sie überall dieselbe Dichtigkeit besäße, oder wenn sie durch die Wirkung der Schwere in ihren unteren Theilen nicht komprimirt würde. Bei atmosphärischer Luft an der Oberfläche der Erde würde also k die Höhe bezeichnen, welche die Atmosphäre einnehmen müßte, wenn sie überall die Dichtigkeit der unteren Schichten besäße und dabei die hier herrschende Spannung darbieten sollte. Nach der vorstehenden Gleichung (939) würde demnach die Fortpflanzungsgeschwindigkeit a gleich der Geschwindigkeit sein, welche ein Körper durch den freien Fall von der Hälfte der Höhe k annehmen würde. Setzt man nach Gl. (779) bei einer Temperatur der Luft von 16° Celsius $k=25343(1+0{,}00366.16)=26827$ Fuß; so wird

$$a=\sqrt{gk}=916 \text{ Fuß.}$$

Diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung, welche, wie wir weiter unten sehen werden, auch der Schallgeschwindigkeit entspricht, ist bei den in der Wirklichkeit angestellten Versuchen von Arago und Humboldt unter der nämlichen mittleren Temperatur der Luft von 16° zu 1086 Fuß gefunden worden. Der zwischen dieser Zahl und dem obigen Werthe von a

bestehende Unterschied hat seine vornehmlichste Ursache wol in dem Umstande, daß bei einer plötzlichen Verdichtung eines elastischen Fluidums, wie sie bei der Schallbewegung stattfindet, stets eine gewisse Menge Wärme frei wird, welche bei einer später erfolgenden Verdünnung, wodurch Wärme gebunden wird, nicht in dem Maaße und so rasch wieder absorbirt wird, daß sich dadurch nicht das Verhältniß zwischen dem Drucke p und der Dichtigkeit μ änderte und im Durchschnitte für den Koeffizienten k einen etwas größeren Werth lieferte, als vorhin angenommen ist.

Man erkennt allgemein, daß alle Ursachen, welche den Werth des Koeffizienten k vergrößern oder verkleinern, auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit a in dem Verhältnisse der Quadratwurzel aus k resp. vergrößern oder verkleinern, sodaß in den spezifisch leichteren Flüssigkeiten, für welche k nach Gl. (780) größer wird, auch jene Geschwindigkeit sich vermehrt, und umgekehrt. In Ein und derselben Flüssigkeit ist übrigens die Fortpflanzungsgeschwindigkeit a von dem Werthe der mittleren Dichtigkeit ganz unabhängig, sodaß sich z. B. der Schall in den oberen Regionen unserer Atmosphäre, wo die Luft dünner ist, ebenso rasch fortpflanzen würde, wie in den unteren, vorausgesetzt, daß überall der Quotient $\frac{p}{w}$ den konstanten Werth k habe.

Setzt man in der Gl. (937) statt der Funktion F eine beliebige Menge willkürlich zusammengesetzter Funktionen der Größe $(s-at)$; so stellt eine jede dieser Funktionen ein besonderes System von partiellen Bewegungen dar, von welchen die wirkliche Geschwindigkeit v irgend eines Massentheilchens die mittlere Resultante ist. Alle diese Systeme durchdringen sich, ohne von einander gestört zu werden, indem sich ein jedes derselben mit derselben Geschwindigkeit a fortpflanzt, alswenn die übrigen Systeme gar nicht vorhanden wären.

Enthielte die Funktion F in Gl. (937) ein konstantes Glied C, welches offenbar $= \mathrm{F}(o)$ sein müßte; so würde Dies dem Falle entsprechen, wo die ganze Luftsäule neben der übrigen relativen Bewegung ihrer Theile eine gleichförmige Geschwindigkeit C in der Richtung der Axe der Röhre besäße. Dieser Zustand würde einen Luftstrom darstellen, dessen Bewegung in der posi-

tiven Richtung der Abszissen stattfände, wenn C positiv wäre, und in direkt entgegengesetzter Richtung, wenn C negativ wäre. In beiden Fällen würde die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der durch F dargestellten Bewegung die nämliche sein, und man erkennt, wie sich der Schall in der Luft gegen einen Windstrich ebenso rasch und in derselben Art fortpflanzt, wie mit dem Winde. Die Erfahrung lehrt sogar, daß das Letztere selbst dann noch näherungsweise stattfindet, wenn die Luftmasse, welche der Schall durchdringt, in irgend einer beliebigen Bewegung begriffen ist. Wir dürfen dieses Resultat jedoch nicht aus der Formel (937) schließen, weil dieselbe nach dem vorhergehenden Paragraphe auf die besondere Voraussetzung gegründet ist, daß die Veränderlichkeit der Bewegung und Dichtigkeit der einzelnen Lufttheilchen beim Fortschritte vom Anfangspunkte der räumlichen Abszissen weit geringer sei, als beim Fortschritte vom Anfangspunkte der Zeit, sodaß man $\frac{dv}{ds}$ und $\frac{d\mu}{ds}$ resp. gegen $\frac{dv}{dt}$ und $\frac{d\mu}{dt}$ vernachlässigen konnte.

Betrachten wir jetzt die Gl. (938), welche, wenn $F(o) = o$ ist, oder wenn die Funktion $F(s-at)$ kein konstantes Glied enthält,

$$a\delta = v = F(s-at)$$

ist; so sehen wir, daß sich die Dichtigkeit in den verschiedenen Punkten der Flüssigkeit in der positiven Richtung der Axe der Röhre gerade so mit der Zeit fortpflanzt, wie Dies die Geschwindigkeit v thut, und daß der Grad der Verdichtung oder Verdünnung in irgend einem Punkte der daselbst herrschenden Geschwindigkeit proportional sein wird. Wenn v positiv ist, ist es auch δ, und wenn v negativ ist, ist auch δ negativ. Hieraus folgt, daß wenn die Geschwindigkeit v eines Lufttheilchens nach der positiven Seite der Axe der Röhre gerichtet ist, in dem Orte dieses Theilchens eine Verdichtung der Luft, und wenn die Geschwindigkeit v nach direkt entgegengesetzter Seite der Axe der Röhre gerichtet ist, daselbst eine Verdünnung der Luft stattfindet, wobei diejenige Dichtigkeit der Luft als die mittlere μ_1 angesehen ist, welche im Anfangspunkte der Abszissen und im Anfangspunkte der Zeit stattfand. Die letzteren Beziehungen zwischen der Dich-

tigkeit und der Geschwindigkeit haben übrigens nur unter der Voraussetzung Gültigkeit, daß die Fortpflanzung der Bewegung in der positiven Richtung der Abszissen stattfinde, für welchen Zustand nur allein die Formeln (937) und (938) gelten.

Nehmen wir jetzt an, der Zustand der Bewegung der Luftsäule sei von der Art, daß die Geschwindigkeit v nur durch den zweiten Theil der rechten Seite von Gl. (932) ausgedrückt werde, daß man also

$$v = f(s + at) \quad \ldots \quad (940)$$

und demnach (wenn die Funktion f kein konstantes Glied enthält oder $f(o) = o$ ist) wegen Gl. (936)

$$a\delta = -f(s + at) = -v \quad \ldots \quad (941)$$

habe.

Schlägt man bei der Diskussion dieser Gleichungen einen ähnlichen Gang ein, wie vorhin bei den Gleichungen (937) und (938); so leuchtet ein, da $s + at = s - a\tau + a(t + \tau)$ ist, daß der Werth von v aus Gl. (940) auch

$$v = f[s - a\tau + a(t + \tau)]$$

sein wird. Hieraus erkennt man leicht, daß sich die in Rede stehende Bewegung mit der konstanten Geschwindigkeit a nach der **negativen** Seite der Abszissenaxe von Punkt zu Punkt ebenso fortpflanzt, wie Dies von der durch Gl. (937) dargestellten Bewegung in der Richtung der **positiven** Abszissen geschah. Demnach stellt die allgemeine Gl. (932) einen Inbegriff von beliebig vielen Systemen der Bewegung dar, welche sich selbstständig mit der nämlichen Geschwindigkeit nach beiden Seiten der Abszissenaxe fortpflanzen.

Die Gl. (941) lehrt, daß bei den zuletzt betrachteten Arten von Bewegung die Verdichtung oder Verdünnung zwar ebenfalls der Geschwindigkeit v in irgend einem Punkte proportional ist, und sich ebenso, wie diese Geschwindigkeit, nach der negativen Richtung der Abszissen fortpflanzt, daß jedoch an den Stellen **Verdichtung** stattfindet, wo v **negativ** ist oder wo die Bewegung in der negativen Richtung der Abszissen erfolgt, während an solchen Stellen **Verdünnung** herrscht, wo v positiv ist oder

wo sich die Massentheilchen momentan nach der positiven Seite der Abszissenaxe bewegen.

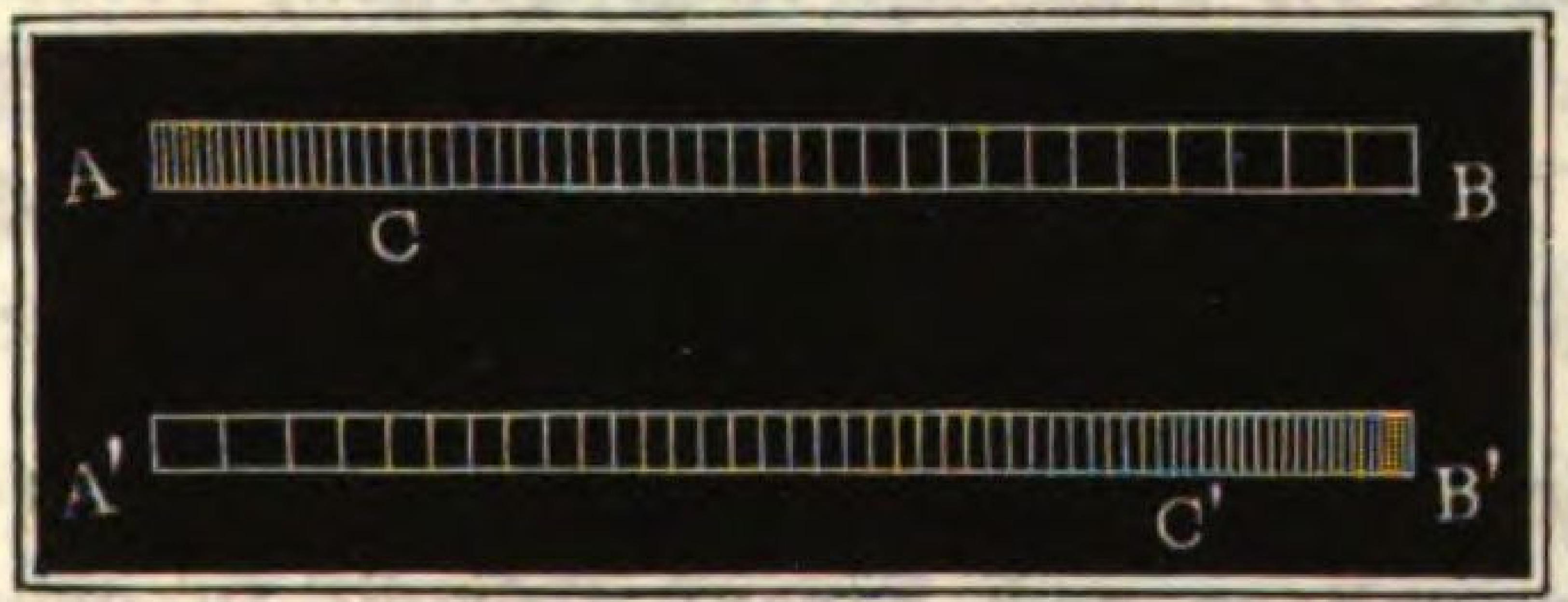
Aus der Zusammenfassung der aus den Gleichungen (937) und (938) und der aus den Gleichungen (940) und (941) gewonnenen Resultate kann man sich die Erscheinung erklären, nach welcher ein Körper, z. B. ein Stempel, in der obigen Röhre durch eine einfache Bewegung nach Ein und derselben, z. B. der positiven Seite der Abszissen, in einer Luftsäule zugleich Fortpflanzung der Bewegung nach zwei direkt entgegengesetzten Richtungen mit der nämlichen Geschwindigkeit a des Schalles hervorbringen kann. Denn bei einer solchen Bewegung des Stempels entsteht vor demselben allmählig eine Verdichtung, welche, da hier v in den ersten Augenblicken positiv ist, ein System von der Form $v = F(s - at)$ erzeugt und zu einer Fortpflanzung in positiver Richtung Veranlassung gibt. Bei derselben Bewegung des Stempels entsteht übrigens hinter demselben allmählig Verdünnung, welche, da alsdann v in den ersten Augenblicken negativ ist, ein System von der Form $v = f(s + at)$ erzeugt und zu einer Fortpflanzung in negativer Richtung Veranlassung gibt.

§. 204. Gleichungen für die Vibrationen einer Luftsäule.

Betrachten wir jetzt die Bewegungen einer Luftsäule, welche in einer engen, an beiden Enden verschlossenen Röhre enthalten ist. Es leuchtet ein, daß die Theilchen der Flüssigkeit, welche unmittelbar an den beiden Endflächen der Röhre liegen, zu keiner Zeit irgend eine Bewegung annehmen können, sondern stets in Ruhe bleiben müssen: denn eine Bewegung in der Richtung von innen nach außen ist wegen der festen Wände an den Enden der Röhre unmöglich, und eine Bewegung von außen nach innen kann ebenfalls nie eintreten, weil sonst zwischen den Endflächen der Flüssigkeit und den festen Wänden der Röhre ein leerer Raum entstehen würde, in welchem der Druck null herrschte, was jedoch deshalb unmöglich ist, weil bei einem Drucke gleich null die Dichtigkeit der als vollkommen elastisch vorausgesetzten Flüssigkeit unendlich klein werden und somit die kleinste Menge dieser Flüssigkeit den größten Raum, folglich auch den Raum bis an die Röhrenwand erfüllen würde.

Zu der vorstehenden Bedingung fügen wir noch die folgende, daß nämlich am Ende einer gewissen Zeit, z. B. für $t = o$, die Geschwindigkeit sämmtlicher Theilchen der Flüssigkeit gleich null sei. Es versteht sich jedoch von selbst, daß zu dieser Zeit nicht etwa auch der Druck oder die Dichtigkeit in allen Punkten der Röhre gleich groß sei, weil sonst die Flüssigkeit in einem Zustande des Gleichgewichtes sich befinden und überall keine Bewegung annehmen würde. Vielmehr wird vorausgesetzt, daß in jenem Augenblicke, wo die Geschwindigkeit aller Massentheilchen momentan null sein soll, in den verschiedenen Punkten beliebige, aber nicht überall dieselben, Dichtigkeiten herrschen. Einen solchen Zustand würde man z. B. erhalten, wenn man sich denkt, die Röhre stehe vertikal, und die darin enthaltene elastische Flüssigkeit sei schwer. Wenn sich Alles im Gleichgewichte befindet, werden die unteren Schichten stärker komprimirt sein, als die oberen, und die Geschwindigkeit aller Massentheilchen ist null. Denkt man sich nun, die gesammte in der vertikalen Röhre enthaltene Flüssigkeit werde plötzlich der Eigenschaft der Schwere beraubt, sodaß nunmehr keine weiteren Kräfte auf die Theilchen wirken, als die inneren Spannungen; so tritt augenblicklich Bestreben zur Bewegung ein, und man hat einen Zustand, welcher den obigen Bedingungen vollkommen entspricht.

Legen wir nun für den Ausdruck der Geschwindigkeit v, welche die Lufttheilchen im Abstande s von dem Einen Endpunkte A der Röhre am Ende der Zeit t besitzen, die allgemeine Formel (931) zu Grunde, indem wir



$$v = \Sigma A e^{m(s-at)} + \Sigma B e^{n(s+at)} \quad \ldots . (942)$$

setzen.

Bezeichnet man die Länge AB der Röhre mit L; so muß zu allen Zeiten, also für alle Werthe von t, die Geschwindigkeit v sowol für $s = o$, wie für $s = L$ null sein, d. h. man muß haben

$$\Sigma A e^{-mat} + \Sigma B e^{nat} = o \quad \ldots . (943)$$

und

$$\Sigma A e^{m(L-at)} + \Sigma B e^{n(L+at)} = o \quad \ldots . (944)$$

Setzt man in der letzteren Gleichung $e^{m(L-at)} = e^{mL}e^{-mat}$ und $e^{m(L+at)} = e^{mL}e^{mat}$; so wird dieselbe

$$\Sigma A e^{mL} . e^{-mat} + \Sigma B e^{nL} . e^{nat} = o \quad \ldots . (945)$$

Eine Vergleichung dieser Formel mit Gl. (943) lehrt, daß hier überall Ae^{mL} und Be^{nL} resp. an die Stelle von A und B getreten ist. Könnte man nun für m und n solche Werthe substituiren, welche, trotz ihrer Willkürlichkeit, doch im Stande wären, der Größe e^{mL} und e^{nL} Ein und denselben konstanten Werth zu ertheilen; so würde man, weil alsdann $Ae^{mL} = A$ und $Be^{nL} = B$ wäre, nur die Bedingungsgleichung (943) zu erfüllen brauchen, um gleichzeitig auch der Gl. (944) ein Genüge zu thun. Man erkennt aber, daß wenn m und n willkürlich bleiben sollen, keine reellen Werthe für diese Exponenten werden fähig sein, den Größen e^{mL} und e^{nL} einen konstanten Werth zu verleihen. Das Letztere ist jedoch möglich, wenn man für m und n imaginäre Werthe einführt. Denn da man allgemein $e^{mL\sqrt{-1}} = \cos(mL) + \sin(mL).\sqrt{-1}$ hat; so brauchte man z. B. nur $mL = 2i\pi$ oder $m = \frac{2i\pi}{L}$ zu setzen, worin i jede beliebige ganze positive oder negative Zahl, die Null mit eingeschlossen, bedeutet, um für $e^{mL\sqrt{-1}} = e^{2i\pi\sqrt{-1}}$ stets den konstanten Werth $\cos(2i\pi) + \sin(2i\pi).\sqrt{-1} = +1$ zu erhalten, wie willkürlich man auch die Größe i zwischen den ganzen Zahlen variiren ließe.

Neben der Substitution eines solchen Werthes für die Exponenten m und n hätte man dann noch darauf Bedacht zu nehmen, der Gleichung (942) ein Genüge zu leisten, aus welcher sich noch gewisse Beziehungen ergeben würden, in welchen die Werthe der einzelnen Koeffizienten A . . . ., B . . . ., zueinander und zu den Werthen der für i zuzulassenden Zahlen stehen müßten. Die Auffindung dieser Beziehungen wird erleichtert, indem man unmittelbar in Gl. (942) statt m und n die imaginären Ausdrücke $m\sqrt{-1}$ und $n\sqrt{-1}$ einführt, und nach bekannten Formeln der Analysis

$$e^{m(s-at)\sqrt{-1}} = \cos m(s-at) + \sin m(s-at).\sqrt{-1}$$
$$= \cos ms.\cos mat + \sin ms.\sin mat$$
$$+ (\sin ms.\cos mat - \cos ms.\sin mat)\sqrt{-1},$$
$$e^{m(s+at)\sqrt{-1}} = \cos m(s+at) + \sin m(s+at).\sqrt{-1}$$
$$= \cos ms.\cos mat - \sin ms.\sin mat$$
$$+ (\sin ms.\cos mat + \cos ms.\sin mat)\sqrt{-1}$$

setzt.

Jetzt ist leicht zu erkennen, daß ein jedes einzelne Glied auf der rechten Seite der beiden vorstehenden Ausdrücke, wenn es noch mit irgend einem willkürlichen konstanten Faktor multiplizirt wird, für sich allein im Stande ist, der ursprünglichen Differenzialgleichung (930), deren allgemeines Integral die Form (942) hat, ein Genüge zu leisten. Denn ein jedes der fraglichen Glieder ist das Produkt eines Sinus oder Kosinus von ms in den Sinus oder Kosinus von mat. Da aber allgemein

$$\sin x = \frac{1}{2}(e^{-x\sqrt{-1}} - e^{x\sqrt{-1}})\sqrt{-1},$$

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})$$

ist; so hat man z. B.

$$\cos ms.\cos mat = \frac{1}{2}(e^{ms\sqrt{-1}} + e^{-ms\sqrt{-1}}).\frac{1}{2}(e^{mat\sqrt{-1}} + e^{-mat\sqrt{-1}})$$

$$= \frac{1}{4}[e^{m(s+at)\sqrt{-1}} + e^{m(s-at)\sqrt{-1}} + e^{-m(s-at)\sqrt{-1}} + e^{-m(s+at)\sqrt{-1}}],$$

ein Ausdruck, welcher noch mit einem willkürlichen Faktor A multiplizirt werden kann und gleichwol der Form des allgemeinen Integrals (942) entspricht.

Hiernach kann man anstatt der Gl. (942) auch setzen

$$v = \Sigma A \sin ms.\sin mat + \Sigma B \sin ns.\cos nat$$
$$+ \Sigma C \cos ps.\sin pat + \Sigma D \cos qs.\cos qat, \quad \ldots . (946)$$

worin sowol A, B, C, D, wie m, n, p, q ganz willkürliche Größen bezeichnen, welche nur in Beziehung zu s und t konstant sein müssen.

Da der Werth der Geschwindigkeit v zu allen Zeiten für $s=o$ ebenfalls gleich null werden muß, die in $\sin ms$ oder $\sin ns$ multiplizirten Glieder aber für $s=o$ sämmtlich verschwinden, während die in $\cos ps$ und $\cos qs$ multiplizirten Glieder Funktionen von t bleiben; so hat man zuvörderst die letzteren Glieder sämmtlich zu unterdrücken, wodurch

$$v=\Sigma \mathrm{A}\sin ms.\sin mat+\Sigma \mathrm{B}\sin ns.\cos nat$$

wird.

Soll nun auch für $s=\mathrm{L}$ die Geschwindigkeit v den Werth null annehmen; so hat man $m\mathrm{L}=i\pi$ und $n\mathrm{L}=j\pi$ oder $m=\frac{i\pi}{\mathrm{L}}$ und $n=\frac{j\pi}{\mathrm{L}}$ zu setzen, worin i und j eine jede beliebige ganze positive oder negative Zahl, einschließlich der Null, darstellt.

Nach dem Vorstehenden wird also den beiden Bedingungen, daß sowol für $s=o$, wie für $s=\mathrm{L}$, der Werth der Geschwindigkeit v zu allen Zeiten $=o$ sei, durch die allgemeine Gleichung

$$v=\Sigma \mathrm{A}\sin\frac{i\pi s}{\mathrm{L}}\sin\frac{i\pi at}{\mathrm{L}}+\Sigma \mathrm{B}\sin\frac{j\pi s}{\mathrm{L}}\cos\frac{j\pi at}{\mathrm{L}} \quad \ldots . (947)$$

ein Genüge geleistet.

Hierbei ist noch ganz unbestimmt gelassen, welches die Geschwindigkeit v in den verschiedenen übrigen Punkten der Luftsäule zu irgend einer bestimmten Zeit, z. B. für $t=o$ sei.

Den Werth der Dichtigkeit μ, welcher am Ende der Zeit t in einem Abstande s von dem vordersten Endpunkte der Röhre herrscht, findet man, wie in §. 201, indem man den vorstehenden Ausdruck von v in Beziehung zu t differenziirt, den partiellen Differenzialkoeffizienten $\frac{dv}{dt}$ in Gl. (928) substituirt und alsdann gehörig integrirt. Dies ergibt statt der Gl. (933)

$$a\log\mu=\Sigma \mathrm{A}\cos\frac{i\pi s}{\mathrm{L}}\cos\frac{i\pi at}{\mathrm{L}}-\Sigma \mathrm{B}\cos\frac{j\pi s}{\mathrm{L}}\sin\frac{j\pi at}{\mathrm{L}}+\mathrm{C}, \quad \ldots . (948)$$

worin C eine von s und t unabhänge Größe darstellt, deren Werth sich folgendermaaßen findet.

Wenn man sich die in der obigen Röhre eingeschlossene Luft

im Zustande des Gleichgewichtes denkt, bei welchem der Druck, und mithin auch die Dichtigkeit, in allen Punkten Ein und denselben Werth hat; so sei die mittlere Dichtigkeit für diesen Zustand des Gleichgewichtes $= \mu_1$. Die Masse der gesammten in der Röhre enthaltenen Luft wird hiernach, da der Querschnitt der Röhre $= \omega$ ist,

$$\omega L \mu_1$$

sein.

Sobald sich die Luftsäule aber in der vorhin betrachteten Bewegung befindet, wird die Masse eines Volumelementes von der Länge ds im Abstande s von der vorderen Endfläche der Röhre zu irgend einer Zeit $\omega \mu ds$ sein, und man hat daher für die Masse $\omega L \mu_1$ der gesammten Flüssigkeit am Ende derselben Zeit

$$\omega L \mu_1 = \int_o^L \omega \mu ds,$$

woraus die Gleichung

$$L\mu_1 = \int_o^L \mu ds \quad \ldots \text{(949)}$$

folgt.

Beachtet man, daß die Variation, welche die Dichtigkeit μ in den verschiedenen Punkten der Röhre und zu den verschiedenen Zeiten erleidet, im Vergleich zu der mittleren Dichtigkeit μ_1 nur eine sehr kleine Größe ist; so hat man, wenn man

$$\mu = (1+\delta)\mu_1$$

setzt, worin δ einen kleinen echten Bruch darstellen wird,

$$\log\frac{\mu}{\mu_1} \text{ oder } \log\mu - \log\mu_1 = \log(1+\delta) \text{ sehr nahe } = \delta.$$

Substituirt man in diese Gleichung für $\log\mu$ seinen Werth aus Gl. (948); so kommt

$$\delta = \frac{1}{a}\Sigma A \cos\frac{i\pi s}{L}\cos\frac{i\pi at}{L} - \frac{1}{a}\Sigma B\cos\frac{j\pi s}{L}\sin\frac{j\pi at}{L} + \frac{C}{a} - \log\mu_1.$$

Nach Gl. (949) ist aber auch, wenn man auf beiden Seiten

mit der konstanten Größe μ_1 dividirt, und $\frac{\mu}{\mu_1}=1+\delta$ setzt,

$$L=\int_o^L(1+\delta)ds=L+\int_o^L\delta.ds,\ \text{mithin} \int_o^L\delta.ds=o.$$

Führt man in die letztere Gleichung für δ den vorhergehenden Werth ein, und integrirt in Beziehung zu s zwischen den Gränzen von $s=o$ bis $s=L$; so verschwinden die Integrale sämmtlicher in A und B multiplizirten Glieder und man erhält

$$L\frac{C}{a}-L\log\mu_1=o,$$

woraus

$$C=a\log\mu_1$$

folgt.

Eine Substitution dieses Werthes von C in Gl. (948) ergibt für die Dichtigkeit μ oder für die Verdichtung, resp. Verdünnung δ der Flüssigkeit im Abstande s und am Ende der Zeit t die Formel

$$a\log\frac{\mu}{\mu_1}=a\delta=\Sigma A\cos\frac{i\pi s}{L}\cos\frac{i\pi at}{L}-\Sigma B\cos\frac{j\pi s}{L}\sin\frac{j\pi at}{L} \quad \ldots . (950)$$

In den beiden Gleichungen (947) und (950) werden die Koeffizienten A und B, sowie die Werthe der Zahlen i und j aus den Bedingungen zu bestimmen sein, daß der Zustand der Flüssigkeitssäule am Ende irgend einer gewissen Zeit, z. B. für $t=o$ ein gegebener sei. Bezeichnete man hiernach die Geschwindigkeit, welche in irgend einem Punkte der Röhre im Anfange der Zeitrechnung bestehen sollte, und welche demnach nur eine Funktion von s sein würde, mit $V=\varphi(s)$; so müßte man wegen Gl. (947)

$$V=\varphi(s)=\Sigma B\sin\frac{j\pi s}{L} \quad \ldots . (951)$$

haben.

Würde in ähnlicher Weise die Verdichtung oder Verdünnung, welche in irgend einem Punkte der Röhre im Anfange der Zeit bestehen sollte, und welche ebenfalls nur eine Funktion von s sein könnte, mit $\triangle=\psi(s)$ bezeichnet; so müßte wegen Gl. (950)

$$a\triangle = a\psi(s) = \Sigma A \cos \frac{i\pi s}{L} \quad \ldots . (952)$$

sein.

Sollte der im Eingange dieses Paragraphs angekündigte besondere Fall eintreten, für welchen die Geschwindigkeit V im Anfange der Zeitrechnung überall $= o$ wäre; so würde man, da für $t = o$ die in $\sin \frac{i\pi at}{L}$ multiplizirten Glieder aus Gl. (947) von selbst verschwinden, alle übrigen mit dem Faktor B behafteten Glieder zu unterdrücken haben, weil die letzteren für $t = o$ allgemein nicht gleich null werden können. Demnach erhält man für den fraglichen einfachen Fall

$$v = \Sigma A \sin \frac{i\pi s}{L} \sin \frac{i\pi at}{L}, \quad \ldots . (953)$$

$$a \log \frac{\mu}{\mu_1} = a\delta = \Sigma A \cos \frac{i\pi s}{L} \cos \frac{i\pi at}{L} \quad \ldots . (954)$$

Die in diesen beiden Gleichungen vorkommenden Faktoren A sind für die verschiedenen unter dem Zeichen Σ zu denkenden Glieder vollkommen willkürlich; ebenso ist es mit den Zahlen i, welche jedoch aus dem Bereiche der positiven oder negativen ganzen Zahlen gewählt werden müssen. Sobald übrigens die Dichtigkeit $\triangle = \psi(s)$ gegeben ist, welche für $t = o$ in den verschiedenen Punkten der Röhre herrscht, ergeben sich die Werthe der Größen A und i aus der Bedingungsgleichung (952).

Da allgemein

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)],$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x-y)]$$

ist; so kann man die beiden Gleichungen (953) und (954) auch in die Form

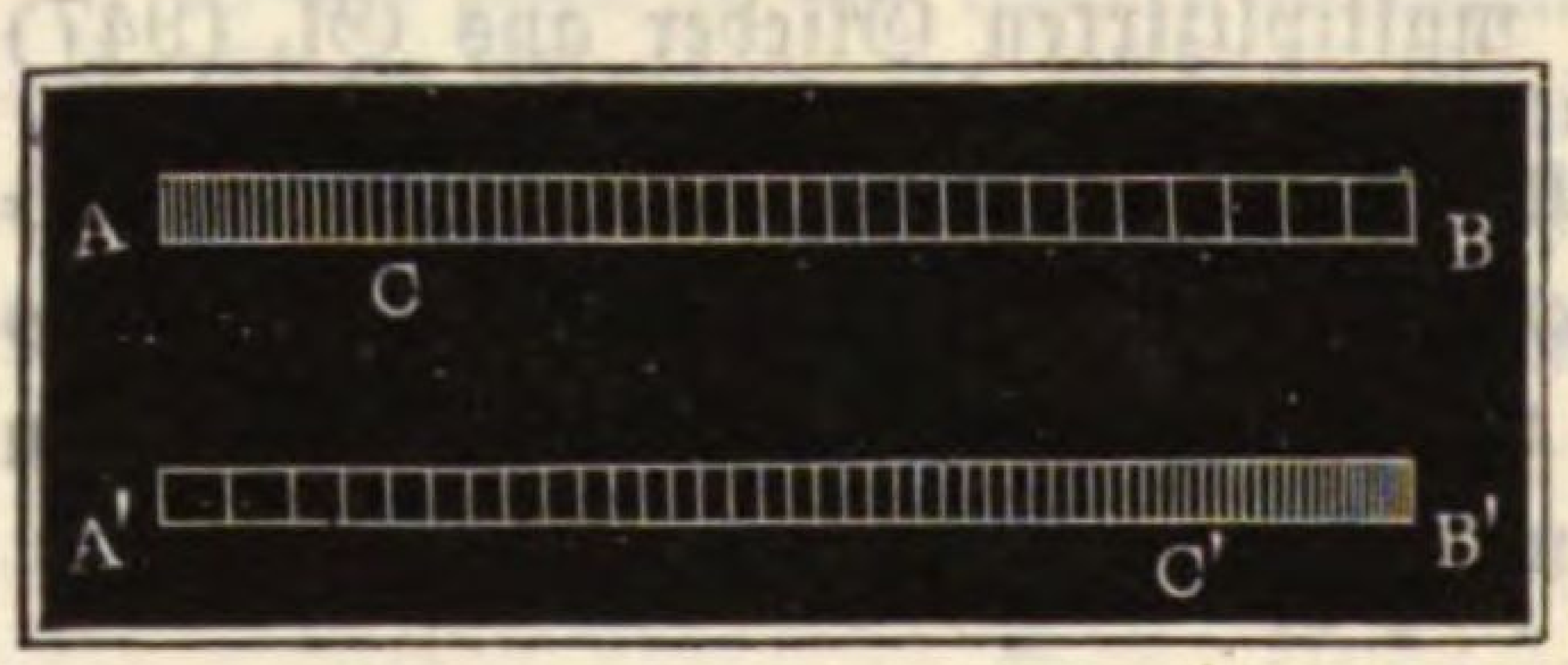
$$v = \frac{1}{2}\Sigma A\left[\cos\frac{i\pi}{L}(s-at) - \cos\frac{i\pi}{L}(s+at)\right] \quad \ldots (955)$$

$$a \log \frac{\mu}{\mu_1} = a\delta = \frac{1}{2}\Sigma A\left[\cos\frac{i\pi}{L}(s-at) + \cos\frac{i\pi}{L}(s+at)\right] \ldots . (956)$$

bringen, in welcher sie den allgemeinen Formen der Gleichungen (932) und (933) entsprechen.

§. 205. Diskussion der vorstehenden Gleichungen. — Schallbewegungen in der Luft.

Unter der Voraussetzung, das die Geschwindigkeit der vibrirenden Luftsäule AB, welche in einer an beiden Enden verschlossenen Röhre enthalten ist, im Anfange der Zeitrechnung überall gleich null sei, wird der Zustand der Bewegung und der wechselnden Dichtigkeit in dieser Säule durch die beiden allgemeinen Gleichungen



$$v = \Sigma \mathrm{A} \sin \frac{i\pi s}{\mathrm{L}} \sin \frac{i\pi a t}{\mathrm{L}}, \quad \ldots . \; (957)$$

$$a\delta = \Sigma \mathrm{A} \cos \frac{i\pi s}{\mathrm{L}} \cos \frac{i\pi a t}{\mathrm{L}} \quad \ldots . \; (958)$$

dargestellt.

Welches nun auch die Werthe der Größen A und i in den verschiedenen unter dem Zeichen Σ enthaltenen Gliedern sein mögen; so geht aus diesen Gleichungen doch folgendes hervor.

Substituirt man in Gl. (957) $t + \frac{\mathrm{L}}{a}$ für t und $\mathrm{L} - s$ für s; so erhält man für die Geschwindigkeit v', welche im Abstande $\mathrm{A'C'} = \mathrm{L} - s$ vom vorderen Endpunkte oder im Abstande $\mathrm{B'C'} = s$ vom hinteren Endpunkte der Röhre nach Verlauf des Zeitintervalles $\frac{\mathrm{L}}{a}$ eintritt,

$$v' = -\Sigma \mathrm{A} \sin \frac{i\pi s}{\mathrm{L}} \sin \frac{i\pi a t}{\mathrm{L}} \cos^2 i\pi.$$

Ob nun i eine gerade oder ungerade Zahl, also $\cos i\pi = +1$ oder $= -1$ sei, $\cos^2 i\pi$ wird immer $= +1$, und demnach

$$v' = -\Sigma \mathrm{A} \sin \frac{i\pi s}{\mathrm{L}} \sin \frac{i\pi a t}{\mathrm{L}} = -v$$

sein.

Macht man dieselbe Substitution in Gl. (958); so kommt für die im Punkte C′ herrschende Verdichtung oder Verdünnung δ' zu der nämlichen Zeit

$$a\delta' = \Sigma A \cos\frac{i\pi s}{L}\cos\frac{i\pi a t}{L} = a\delta.$$

Hieraus folgt, daß, von irgend einem Zeitaugenblicke an gerechnet, die im Abstande $AC = s$ von dem Einen Endpunkte der Röhre herrschende Geschwindigkeit nach Verlauf des Zeitintervalles $\frac{L}{a}$ zu dem Punkte C′ übergegangen sein wird, welcher um $B'C' = s$ von dem anderen Endpunkte der Röhre entfernt liegt; jedoch ist die Richtung dieser Geschwindigkeit bei C′ der früher bei C herrschenden direkt entgegengesetzt. Die nach Verlauf der Zeit $\frac{L}{a}$ in C′ stattfindende Dichtigkeit ist gleich der, welche vor dieser Zeit im Punkte C stattfand.

Hieraus folgt ferner, daß in Zeitintervallen von der Dauer

$$T = \frac{2L}{a} \quad \ldots (959)$$

in einem jeden Punkte C der Röhre wiederum dieselbe Geschwindigkeit und Dichtigkeit vorhanden sein wird, daß also die Bewegung der Luftsäule in regelmäßigen Oszillationen besteht, bei welchen in Intervallen von der Dauer $\frac{L}{a}$ der Zustand der Bewegung und Dichtigkeit sich in der Röhre umkehrt, während in Intervallen von der Dauer $\frac{2L}{a}$ stets genau derselbe Zustand wiederkehrt.

Um jetzt die Variationen zu untersuchen, welche die Geschwindigkeit und Dichtigkeit der Lufttheilchen in den verschiedenen Punkten der Röhre mit dem Verlaufe der Zeit erleidet, sowie auch die Exkursionen, welche ein jedes Lufttheilchen periodisch zurücklegt; so wenden wir uns zu dem einfachsten Falle, wo nämlich unter dem Zeichen Σ in Gl. (957) und (958) nur ein einziges Glied vorhanden ist, in welchem die Zahl i den Werth 1 habe. Alsdann ist

$$v = A \sin \frac{\pi s}{L} \sin \frac{\pi a t}{L} \quad \ldots \ldots (960)$$

$$a\delta = A \cos \frac{\pi s}{L} \cos \frac{\pi a t}{L} \quad \ldots \ldots (961)$$

Aus Gl. (960) erkennt man, daß in einem jeden Punkte der Röhre innerhalb der Zeitdauer $\frac{L}{a}$ einer halben Schwingung die Geschwindigkeit am größten ist am Ende der Zeit $t = \frac{1}{2} \frac{L}{a}$, also in der Mitte einer solchen halben Schwingung, indem man für diesen Zeitmoment

$$v = A \sin \frac{\pi s}{L} \quad \ldots \ldots (962)$$

hat. Gleichzeitig ist aber, wie aus Gl. (961) hervorgeht, die Verdichtung in allen Punkten der Röhre gleich null, oder die Dichtigkeit der Luft überall gleich der mittleren μ_1. Die Gl. (962) lehrt, daß in dem nämlichen Zeitmomente die Geschwindigkeit in der Mitte der Röhre oder für $s = \frac{L}{2}$ am stärksten und zwar $= A$ ist, während dieselbe in allen übrigen Punkten, sowol diesseit, wie jenseit der Mitte der Röhre $< A$, aber überall nach derselben Seite gerichtet ist. Aus Gl. (960) erkennt man allgemein, daß zu jeder Zeit die Geschwindigkeit in der Mitte der Röhre am stärksten, nämlich $= A \sin \frac{\pi a t}{L}$ ist, während nach Gl. (961) die Dichtigkeit an dieser Stelle fortwährend gleich der mittleren μ_1 bleibt.

Die Verdichtung oder Verdünnung, welche im Anfange der Zeit in den verschiedenen Punkten der Röhre stattfindet, ist nach Gl. (961) durch die Formel

$$a\delta = A \cos \frac{\pi s}{L} \quad \ldots \ldots (962^a)$$

gegeben. Für die größte Verdichtung bei A erhält man hieraus

$$\delta = \frac{A}{a}$$

und für die größte Verdünnung bei B

$$\delta = -\frac{A}{a}.$$

Irgend ein Lufttheilchen, welches sich im Anfange der obigen Zeitrechnung oder für $t = o$ im Abstande s von dem vorderen Endpunkte der Röhre befindet, also eben im Begriffe ist, sich gegen den anderen Endpunkt der Röhre hin zu bewegen, durchlaufe während einer halben Schwingung von der Dauer $t = \frac{L}{a}$ den Raum x, indem dasselbe in den Abstand s' von dem vorderen Endpunkte der Röhre komme und alsdann im Begriffe ist, die rückgängige Bewegung nach dem vorderen Endpunkte der Röhre wieder einzuschlagen. Die Länge x stellt die Exkursion dar, welche das fragliche Theilchen während einer ganzen Schwingung der Luftsäule von der Dauer $T = \frac{2L}{a}$ zweimal in entgegengesetzten Richtungen durchläuft.

Zur Bestimmung der Exkursion x kann die Betrachtung dienen, daß die Masse der Flüssigkeit, welche sich im Zeitmomente $t = o$ in der Länge s vom vorderen Endpunkte der Röhre befindet, gleich sein müsse der Masse, welche sich im Zeitmomente $t = \frac{L}{a}$ in der Länge s' von demselben vorderen Endpunkte der Röhre befindet. Für die erstere Masse hat man

$$\omega \int_o^s \mu\, ds = \omega \mu_1 \int_o^s (1 + \delta)\, ds = \omega \mu_1 s + \omega \mu_1 \int_o^s \delta . ds,$$

worin man für δ den Werth aus Gl. (961) für $t = o$, also $\delta = \frac{A}{a} \cos \frac{\pi s}{L}$ zu setzen hat. Dies gibt

$$\omega \mu_1 s + \omega \mu_1 \frac{A}{a} \int_o^s \cos \frac{\pi s}{L} . ds = \omega \mu_1 s + \omega \mu_1 \frac{A}{a} \frac{L}{\pi} \sin \frac{\pi s}{L}.$$

Für die letztere der beiden vorhin genannten Massen hat man ähnlich

$$\omega\int_o^{s'}\mu ds = \omega\mu_1 s' + \omega\mu_1\int_o^{s'} d.ds,$$

worin jedoch für δ der Werth aus Gl. (961) für $t = \frac{L}{a}$, also $\delta = -\frac{A}{a}\cos\frac{\pi s}{L}$ zu substituiren ist. Dies gibt

$$\omega\mu_1 s' - \omega\mu_1\frac{A}{a}\int_o^{s'}\cos\frac{\pi s}{L} = \omega\mu_1 s' - \omega\mu_1\frac{A}{a}\frac{L}{\pi}.\sin\frac{\pi s'}{L}.$$

Setzt man die vorstehenden beiden Ausdrücke für die fraglichen Massen einander gleich; so kommt nach gehöriger Reduktion

$$\frac{a\pi}{L}(s'-s) = A\left(\sin\frac{\pi s'}{L} + \sin\frac{\pi s}{L}\right).$$

Substituirt man hierin $s'-s=x$ und bezeichnet den Abstand des Mittelpunktes der Exkursion x vom vorderen Endpunkte der Röhre, d. i. den Abstand $\frac{s'+s}{2}$ mit S; so verwandelt sich die vorstehende Gleichung nach gehöriger Vereinfachung in

$$a\left(\frac{\pi}{L}\frac{x}{2}\right) = A\sin\left(\frac{\pi}{L}S\right).\cos\left(\frac{\pi}{L}\frac{x}{2}\right), \quad \ldots . (963)$$

woraus der Werth der Exkursion x als Funktion von S gefunden werden kann. Diese Exkursion der Lufttheilchen ist null für $S=o$ und für $S=L$, also an den Endpunkten der Röhre, und dieselbe ist am stärksten für $S=\frac{L}{2}$ oder in der Mitte der Röhre. Der letztere Werth von x würde aus der Gleichung

$$a\left(\frac{\pi}{L}\frac{x}{2}\right) = A\cos\left(\frac{\pi}{L}\frac{x}{2}\right) \quad \ldots . (964)$$

zu ermitteln sein. Da x in der Regel eine sehr kleine Größe in Beziehung zu L, und außerdem in den meisten Fällen $L > \frac{\pi}{2}$

sein wird; so wird man sehr nahe $\cos\left(\frac{\pi}{L}\frac{x}{2}\right) = 1$ und demnach sehr nahe

$$a\left(\frac{\pi}{L}\frac{x}{2}\right) = A, \quad \ldots \ldots (965)$$

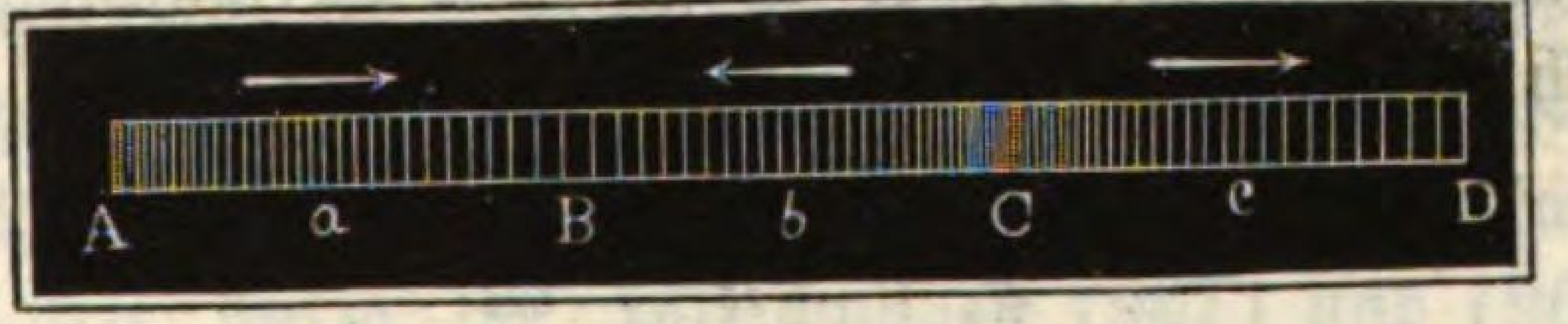
mithin

$$x = \frac{2L}{a\pi}A \quad \ldots \ldots (966)$$

haben.

Die Größe A, welche nach einer früheren Bemerkung die Geschwindigkeit der Lufttheilchen in der Mitte der Röhre zur Zeit $t = \frac{1}{2}\frac{L}{a}$ oder in der Mitte der halben Schwingungsdauer der Luftsäule darstellt, kann also nach Gl. (965) auch durch die Exkursionsweite der letzteren Theilchen bestimmt werden.

Wenn man sich denkt, an die vorhin betrachtete bei A und B verschlossene Röhre AB schließen sich noch mehrere ebenso ein-



gerichtete gleiche Röhren BC, CD etc. an, und in einer jeden befinde sich eine Luftsäule in einem Schwingungszustande, welcher, von einem gemeinschaftlichen Endpunkte zweier angränzenden Röhren, z. B. von B aus gesehen, der nämliche ist, indem also für $t = o$ bei A in der ersten Röhre die stärkste Verdichtung, bei B in der ersten und zweiten Röhre die stärkste Verdünnung, bei C in der zweiten und dritten Röhre wieder die stärkste Verdichtung stattfinde und s. f.; so würde man, weil die Theilchen bei A, B, C, D . . . stets in Ruhe sind, und die Wände bei B, C . . . von beiden Seiten stets denselben Druck in entgegengesetzten Richtungen empfangen, diese Zwischenwände ganz entfernen können, ohne daß die in der ganzen Röhre AD enthaltene Luft aufhörte, in der früheren Weise zu oszilliren.

Wäre $AB = BC = CD \ldots = L$, ferner die Länge der ganzen Röhre $AD = L_1 = iL$, worin i die Anzahl jener einzelnen Theile, also eine ganze Zahl bezeichnet; so erkennt man sehr leicht, daß der zuletzt erwähnte Fall durch die Formeln (960)

und (961) dargestellt wird, sobald man darin $L = \frac{L_1}{i}$ setzt, also durch die Formeln

$$v = A \sin \frac{i\pi s}{L_1} \sin \frac{i\pi a t}{L_1}, \quad \ldots . (967)$$

$$a\delta = A \cos \frac{i\pi s}{L_1} \cos \frac{i\pi a t}{L_1}, \quad \ldots . (968)$$

welche ebenfalls den allgemeinen Gleichungen (957) und (958) angehören. Alles was bei der Diskussion der Gleichungen (960) und (961) von den Zuständen der dortigen Luftsäule **AB** in den verschiedenen Punkten und zu den verschiedenen Zeiten gesagt ist, gilt auch hier von den einzelnen Luftsäulen **AB**, **BC**, **CD** . . ., wenn man dieselben gleichzeitig in den Richtungen **AB**, **CB**, **CD** . . . betrachtet.

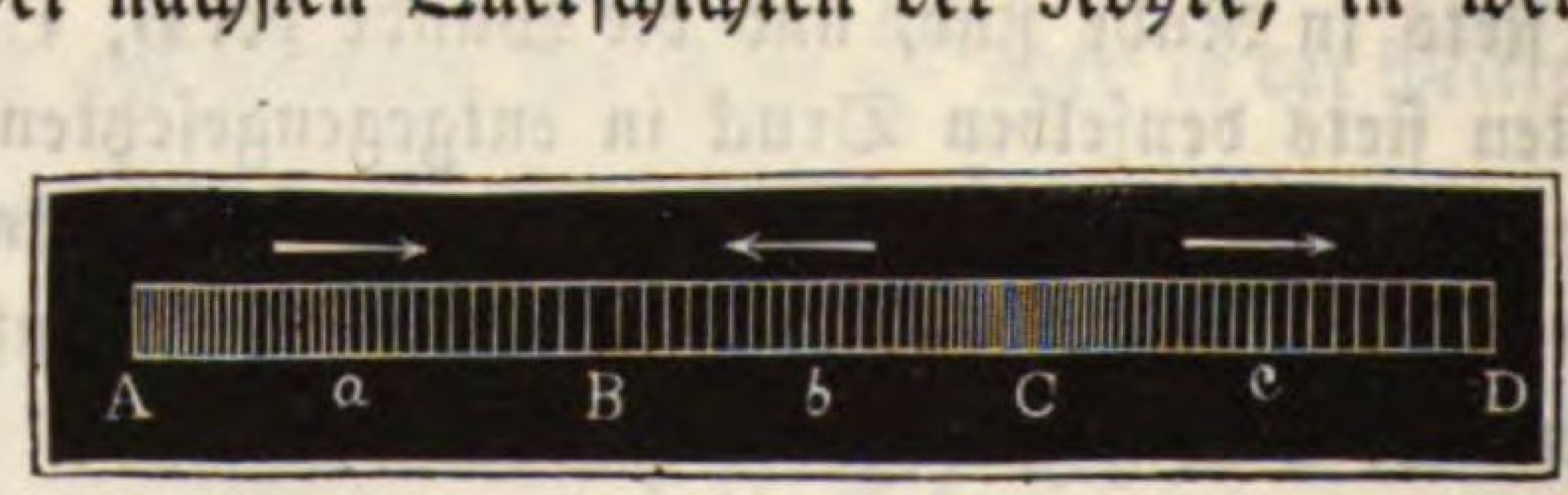
Man hat nämlich für die Zeit, während welcher die stärksten Verdichtungen bei **A**, **C** zu stärksten Verdünnungen und die stärksten Verdünnungen bei **B**, **D** zu stärksten Verdichtungen werden, den Werth

$$\frac{1}{2} T = \frac{L}{a} = \frac{L_1}{ia}$$

und für eine ganze Schwingungsdauer, während welcher in jedem Punkte der Röhre genau wieder derselbe Zustand der Bewegung und Dichtigkeit eintritt,

$$T = \frac{2L}{a} = \frac{2L_1}{ia} \quad \ldots . (969)$$

Die Länge $AC = BD = 2L = \frac{2L_1}{i}$ oder der Abstand zwischen irgend zwei nächsten Querschichten der Röhre, in welchen genau



derselbe Schwingungszustand herrscht, heißt eine **Wellenlänge**, während die in einer solchen Länge enthaltene flüssige Masse in dem Zustande der obigen Vibrationsbewegung eine **Welle** ge-

nannt wird. Die Punkte A, B, C, D, . . . in denen die Dichtigkeit der Flüssigkeit periodisch abwechselnd ihr Maximum und Minimum erreicht, und in welchen die Geschwindigkeit der Theilchen fortwährend null ist, heißen **Knoten**. Die in den Mitten zwischen den Knoten liegenden Punkte *a*, *b*, *c* . . ., wo die Dichtigkeit fortwährend gleich der mittleren ist und wo stets die größte Geschwindigkeit herrscht, sodaß die hier befindlichen Theilchen bei einer jeden Schwingung die größte Amplitude beschreiben, tragen den Namen **Bäuche**.

Zu allen Zeiten, ehe in irgend einem Knotenpunkte die größte Verdichtung erreicht ist, bewegen sich die Lufttheilchen der angränzenden halben Wellen von beiden Seiten **gegen** diesen Punkt. Nachdem jedoch das Maximum der Verdichtung eingetreten ist, bewegen sich die Theilchen bis zum Augenblicke der größten Verdünnung nach beiden Seiten von dem fraglichen Knotenpunkte **hinweg**. In der Mitte der Zeit, während welcher in irgend einem Knotenpunkte die größte Verdichtung mit der größten Verdünnung wechselt, und umgekehrt, also zweimal während einer jeden ganzen Oszillation herrscht in der ganzen Röhre AB die mittlere Dichtigkeit, vorausgesetzt, daß der Bewegungszustand der Flüssigkeit durch die Gleichungen (967) und (968) dargestellt sei.

Wellensysteme, wie die durch die ebengenannten Gleichungen dargestellten, können sich gleichzeitig mehrere in derselben Röhre gegenseitig durchdringen. Ein solcher Zustand gehört dem allgemeinen Falle der Gleichungen (957) und (958) an.

Wenn wir uns statt der hinteren Endfläche D der obigen Röhre das elastische Trommelfell eines menschlichen Ohres substituirt denken; so wird dasselbe in Folge der periodisch wiederkehrenden Verdichtungen und Verdünnungen in eine entsprechende vibrirende Bewegung versetzt, deren Perioden mit denen der schwingenden Luftsäule harmoniren. Durch eine solche Erschütterung des Trommelfelles entsteht bei uns die Empfindung des **Schalles**, welche **Ton** heißt, wenn die Affektion in regelmäßigen Vibrationen besteht. Die akustische **Höhe** oder **Tiefe** des Tones ist durch die raschere oder langsamere Aufeinanderfolge der Vibrationen, also durch kleinere oder größere Schwingungsdauer der einzelnen Luftwellen gegeben. Da diese Schwingungsdauer

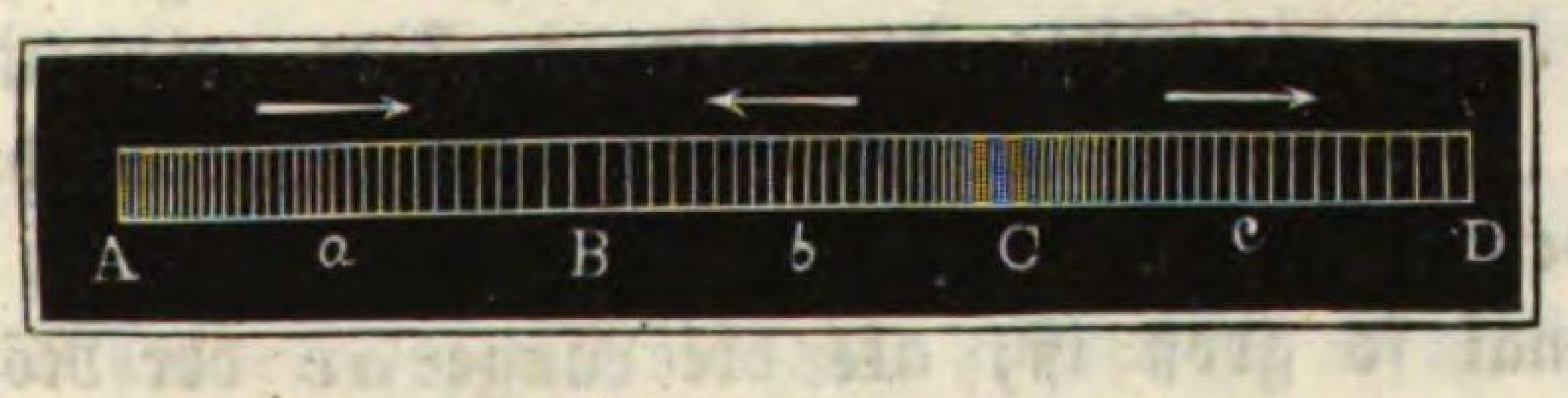
$T = \frac{2L}{a} = \frac{2L_1}{ia}$ mit der Länge 2L der Wellen in direktem geometrischen Verhältnisse steht; so folgt, daß Ein und demselben Tone stets eine Luftwelle von derselben Länge entspricht, und daß die längeren Wellen tiefere Töne und die kürzeren Wellen höhere Töne erzeugen. Die Stärke oder Intensität des Tones ist von dem Grade der Verdichtung und Verdünnung $\left(\delta = \mp \frac{A}{a}\right)$, welche abwechselnd in jedem Knotenpunkte stattfindet, oder auch von der Größe der Schwingungsamplitude der einzelnen Lufttheilchen abhängig, und wird demnach durch die Länge der Welle oder durch deren Schwingungsdauer nicht bedingt. Der Klang eines Tones, welcher bei Tönen von derselben Höhe doch sehr verschieden sein kann, wird jedenfalls durch die besondere Art und Weise hervorgebracht, wie die Dichtigkeit der Luft im Punkte D mit der Zeit variirt, wenn dieselbe während einer jeden Oszillation von der größen Verdünnung bis zur größten Verdichtung, und umgekehrt, übergeht. Man sollte zwar glauben, daß das Gesetz, nach welchem diese Dichtigkeit im Punkte D mit der Zeit variirt, für jeden einfachen Ton von derselben Höhe und Stärke, welchen die in der Röhre AD enthaltene Luft überhaupt hervorzubringen vermag, stets dasselbe wäre, indem man nach Gl. (968) für $s = L_1$

$$a\delta = \pm A \cos \frac{i\pi a t}{L_1}$$

hat, worin π, a, L_1 unveränderliche Größen sind, die ganze Zahl i durch die Höhe des Tones und die Größe A durch die Stärke des Tones gegeben sind, und worin das obere Zeichen zu nehmen ist, sobald i paar, und das untere Zeichen, sobald i unpaar ist, sodaß also in der vorstehenden Relation zwischen δ und t gar keine Größen mehr willkürlich bleiben, welche von besonderen Umständen abhängig sein könnten. Allein man hat zu erwägen, daß die Gleichungen (967) und (968), sowie die beiden Gleichungen (953) und (954), von welchen jene nur einen speziellen Fall darstellen, aus den allgemeinen Gleichungen (947) und (950) unter der besonderen und ausdrücklichen Bedingung abgeleitet sind, daß die Geschwindigkeit der Lufttheilchen in einem gewissen Augenblicke, nämlich im Anfange einer jeden halben Schwingung,

in allen Punkten der Röhre gleich null sei, sodaß mithin alle Lufttheilchen die Endpunkte ihrer Exkursionen zu derselben Zeit erreichen. Eine solche Bedingung kann offenbar nur unter gewissen Voraussetzungen erfüllt werden, und wird in der Wirklichkeit unzählige Abweichungen erfahren, welche eben zu der Verschiedenheit des Klanges irgend eines Tones von derselben Höhe Veranlassung geben. Da nun durch das regelmäßige Anschlagen von Luftwellen alle umgebenden starren und tropfbar flüssigen Körper in eine entsprechende Vibrationsbewegung versetzt werden, welche wiederum von der Form und dem Stoffe dieser Körper in einer gewissen Weise abhängig ist, und da ein derartiger Eingriff der Vibrationen der umgebenden Körper auch auf die Bewegung jener Luftwellen einen rückwirkenden Einfluß ausübt; so wird es erklärlich, wie ein Ton, welcher von der schwingenden Luft in der Röhre AB erzeugt wird, obgleich derselbe Ein und demselben mechanischen Agens seine Entstehung verdankt, doch wegen des Stoffes, aus welchem die Röhrenwände bestehen, oder wegen der Form des Querschnittes dieser Röhre einen verschiedenen Klang annehmen kann.

Wenn die Luft in einer an beiden Enden verschlossenen Röhre AD von der Länge L_1 in regelmäßige Schwingungen versetzt wird, was z. B. dadurch geschehen könnte, daß man in irgend



einem Punkte a einen Körper vibriren ließe, dessen ganze Schwingungen (bestehend aus einem Hin- und einem Hergange) die Dauer $T = \frac{2L_1}{ia}$ besäßen; so leuchtet ein, daß die Endpunkte der Röhre wegen der festen Wände, woselbst die Geschwindigkeit stets gleich null sein muß, nur Knotenpunkte in der Wellenbewegung der Luft sein können, daß also in dem vorstehenden Werthe von T die Größe i nur eine ganze Zahl sein darf. Der tiefste Ton, welchen eine solche Röhre anzugeben vermag, oder ihr Grundton, ist also der, für welchen $i = 1$ ist, und Dies entspricht offenbar einem Tone, dessen Wellenlänge 2mal so lang ist,

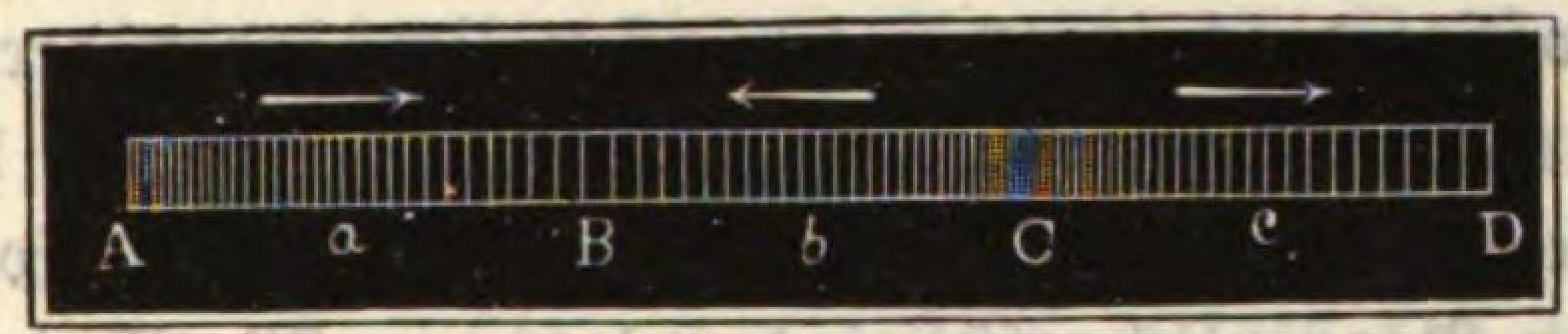
als die Röhre selbst, da man für die fragliche Wellenlänge immer $\frac{2L_1}{i}$ hat. In der obigen Figur würde Dies der Fall sein, wenn AB die ganze Röhre wäre, wobei AC=2AB die Wellenlänge darstellte. In derselben Röhre können aber noch alle diejenigen Töne erzeugt werden, welche man für $i=2, 3, 4, 5 \ldots$ erhält, deren Wellenlängen also resp. den Werth 1, $\frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5} \ldots$ von der Länge der Röhre selbst haben. Diese Töne sind die sukzessiv aufeinander folgenden höheren Oktaven des obigen Grundtones; ihre Schwingungszeiten sind resp. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$ von der des Grundtones. Bei der Erzeugung dieser höheren Töne bilden sich in der Röhre sogenannte stehende Wellen mit den Knotenpunkten B, C . . . und den Bäuchen *a*, *b*, c . . .

Wäre die Röhre nur an dem Einen Ende, z. B. bei A, verschlossen und am andern Ende ganz offen, wie Dies bei den Orgelpfeifen der Fall ist; so müßte jener vorderste Endpunkt jedenfalls einen Knotenpunkt in der Wellenbewegung der darin enthaltenen Luft erzeugen. Die Erfahrung lehrt ferner, daß sich an dem offenen Ende der Röhre, welches natürlich in einen lufterfüllten Raum ausmünden muß, stets ein Bauch erzeugt. Hiernach könnte also bei der Wellenbewegung der obigen Figur, A*a*, A*b*, A*c* . . . die Länge der eben in Rede gebrachten Röhre darstellen. Der tiefste Ton, welchen eine solche Röhre A*a* zu erzeugen vermöchte, würde der von der Wellenlänge AC sein, welche 4 mal so groß ist, als die Länge *ac* der Röhre selbst. Die nächst höheren Töne, welche dieselbe Röhre hervorzubringen vermöchte, würden diejenigen sein, deren Wellenlängen $= \frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{4}{7} \ldots$ von der Länge der Röhre betrüge, was einleuchtet, wenn man sich die Röhre resp. durch A*b*, A*c*, . . . dargestellt denkt. In den letzteren Fällen bilden sich ebenfalls stehende Wellen in der Röhre, deren Knoten B, C und deren Bäuche *a*, *b* sind.

Wäre die Röhre an beiden Enden offen; so bildeten sich, wie schon erwähnt, an beiden Enden der Röhre Bäuche. Man kann sich also eine solche Röhre nach der obigen Figur durch *ab*,

ac . . . dargestellt denken, und es leuchtet ein, daß der tiefste Ton derselben derjenige ist, dessen Wellenlänge das Doppelte von der Länge der Röhre selbst beträgt, während die Wellen der nächst höheren Töne $1, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}$ . . . mal so lang sind, als jene Röhre. Hieraus folgt, daß eine an beiden Enden offene Röhre dieselben Töne gibt, wie eine an beiden Enden verschlossene Röhre von derselben Länge.

Was endlich die Fortpflanzung der Schallvibrationen von dem Einen Punkte einer in Schwingungen versetzten Luftsäule zu einem anderen Punkte dieser Säule anlangt; so bemerkt man zu-



vörderst, daß wenn irgendwo in der obigen Röhre AD der erste Impuls zur Bewegung der Flüssigkeit gegeben ist, was etwa dadurch geschehen kann, daß bei A die Luft plötzlich bis zu einem gewissen Grade verdichtet wird; so pflanzt sich nach §. 202 diese Dichtigkeit mit der Geschwindigkeit $a = \sqrt{gk}$ durch die Röhre fort, und erzeugt nach Verlauf der ersten Zeiteinheit in einem Abstande $= a$ einen ähnlichen Impuls zur Bewegung, resp. zum Schalle. Durch irgend eine Länge L pflanzt sich also der erste Impuls zur Schallbewegung in der Zeit $\frac{L}{a}$ fort, welches der Dauer einer halben Schallschwingung entspricht, wenn L die Länge AB der halben Welle darstellt. Folgt nun nach der Zeit $\frac{L}{a}$ auf die erstere Verdichtung bei A eine entsprechende Verdünnung; so pflanzt sich auch diese mit der nämlichen Geschwindigkeit durch die Röhre fort, indem sie das durch die erste Verdichtung ins Leben gerufene System von Bewegungen in einer aus dem Früheren klar gewordenen Weise durchdringt und die Veranlassung gibt, daß sich in den Punkten A, B, C, D . . ., welche sämmtlich um die Länge L voneinander abstehen, abwechselnd Verdichtungen und Verdünnungen einstellen. Wird die Ursache zu den regelmäßigen Verdichtungen und Verdünnungen bei A durch

ein äußerliches Agens unterhalten; so kommt die ganze Luftsäule, so lang sie auch sei, allmählig in allen Punkten in die vorhin betrachtete Wellenbewegung und erzeugt in jedem ihrer Punkte einen Schall, dessen Intensität überall die nämliche ist und so lange konstant bleibt, als das genannte Agens eine konstante Wirksamkeit ausübt. Hört das Letztere jedoch auf zu wirken; so geht die Luftsäule, besonders vermöge der Unvollkommenheit der ihr innewohnenden Reaktionskräfte, sehr bald in den Zustand der Ruhe über, und der Schall erlischt.

Da man gefunden hat, daß die Geschwindigkeit a des Schalles in der Luft bei 16° Wärme von dem theoretischen Resultate $\sqrt{gk} = 916$ Fuß in der Wirklichkeit etwas abweicht, und $= 1086$ Fuß ist; während übrigens unter allen Umständen der Schall in dem Zeitraume einer halben Wellenschwingung um die halbe Wellenlänge fortschreitet; so hat man in sämmtlichen Formeln der vorstehenden Paragraphe für a den letzteren Werth zu substituiren, wenn es sich um eine Anwendung derselben auf die Schallbewegung in atmosphärischer Luft von 16° Wärme handelt.

Es versteht sich von selbst, daß die obigen Resultate in ihrer Strenge nur auf die Bewegungen einer elastischen Flüssigkeit in einer engen Röhre von konstantem Querschnitte Anwendung finden, und daß dieselben bei analogen Bewegungen in Flüssigkeitsmassen von zwei oder mehreren Dimensionen gewisse Modifikationen erleiden, deren Diskussion hier zu weit führen würde.

Vom Stoße und Widerstande einer unbestimmt begränzten elastischen Flüssigkeit.

§. 206. Allgemeine Formeln für den Stoß und Widerstand einer elastischen Flüssigkeit gegen starre Körper.

Viele Beobachtungen haben gelehrt, daß die Wirkung des Stoßes einer weit begränzten und in Bewegung begriffenen elastischen Flüssigkeit gegen einen ruhenden Körper ebenso wol, wie die Wirkung des Widerstandes einer solchen in Ruhe befindlichen Flüssigkeit gegen einen darin bewegten Körper unter sonst gleichen Umständen durch ähnliche Formeln dargestellt wer-

den kann, wie sie in den §§. 165 bis 176 für den Stoß und Widerstand einer unpreßbaren Flüssigkeit mitgetheilt sind. Nach den Ermittelungen von Duchemin*), welche unter Zugrundelegung bekannter Versuche von Borda, Newton, Desaguillers, Prony, Hutton, Thibault und Smeaton vorgenommen sind, sind sämmtliche in den eben genannten Paragraphen enthaltenen Formeln direkt auf den Stoß und Widerstand der Luft anwendbar, sobald die Art der Bewegung und die Form des gestoßenen oder bewegten Körpers den dortigen Annahmen entspricht, ja sogar die dort angegebenen Zahlenwerthe des Widerstandskoeffizienten ϱ behalten je nach den besonderen Umständen auch für atmosphärische Luft Gültigkeit. Jedoch hat man hinsichtlich der Größe w, welche das Gewicht der Volumeinheit der Flüssigkeit in jenen Formeln darstellte, folgende Korrektion vorzunehmen.

Da es sich hier um eine elastische Flüssigkeit handelt; so leuchtet ein, daß deren Dichtigkeit oder auch das Gewicht einer Volumeinheit derselben, nicht überall konstant sein kann, sobald das Gleichgewicht derselben durch die Dazwischenkunft eines gestoßenen oder stoßenden starren Körpers gestört wird. Die Größe w muß aber das Gewicht der Volumeinheit in denjenigen Theilen der Flüssigkeit darstellen, welche mit der gestoßenen Fläche des Körpers in unmittelbarer Berührung sind, und es ist leicht zu erachten, daß dieses Gewicht von der Geschwindigkeit V, mit welcher die Flüssigkeit gegen den Körper trifft, oder mit welcher sich der Letztere in der Flüssigkeit bewegt, auf irgend eine Weise abhängig ist.

Solange die Geschwindigkeit V gering ist, wird auch die Dichtigkeit der Flüssigkeit vor dem Körper nur wenig von derjenigen Dichtigkeit abweichen, welche die Flüssigkeit im Zustande der Ruhe unter dem obwaltenden Barometer- und Thermometerstande besitzen würde, und man könnte für dergleichen schwache Geschwindigkeiten der Größe w immer die für den Ruhezustand geltenden Werth beilegen.

Bei zunehmender Geschwindigkeit wächst die Dichtigkeit der

---

*) Experimentaluntersuchungen über die Gesetze des Widerstandes der Flüssigkeiten. Deutsch von Schnuse. §. 105 ff.

Flüssigkeit vor dem Körper oder der Werth von w, und zwar findet Duchemin dieses Wachsthum besonders abhängig von der Geschwindigkeit, mit welcher die vor dem Körper komprimirte Luft in den hinter dem Körper entstehenden verdünnten Raum überströmt.

Sobald die Geschwindigkeit V so groß wird, daß sich hinter dem Körper ein ganz luftleerer Raum von einiger Bedeutung bildet, was in der Luft von gewöhnlicher Beschaffenheit an der Oberfläche der Erde bei einer Geschwindigkeit von $V = 1323$ Fuß in der Sekunde erfolgt, behält die vorhin erwähnte relative Geschwindigkeit, mit welcher die Luft vor dem Körper entweicht, nahezu denselben Werth, und die Größe w variirt fortan mit der Geschwindigkeit V nur so unbedeutend, daß sie für alle größeren Geschwindigkeiten, als 1323 Fuß in der Sekunde, als konstant angesehen werden kann.

Ist nun

w' das Gewicht der Volumeinheit der Luft im Zustande der Ruhe bei der herrschenden Temperatur und dem stattfindenden Drucke,

V die Geschwindigkeit des gegen den Körper stoßenden Luftstromes oder die Geschwindigkeit des in ruhender Luft bewegten Körpers, während

w das Gewicht der Volumeinheit der dicht vor dem Körper komprimirten Luft darstellt, eine Größe, welche in die Formeln der §§. 165 bis 176 zu substituiren sein würde;

so hat man nach Duchemin

$$w = \left(1 + \frac{V}{1323}\right) w' \quad \ldots . (970)$$

zu setzen, solange $V < 1323$ Fuß pro Sekunde bleibt. Wäre dagegen $V > 1323$ Fuß; so hätte man immer

$$w = 2w' \quad \ldots . (971)$$

zu nehmen.

Nach der Formel (970) leuchtet auch ein, daß für sehr schwache Geschwindigkeiten sehr nahe

$$w = w'$$

ist.

Der obige Gränzwerth von 1323 Fuß für die Geschwindigkeit V, von welcher an aufwärts die Größe w nahezu konstant bleibt, stellt übrigens die Geschwindigkeit dar, mit welcher die Luft in den leeren Raum entströmen würde, wenn sie unpreßbar wäre und sich mit gleichförmiger Dichtigkeit über die Ausflußöffnung bis zu einer Höhe erhöbe, welche im Stande wäre, vor jener Öffnung einen Druck gleich dem atmosphärischen zu erzeugen. Es kommt hierbei nichts darauf an, daß Duchemin annimmt, die eben genannte Geschwindigkeit sei dieselbe, mit welcher sich die Luft vom atmosphärischen Drucke in den leeren Raum ergießen würde. Diese Annahme ist zwar irrig, da man in §. 192 gesehen hat, daß die Geschwindigkeit der Luft bei dem Überströmen in den leeren Raum an solchen Stellen des Gefäßes, wo ihre Dichtigkeit gleich der vom atmosphärischen Drucke wäre, nur 547 Fuß in der Sekunde beträgt; allein Dies hindert nicht, daß der obige Werth von 1323 Fuß, welcher die Ausflußgeschwindigkeit der als unpreßbar gedachten Luft darstellt, dazu geeignet sei, den durch mehrfache Erfahrungen bestätigten Formeln der §§. 165 bis 176, nachdem sie durch den Werth von w resp. aus Gl. (970) oder (971) korrigirt sind, ein Genüge zu leisten.

Ist hiernach

p' der hydrostatische Druck der zu betrachtenden elastischen Flüssigkeit im Zustande der Ruhe auf die Flächeneinheit und

k der von der Temperatur τ und dem spezifischen Gewichte σ der Flüssigkeit abhängige Koeffizient aus Gl. (780), wonach wegen Gl. (777)

$$p' = k w'$$

wäre; so hat man für die vertikale Höhe einer gleichartigen Flüssigkeitssäule, deren Dichtigkeit überall gleich der in den untersten Schichten herrschenden wäre,

$$H = \frac{p'}{w'} = k,$$

und demnach für die Ausflußgeschwindigkeit, welche der Druckhöhe $H = k$ bei einer unpreßbaren Flüssigkeit zukommen würde,

$$\sqrt{2gk}.$$

Für vollkommen trockene Luft würde nach Gleichung (779)

$k = 25343(1 + 0{,}00366\tau)$ sein. Da jedoch die atmosphärische Luft bei ihrer gewöhnlichen Beschaffenheit immer mit etwas Wasserdampf gemischt ist, wodurch ihr spezifisches Gewicht vermindert und ihr Bestreben, bei einer Temperaturerhöhung sich auszudehnen, vermehrt wird; so kann man, wenn es sich um eine Anwendung der obigen Formeln auf die äußere Luft handelt, annehmen, daß Luft von 18° Wärme 850 mal leichter sei, als Wasser von der größten Dichtigkeit, und demnach

$$k = 26112(1 + 0{,}004\tau) \quad \ldots \quad (972)$$

setzen. Dieser Werth von k ist es, durch welchen man bei einer Temperatur von 18°

$$\sqrt{2gk} = 1323 \text{ Fuß}$$

erhält.

Wollte man also sehr streng verfahren; so müßte man statt der Gl. (970)

$$w = \left(1 + \frac{V}{\sqrt{2gk}}\right) w' \quad \ldots \quad (973)$$

annehmen, was besonders dann nothwendig wäre, wenn es sich um Luft oder eine andere elastische Flüssigkeit handelte, deren Temperatur bedeutend von 18° und deren spezifisches Gewicht bedeutend von der Luft in ihrem gewöhnlichen hygroskopischen Zustande abwiche.

Was den Werth des Gewichtes w' der elastischen Flüssigkeit im Ruhezustande unter dem Drucke p' und bei der herrschenden Temperatur τ betrifft; so hat man immer

$$w' = \frac{p'}{k}.$$

Wollte man die Größe w' durch die Beobachtung der Höhe h' eines Quecksilberbarometers bestimmen; so hat man, wenn W das Gewicht einer Volumeinheit Quecksilber darstellt,

$$w' = \frac{W}{k} h'.$$

Da das spezifische Gewicht des Quecksilbers sehr nahe $= 13{,}6$ ist; so hat man für das Gewicht eines Kubikfußes Quecksilber

$$W = 13{,}6 \,.\, 66 = 897{,}6 \text{ Pfund,}$$

und demnach für irgend ein Gas

$$w' = 897{,}6 \,.\, \frac{h'}{k}.$$

Für atmosphärische Luft von der gewöhnlichen Feuchtigkeit würde man, wenn man den Werth von k aus Gl. (972) einführt,

$$w' = \frac{p'}{26112\,(1+0{,}004\tau)} = \frac{h'}{29{,}091\,(1+0{,}004\tau)}, \quad \ldots \quad (974)$$

habe, eine Formel, worin h' in Fußen ausgedrückt sein muß und w' Pfunden gefunden wird. Bei dem mittleren Barometerstande von $h' = 2{,}4215$ Fuß ($= 0{,}76$ Meter) und bei einer mittleren Temperatur von $\tau = 18^0$ erhält man hiernach für das Gewicht eines Kubikfußes atmosphärischer Luft von der gewöhnlichen Feuchtigkeit

$$w' = 0{,}07765 \text{ Pfund,}$$

während das Gewicht eines Kubikfußes ganz trockener Luft von der Temperatur null unter dem nämlichen Drucke in §. 191 zu 0,08586 Pfund angegeben wurde.

Endlich findet auch hier die in §. 165 gemachte Bemerkung statt, daß hinter den in einer Flüssigkeit sich bewegenden Körpern eine gewisse Menge dieser Flüssigkeit, welche von der besonderen Form des Körpers abhängt, mit fortgerissen wird. Bei kugelförmigen Körpern ist das Volum dieser Masse etwa $= 0{,}6$ von dem Volum des Körpers selbst. Sobald also die Bewegung eines Körpers in der Luft zu betrachten wäre, müßte auf die gleichzeitige Fortschaffung der gedachten Luftmasse mit Rücksicht genommen werden. Es leuchtet jedoch ein, daß dieser Umstand nur bei sehr leichten Körpern, z. B. bei Ballons, von Belang sein könnte, wo die Masse der mit fortgerissenen Luft im Vergleich zu der Masse des Körpers selbst einen erheblichen Werth hätte, daß derselbe jedoch füglich vernachlässigt werden dürfte, wenn der Körper ein großes spezifisches Gewicht besäße, wie Dies z. B. bei massiven Metallkugeln der Fall ist.

Von der Bewegung geworfener Körper in widerstehenden Mitteln.

§. 207. Geradlinige Bewegung eines freien Körpers in einem widerstehenden Mittel.

Nehmen wir an, ein Körper bewege sich in geradliniger Richtung fort, indem er von einer stetigen Kraft, die übrigens auch gleich null sein kann, getrieben werde, und dabei fortwährend den Widerstand des umgebenden elastischen Mittels zu ertragen habe. Die Form des Körpers sei von der Art, daß die mittlere Resultante des letzteren Widerstandes genau in die Richtung der Bewegung falle und außerdem durch denselben Punkt gehe, durch welchen die den Körper stetig sollizitirende Kraft wirkt.

Es bezeichne

W das Gewicht des Körpers,

P die stetig auf denselben in der Richtung der Bewegung wirkende Kraft am Ende der Zeit t,

Q den Widerstand des Mittels in einer der Bewegung des Körpers direkt entgegengesetzten Richtung,

s den Abstand des Körpers von irgend einem festen Anfangspunkte seiner Bahn am Ende der Zeit t,

v die Geschwindigkeit des Körpers zu derselben Zeit,

g die Beschleunigung der Schwere für die Zeiteinheit, gleich 31,2644 Fuß in der Sekunde.

Nach dem d'Alembertschen Prinzipe muß Gleichgewicht stattfinden zwischen den auf den Körper angebrachten Kräften und den in entgegengesetzten Richtungen genommenen wirksamen Kräften zu irgend einer Zeit. Em Ende der Zeit t ist nun auf den Körper angebracht

1) die Kraft P, welche entweder in direkter oder in entgegengesetzter Richtung der Bewegung des Körpers wirkt,

2) der Widerstand Q des umgebenden Mittels in einer der Bewegung direkt entgegengesetzten Richtung.

Die wirksame Kraft des Körpers am Ende der Zeit t ist $\frac{W}{g}\frac{dv}{dt}$, da $\frac{W}{g}$ die Masse des Körpers darstellt. Diese Kraft ist nach der Seite der Bewegung gerichtet; eine ihr gleiche und ent-

gegengesetzte Kraft muß demnach eine der Bewegung direkt entgegenlaufende Richtung haben.

Soll nun nach dem d'Alembertschen Prinzipe Gleichgewicht zwischen den Kräften P, Q und der in entgegengesetzter Richtung genommenen wirksamen Kraft $\frac{W}{g}\frac{dv}{dt}$ stattfinden; so hat man, da diese Kräfte sämmtlich in einer geraden Linie liegen,

$$\frac{W}{g}\frac{dv}{dt}+Q-P=o, \qquad \ldots . (975)$$

wenn die Kraft P in direkter Richtung der Bewegung wirkt, und

$$\frac{W}{g}\frac{dv}{dt}+Q+P=o, \qquad \ldots . (976)$$

wenn P in einer der Bewegung des Körpers direkt entgegengesetzten Richtung wirkt.

Nach dem vorhergehenden Paragraphe ist der Widerstand Q eine Funktion der Geschwindigkeit v des Körpers von der allgemeinen Form

$$Q=a(1+\beta v)v^2, \qquad \ldots . (977)$$

worin a und β konstante, nur von der Form des Körpers und der Natur des umgebenden Mittels abhängige Größen sind. Wäre der bewegte Körper z. B. eine Kugel und das Medium atmosphärische Luft; so würde man nach Gl. (736) und (973)

$$Q=0{,}512\frac{Aw'}{2g}\left(1+\frac{v}{\sqrt{2gk}}\right)v^2$$

haben, worin A die Fläche eines größten Kreises der Kugel, w' das Gewicht einer Volumeinheit der Luft (etwa 0,07765 Pfund pro Kubikfuß) und $\sqrt{2gk}$ eine Geschwindigkeit von durchschnittlich 1323 Fuß pro Sekunde darstellte, sodaß in Gl. (977)

$$a=0{,}512\frac{Aw'}{2g},$$

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{2gk}}$$

wäre.

Ist außerdem die in den Körper stetig einwirkende Kraft konstant; so wird P als eine von t und v unabhängige Größe zu betrachten sein, und die Gleichungen (975) und (976) werden vermöge der Gl. (977)

$$\frac{W}{g}\frac{dv}{dt}+a(1+\beta v)v^2 \mp P=o \quad \ldots . (978)$$

Es folgt hieraus

$$dt=-\frac{W}{g}\frac{dv}{a(1+\beta v)v^2 \mp P} \quad \ldots . (979)$$

und da $\frac{ds}{dt}=v$, mithin $ds=v\,dt$ ist,

$$ds=-\frac{W}{g}\frac{v\,dv}{a(1+\beta v)v^2 \mp P} \quad \ldots . (980)$$

In diesen Gleichungen ist von dem Doppelzeichen $\mp$ das obere — zu nehmen, wenn die Kraft P in direkter Richtung der Bewegung wirkt, und das unter +, wenn P in einer der Bewegung direkt entgegengesetzten Richtung wirkt.

§. 208. **Horizontale Bewegung eines geworfenen Körpers in einem widerstehenden Mittel.**

Wenn der Körper in horizontaler Richtung mit einer anfänglichen Geschwindigkeit V fortgeschleudert wird, ohne daß im Verlauf seiner Bewegung irgend eine andere Kraft auf ihn einwirkte, als der Widerstand Q der äußeren Luft, wobei natürlich vorausgesetzt werden müßte, daß er sich auf einer absolut glatten Ebene hinbewegte, welche durchaus keine Reibung gegen die Oberfläche des Körpers äußerte; so würde man in den Formeln des vorhergehenden Paragraphs $P=o$ zu setzen haben. Hierdurch gehen die Gleichungen (979) und (980) über in

$$dt=-\frac{W}{ag}\frac{dv}{(1+\beta v)v^2} \quad \ldots . (981)$$

$$ds=-\frac{W}{ag}\frac{dv}{(1+\beta v)v} \quad \ldots . (982)$$

Die Größe $(1+\beta v)$, worin β eine sehr kleine Zahl, nämlich für gewöhnliche atmosphärische Luft die Zahl $\frac{1}{1323}$ dargestellt, variirt mit der Geschwindigkeit v nur sehr schwach; demnach wird man aus den vorstehenden Formeln immer sehr brauchbare Näherungswerthe erhalten, wenn man für $(1+\beta v)$ einen durchschnittlichen Werth einführt, welcher während der ganzen Dauer der Bewegung innerhalb einer beliebigen Zeit t als konstant angesehen werden kann. Ein solcher durchschnittlicher Werth für $(1+\beta v)$ ist das arithmetische Mittel zwischen dem Werthe $(1+\beta V)$, welchen jene Größe für $t=o$ besitzt, und zwischen dem Werthe $(1+\beta v)$, welchen jene Größe am Ende der Zeit t besitzt. Demnach kann man als Durchschnitt für $(1+\beta v)$

$$\frac{(1+\beta V)+(1+\beta v)}{2}=1+\frac{\beta}{2}(V+v)$$

in die Formeln (981) und (982) substituiren und diesen Werth bei der Integration jener Formeln als Konstante behandeln. Dies ergibt

$$t=-\frac{W}{ag\left[1+\frac{\beta}{2}(V+v)\right]}\int_V^v\frac{dv}{dt}=\frac{W\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{V}\right)}{ag\left[1+\frac{\beta}{2}(V+v)\right]} \quad \ldots \text{(983)}$$

$$s=-\frac{W}{ag\left[1+\frac{\beta}{2}(V+v)\right]}\int_V^v\frac{dv}{v}=\frac{W\log\frac{V}{v}}{ag\left[1+\frac{\beta}{2}(V+v)\right]} \quad \ldots \text{(984)}$$

Durch diese beiden Gleichungen ist die Bewegung des Körpers vollkommen bestimmt; man erhält aus der ersteren die Zeit t und aus der letzteren den Raum s, am Ende welcher irgend eine Geschwindigkeit v herrscht. In der letzteren Gleichung be-

deutet log einen natürlichen Logarithmus, und man hat, wenn man sich der gewöhnlichen Logarithmen bedienen wollte,

$$\log.\ \text{nat.}\ n = 2{,}30258 \log.\ \text{vulg.}\ n.$$

Man erkennt aus diesen Gleichungen, daß die Geschwindigkeit v mit der Zeit t immer mehr und mehr abnimmt und sich dem Werthe null nähert, welchen dieselbe jedoch erst am Ende einer unendlich langen Zeit und in einem unendlich großen Abstande vom Ausgangspunkte erreichen würde.

Die aus Gl. (984) gezogenen Resultate stimmen nach Duchemin mit den Versuchen von Hutton über horizontal abgeschossene Metallkugeln sehr gut überein.

Wenn man die Größe $\left[1+\frac{\beta}{2}(V+v)\right]$, welche mit V und v nur schwach variirt und nach §. 206, streng genommen, stets zwischen 1 und 2 liegen soll, der Kürze wegen mit B bezeichnet und bei der nachstehenden Betrachtung als Konstante behandelt; so ergibt eine Elimination von v zwischen den beiden Gleichungen (983) und (984)

$$s = \frac{W}{agB} \log\left(1 + \frac{agB}{W} V t\right) \qquad \ldots . (985)$$

Solange t ungemein klein, und mithin $\frac{agB}{W} V t$ ein sehr kleiner echter Bruch ist, hat man nahezu $\log\left(1+\frac{agB}{W}Vt\right) = \frac{agB}{W} V t$ und mithin nach der vorstehenden Gleichung nahezu

$$s = V t \qquad \ldots . (986)$$

Wenn jedoch t sehr groß ist, sodaß man die Einheit gegen die Größe $\frac{agB}{W} V t$ vernachlässigen kann, hat man sehr nahe

$$s = \frac{W}{agB} \log \frac{agB}{W} V t \qquad \ldots . (987)$$

für ganz außerordentlich große Werthe von t, für welche man in dem Ausdrucke $\log \frac{agB}{W} V t = \log \frac{agB}{W} V + \log t$ das erste Glied

gegen das zweite übersehen kann, nahezu

$$s = \frac{W}{agB} \log. t \quad \ldots \ldots (988)$$

Aus der Betrachtung der beiden Gleichungen (986) und (988) folgt: Wenn zwei Körper M und N, welche beide genau dieselbe Form haben, sodaß der Widerstand der Luft für beide derselbe ist, ein verschiedenes spezifisches Gewicht besitzen, sodaß das Gewicht W des ersteren kleiner, als das des zweiten ist, und man wirft beide in horizontaler Richtung fort, den ersteren, leichteren, mit einer größeren, den zweiten, schwereren, mit einer kleineren anfänglichen Geschwindigkeit V; so wird anfangs der erste Körper dem zweiten voraneilen; nach Verlauf einer gewissen Zeit überholt jedoch der zweite Körper den ersten und eilt diesem fortan stets voraus, wie groß auch die anfängliche Geschwindigkeit des ersten Körpers gewesen und wie wenig auch der zweite Körper schwerer sein möge, als der erste.

Hieraus erkennt man, daß wenn aus einer Flinte mit einer sehr starken Pulverladung zuvörderst eine hohle Papierkugel und dann einmal mit einer äußerst schwachen Ladung eine Bleikugel von demselben Durchmesser geschossen würde, die erstere zwar mit einer ungleich größeren Geschwindigkeit fortgeschleudert werden und demnach in den ersten Stadien der Bewegung der Bleikugel voreilen würde, in den späteren Stadien aber jedenfalls hinter der Bleikugel zurückbleiben müßte. Es wird hierbei natürlich davon abgesehen, daß beide Kugeln, nachdem sie die Flinte verlassen haben, vermöge ihrer Schwere allmählig zu Boden gezogen werden.

§. 209. Geradlinige Bewegung eines geworfenen Körpers in einem widerstehenden Mittel, wenn die stetig in denselben wirkende Kraft konstant ist.

Sobald in den mit der Anfangsgeschwindigkeit V fortgestoßenen und geradlinig sich weiterbewegenden Körper eine stetige Kraft P einwirkt, welche zu allen Zeiten den nämlichen Werth hat; so wird P in den Gleichungen (979) und (980) eine konstante Größe sein.

Betrachten wir zuvörderst den Fall, wo die Kraft P der Bewegung des Körpers direkt entgegen wirkt, wo also in jenen Gleichungen $+P$ zu nehmen ist. Außerdem werde, wie im vorhergehenden Paragraph, für $1+\beta v$ der mittlere Werth

$$1+\frac{\beta}{2}(V+v)=B \quad \ldots . (989)$$

substituirt, welcher bei den Integrationen zwischen den Gränzen von $t=o$ und $v=V$ bis $t=t$ und $v=v$ als Konstante behandelt wird. Alsdann erhält man aus den genannten Gleichungen

$$t=-\frac{W}{gP}\int_V^v \frac{dv}{\frac{aB}{P}v^2+1},$$

$$s=-\frac{W}{gP}\int_V^v \frac{v\,dv}{\frac{aB}{P}v^2+1}.$$

Eine gehörig ausgeführte Integration dieser beiden Gleichungen ergibt

$$t=\frac{W}{gP}\sqrt{\frac{P}{aB}}\left(\operatorname{arc\,tang} V\sqrt{\frac{aB}{P}}-\operatorname{arc\,tang} v\sqrt{\frac{aB}{P}}\right) \ldots . (990)$$

$$s=\frac{W}{2g\,aB}\log\left(\frac{aB\,V^2+P}{aB\,v^2+P}\right) \quad \ldots . (991)$$

Man erkennt aus diesen Gleichungen, daß die Geschwindigkeit v mit der Zeit t und mit der Entfernung s abnimmt, und daß dieselbe nach Verlauf einer gewissen Zeit T und am Ende eines gewissen Raumes S gleich null wird. Die Werthe von T und S, welche dem Punkte entsprechen, wo der Körper zur Ruhe kommt, und wo die Gültigkeit der vorstehenden beiden Formeln aufhört, sind, wenn der entsprechende Werth von B mit

$$B'=1+\frac{\beta}{2}V$$

bezeichnet wird.

$$T = \frac{W}{gP}\sqrt{\frac{P}{aB'}}\,\mathrm{arctang}\,V\sqrt{\frac{aB'}{P}} \quad \ldots . (992)$$

$$S = \frac{W}{agaB'}\log\left(\frac{aB'}{P}V^2+1\right) \quad \ldots . (993)$$

Wenn der hier betrachtete Körper auf einer horizontalen Ebene fortgeschleudert wird; so stellt P die Reibung dar, welche der Körper auf dieser Ebene erfährt, und welche als eine von der Geschwindigkeit des Körpers unabhängige Kraft angesehen wird.

Würde der Körper auf einer geneigten Ebene bergan geworfen; so stellt P die Summe aus der Reibung, welche der Körper auf dieser Ebene erleidet und der Komponente des Gewichtes W des Körpers, parallel zur Ebene, dar.

Bewegte sich der Körper auf einer geneigten Ebene abwärts; so würde P die Differenz zwischen der Komponente des Gewichtes W parallel zur Ebene sein; damit aber die vorstehenden Formeln auf diesen Fall Anwendung finden könnten, müßte nothwendig die gedachte Differenz positiv oder die Reibung größer sein, als die fragliche Komponente des Gewichtes W.

Die obigen Gleichungen stellen auch die Gesetze für die Bewegung eines schweren Körpers dar, welcher vertikal aufwärts geworfen wird; man hat alsdann P = W. Die Höhe S, bis zu welcher sich ein mit der Geschwindigkeit V in der Luft vertikal aufwärts geworfener Körper erhebt, ist sonach

$$S = \frac{W}{2gaB'}\log\left(\frac{aB'}{W}V^2+1\right) \quad \ldots . (994)$$

Wäre V sehr groß oder das Gewicht W des Körpers sehr klein, sodaß die Einheit gegen die Größe $\frac{aB'}{W}V^2$ verschwände; so würde nahezu

$$S = \frac{W}{2gaB'}\log\frac{aB'}{W}V^2 \quad \ldots . (995)$$

werden.

Wäre jedoch V sehr klein oder das Gewicht W des Körpers sehr groß, sodaß $\frac{aB'}{W}V^2$ ein kleiner echter Bruch würde und man

näherungsweise $\log\left(\frac{aB'}{W}V^2+1\right)=\frac{aB'}{W}V^2$ setzen könnte; so hätte man nahezu

$$S=\frac{V^2}{2g}, \quad \ldots . (996)$$

ein Werth, welcher der Höhe entspricht, bis zu der sich der Körper im luftleeren Raume genau erheben würde.

Betrachten wir jetzt den zweiten Fall, wo die konstante Kraft P in der direkten Richtung der Bewegung des Körpers wirkt, wo also in den Gleichungen (979) und (980) —P zu nehmen ist; so erhält man unter der nämlichen Voraussetzung, wie vorhin, daß die Größe B für die Dauer irgend einer Zeit t den konstanten Werth aus Gl. (989) habe,

$$t=-\frac{W}{gP}\int_V^v \frac{dv}{\frac{aB}{P}v^2-1},$$

$$s=-\frac{W}{gP}\int_V^v \frac{v\,dv}{\frac{aB}{P}v^2-1},$$

Hieraus ergibt sich nach gehöriger Integration

$$t=\frac{W}{2gP}\sqrt{\frac{P}{aB}}\log\left\{\left(\frac{V\sqrt{\frac{aB}{P}}-1}{V\sqrt{\frac{aB}{P}}+1}\right)\left(\frac{v\sqrt{\frac{aB}{P}}+1}{v\sqrt{\frac{aB}{P}}-1}\right)\right\} \quad \ldots . (997)$$

$$s=\frac{W}{2gaB}\log\left(\frac{aBV^2-P}{aBv^2-P}\right) \quad \ldots . (998)$$

Die vorstehenden Formeln finden Anwendung auf den Fall, wo ein Körper auf einer geneigten Ebene hinabgleitet, wenn die Differenz zwischen der Komponente des Gewichtes W parallel zur Ebene und der auf dieser Ebene stattfindenden Reibung,

eine Differenz, welche hier durch P dargestellt werden würde, positiv ist, oder wenn die Intensität der auf den Körper wirkenden Schwere die Reibung auf der geneigten Ebene überwiegt.

Ferner gelten diese Gleichungen für den freien vertikalen Fall der schweren Körper in der Richtung von oben nach unten, wobei dann P einfach $= W$ wird. Man hat hierbei zwei besondere Umstände zu unterscheiden: erstens, wenn

$$V\sqrt{\frac{aB}{W}} < 1 \text{ oder } V < \sqrt{\frac{P}{aW}}$$

ist. Alsdann muß nothwendig auch stets

$$v\sqrt{\frac{aB}{W}} < 1 \text{ oder } v < \sqrt{\frac{W}{aB}}$$

bleiben, damit der Logarithmus in Gl. (997) und (998) nicht imaginär werde. Die Geschwindigkeit v wächst unter diesen Umständen mit der Zeit t, jedoch nicht ins Unendliche, sondern strebt einem Gränzwerthe entgegen, welcher durch

$$v = \sqrt{\frac{P}{aB}} \quad \ldots \text{ (999)}$$

dargestellt ist, und welcher durchaus nicht bei dem freien Falle eines Körpers in der Luft überschritten werden kann.

Zweitens, wenn

$$V\sqrt{\frac{aB}{W}} > 1 \text{ oder } V > \sqrt{\frac{W}{aB}}$$

ist; so muß aus den nämlichen Gründen, wie vorhin, auch stets

$$v\sqrt{\frac{aB}{W}} > 1 \text{ oder } v > \sqrt{\frac{W}{aB}}$$

bleiben. Die Geschwindigkeit v des Körpers nimmt alsdann mit der Zeit t ununterbrochen ab, ohne jedoch jemals unter den Gränzwerth aus Gl. (999) herabzusinken.

Wäre die Anfangsgeschwindigkeit V des fallenden Körpers gleich null; so hätte man

$$t=\frac{1}{2g}\sqrt{\frac{W}{aB}}\log\left(\frac{1+v\sqrt{\frac{aB}{W}}}{1-v\sqrt{\frac{aB}{W}}}\right) \quad \ldots\ldots (1000)$$

$$s=\frac{W}{2g\,aB}\log\left(\frac{1}{1-\frac{aB}{W}v^2}\right), \quad \ldots\ldots (1001)$$

worin $B=1+\frac{\beta}{2}v$ wäre.

Die vorstehenden beiden Formeln finden sich nach Duchemin in Übereinstimmung mit den Beobachtungen von Newton, Desaguillers und Prony über den vertikalen Fall leichter und schwererer Kugeln in der Luft.

Um die Geschwindigkeit zu bestimmen, welche ein mit der Geschwindigkeit V vertikal aufwärts geworfener Körper in dem Augenblicke besitzt, wo er bei seinem Rückfalle in dem Ausgangspunkte wiederum anlangt, hat man den Werth von S aus Gl. (994) statt s in Gl. (1001) zu substituiren und diese Gleichung alsdann für v aufzulösen. Sieht man hierbei B als eine Konstante an, in deren Ausdrucke man für v allenfalls den Werth V substituiren könnte, sodaß $B=B'=1+\frac{\beta}{2}V$ würde; so ergibt sich

$$v=\frac{V}{\sqrt{1-\frac{aB'}{W}V^2}} \quad \ldots\ldots (1002)$$

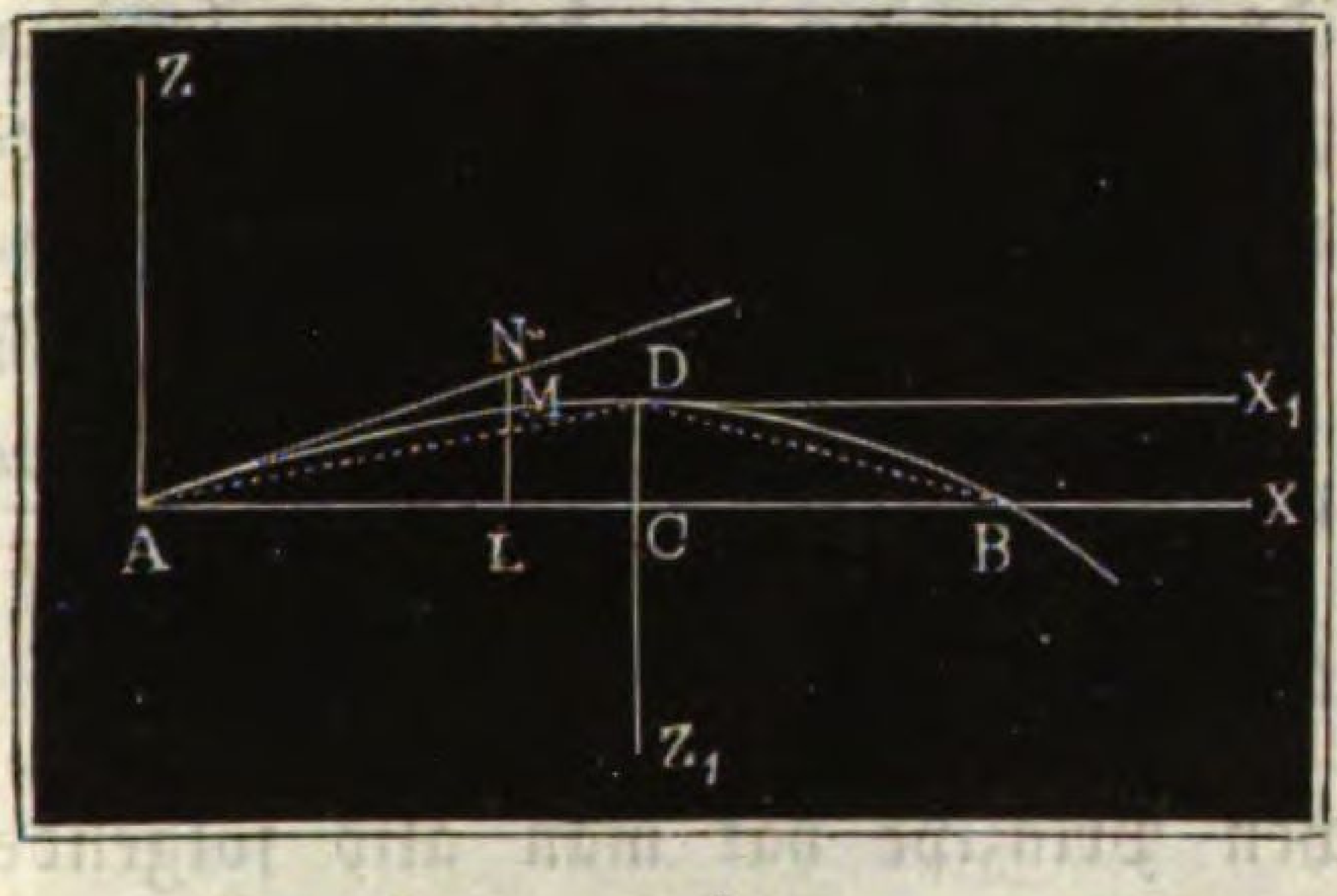
Wenn V sehr klein oder W sehr groß ist, wird v nahezu $=V$. Ist dagegen V sehr groß oder W sehr klein; so wird nahezu

$$v=\sqrt{\frac{W}{aB'}},$$

also nahezu gleich dem Gränzwerthe, welchem die Geschwindigkeit eines in der Luft vertikal herabfallenden Körpers entgegenstrebt.

§. 210. Krummlinige Bewegung eines in der Luft geworfenen schweren Körpers.

Der in den früheren Paragraphen betrachtete Körper werde mit einer gewissen anfänglichen Geschwindigkeit in der Richtung AN, welche mit dem Horizonte AX einen beliebigen Winkel NAX einschließe, fortgeschleudert, und nehme in Folge der Einwirkung der Schwere und des Widerstandes der Luft die Bahn AMDB an. Wir setzen hierbei einen Körper von solcher Form voraus, daß er in allen Lagen denselben Widerstand der Luft zu ertragen fähig sei, was, streng genommen, nur bei der Kugelgestalt möglich ist. Da die Wurflinie in den meisten Fällen der Wirklichkeit in allen Punkten nur eine sehr schwache Krümmung besitzt; so können wir auch annehmen, daß der Widerstand der Luft gegen den Körper in tangentialer Richtung zu der Bahn des Letzteren eben derselbe sei, welcher stattfinden würde, wenn sich der Körper geradlinig mit der nämlichen Geschwindigkeit in der Richtung der Tangente fortbewegte. Nun sei



C die anfängliche Geschwindigkeit des Körpers im Ausgangspunkte A nach der Richtung AN,

U und V die Komponenten dieser Geschwindigkeit resp. in horizontaler Richtung AX und in vertikaler Richtung AZ,

u und v die ähnlichen Komponenten der Geschwindigkeit c des Körpers am Ende der Zeit t, wo sich derselbe im Punkte M befinde,

x und z die horizontale und vertikale Ordinate AL und LM des Punktes M, wobei die positiven vertikalen Ordinaten in der Richtung AZ von unten nach oben gerechnet werden,

φ der Neigungswinkel der Tangente an die Wurflinie bei M gegen die Horizontale AX.

Am Ende der Zeit t wirkt auf den Körper die Schwere in vertikaler Richtung abwärts mit der Kraft W. Ferner der Wi-

derstand der Luft in tangentialer Richtung an die Wurflinie und nach einer der Bewegung des Körpers direkt entgegengesetzten Seite mit einer Kraft $a\mathrm{B}c^2$, worin $\mathrm{B}=(1+\beta c)$ ist; die horizontale Komponente dieses Widerstandes ist $a\mathrm{B}c^2\cos\varphi$ oder $=a\mathrm{B}cu$, da man $c\cos\varphi=u$ hat; die vertikale Komponente ist $a\mathrm{B}c^2\sin\varphi$ oder $=a\mathrm{B}cv$, da man $c\sin\varphi=v$ hat, und letztere wirkt von oben nach unten, solange der Körper im Steigen begriffen ist, und von unten nach oben, sobald der Körper herabsinkt. Die wirksame Kraft des Körpers am Ende der Zeit t ist $\frac{\mathrm{W}}{g}\frac{dc}{dt}$; die horizontale Komponente hiervon hat den Werth $\frac{\mathrm{W}}{g}\frac{du}{dt}$ und die vertikale Komponente den Werth $\frac{\mathrm{W}}{g}\frac{dv}{dt}$.

Nach dem d'Alembertschen Prinzipe hat man also folgende beide Gleichungen

$$\frac{\mathrm{W}}{g}\frac{du}{dt}+a\mathrm{B}cu=o \qquad \ldots (1003)$$

$$\frac{\mathrm{W}}{g}\frac{dv}{dt}+a\mathrm{B}cv\pm\mathrm{W}=o \qquad \ldots (1004)$$

In der letzteren dieser beiden Gleichungen ist das Zeichen + zu nehmen, solange der Körper ansteigt, und das Zeichen —, solange derselbe herabfällt.

In diesen Gleichungen ist

$$c=\sqrt{u^2+v^2}$$

und demnach auch

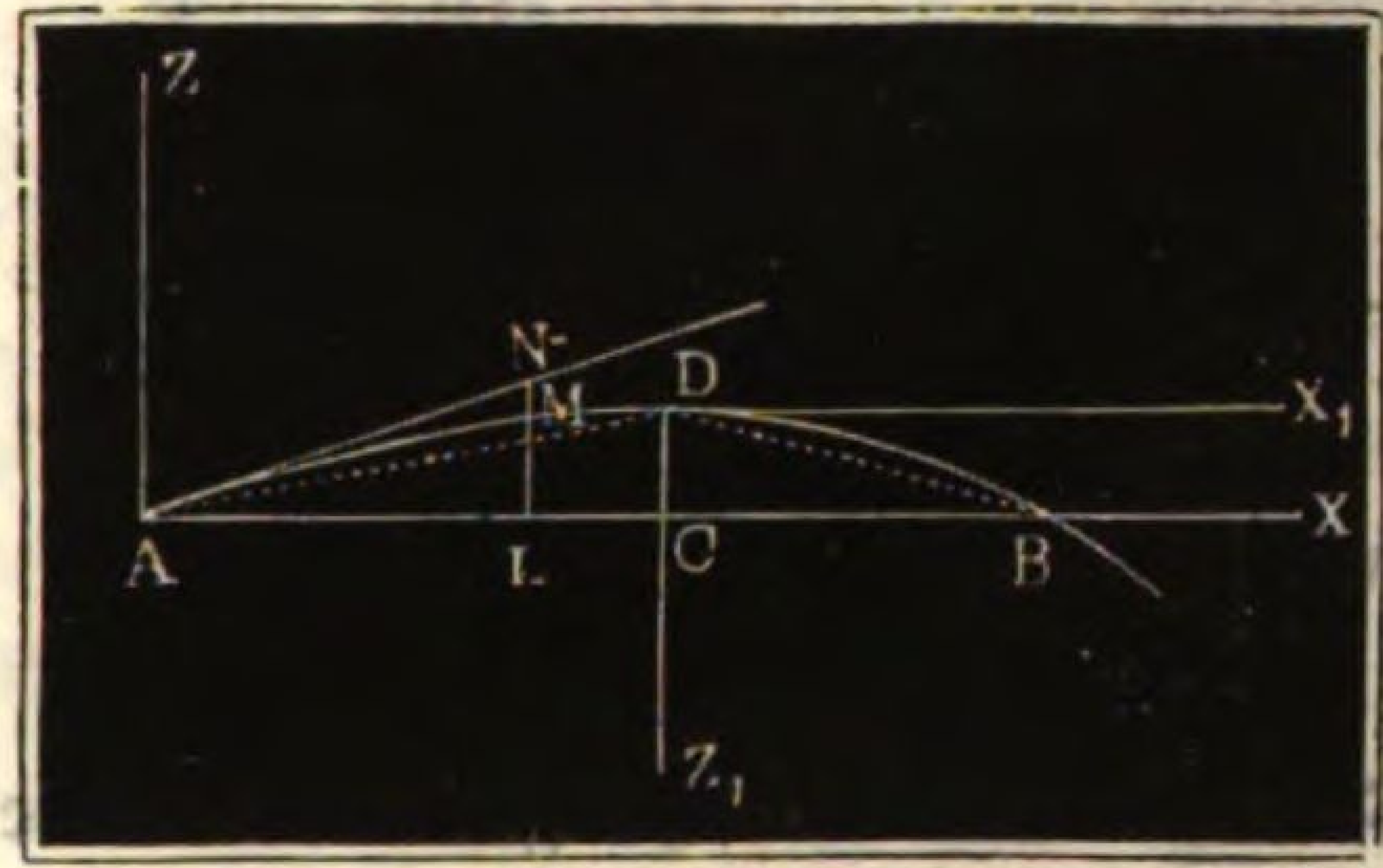
$$\mathrm{B}=1+\beta c=1+\beta\sqrt{u^2+v^2}.$$

Bei strenger Berücksichtigung dieser Werthe von c und B würde die Integration der obigen Gleichungen sehr schwierig werden und zu überaus unbequemen Formeln führen. Demnach muß man zur Erzielung praktischer Näherungsformeln seine Zuflucht zu einigen Vereinfachungen nehmen, welche dazu beitragen können, die angedeuteten Schwierigkeiten zu beseitigen, ohne dadurch das Resultat wesentlich von der Wahrheit zu verrücken.

Zu diesem Zwecke beschränken wir die gegenwärtige Untersuchung auf kugelförmige Körper von bedeutendem spezifischen Gewichte, bei welchen also der Widerstand der Luft für die ge-

wöhnlichen Geschwindigkeiten nicht zu überwiegend ist gegen die übrigen darauf wirkenden Kräfte.

In den genannten Fällen wird die Wurflinie ADB sich nicht sehr weit von einer Parabel entfernen, welche der Körper genau beschreiben würde, wenn kein widerstehendes Mittel vorhanden wäre. Ist D der höchste Punkt der Wurflinie; so wird der Winkel DAC $=\alpha$ sehr nahe gleich dem Winkel sein, welchen die Sehne AD mit dem Horizonte in der fraglichen Parabel bilden würde; man hätte also näherungsweise



$$\tang \alpha = \frac{\frac{V^2}{2g}}{\frac{UV}{g}} = \frac{V}{2U}, \quad \ldots \text{ (1005)}$$

da $\frac{V^2}{2g}$ die Höhe CD und $\frac{UV}{g}$ die dem höchsten Punkte D entsprechende Abszisse sein würde, wenn sich der Körper im luftleeren Raume bewegte.

In den Gleichungen (1003) und (1004) hat man $c=\frac{u}{\cos\varphi}$ oder $c=\frac{v}{\sin\varphi}$ zu setzen. Sieht man nun hierin den Winkel φ als konstant an, indem man dafür als mittleren Werth den Winkel DAX $=\alpha$ substituirt, also in Gl. (1003)

$$\left.\begin{aligned} c &= \frac{u}{\cos\alpha} = u\frac{\sqrt{4U^2+V^2}}{2U} \\ B &= 1+\frac{\beta}{\cos\alpha}u = 1+\frac{\beta\sqrt{4U^2+V^2}}{2U}u \end{aligned}\right\} \ldots \text{ (1006)}$$

und in Gl. (1004)

$$\left.\begin{aligned} c &= \frac{v}{\sin\alpha} = v\,\frac{\sqrt{4\,U^2 + V^2}}{V} \\ B &= 1 + \frac{\beta}{\sin\alpha}\,v = 1 + \frac{\beta\sqrt{4\,U^2 + V^2}}{V}\,v \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1007)$$

einführt; so ergibt sich

$$\frac{W}{g}\,\frac{du}{dt} + \frac{aB}{\cos\alpha}\,u^2 = o \qquad \ldots \quad (1008)$$

$$\frac{W}{g}\,\frac{dv}{dt} + \frac{aB}{\sin\alpha}\,v^2 \pm W = o \qquad \ldots \quad (1009)$$

Wenn in der letzteren dieser beiden Gleichungen das untere Zeichen — genommen wird; so gelten dieselben als Näherungsformeln auch für den absteigenden Theil DB der Wurflinie, da der Winkel DBA unter den gemachten Voraussetzungen sehr nahe $= DAB = \alpha$ ist. Im übrigen kann man den Werth des Winkels DBA, wie aus Nachstehendem hervorgehen wird, noch etwas genauer bestimmen, was besonders dann anzurathen sein würde, wenn der tiefste zu bestimmende Punkt B im absteigenden Schenkel der Kurve höher oder tiefer liegt, als die durch A gezogene Horizontale AX.

Behandelt man nun Gl. (1008) wie Gl. (981), und Gl. (1009) wie die ähnliche Gleichung des ersten Falles in §. 209, indem man die Größe B für irgend einen Zeitraum t immer als konstant ansieht und demnach für Gl. (1008)

$$B = 1 + \frac{\beta}{2\cos\alpha}\,(U + u)$$

und für Gl. (1009)

$$B = 1 + \frac{\beta}{2\sin\alpha}\,(V + v)$$

setzt, ferner die Beziehungen $\frac{dx}{dt} = u$ und $\frac{dz}{dt} = v$ berücksichtigt; so ergeben sich für den ansteigenden Theil AD der Wurflinie die Gleichungen

$$t = \frac{W\cos\alpha}{agB}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{U}\right) \quad \ldots \quad (1010)$$

$$x = \frac{W \cos \alpha}{a g B} \log \frac{U}{u} \quad \ldots . (1011)$$

$$t = \frac{1}{g} \sqrt{\frac{W \sin \alpha}{a B}} \left(\operatorname{arc tang} V \sqrt{\frac{aB}{W \sin \alpha}} - \operatorname{arc tang} v \sqrt{\frac{aB}{W \sin \alpha}} \right) \quad \ldots . (1012)$$

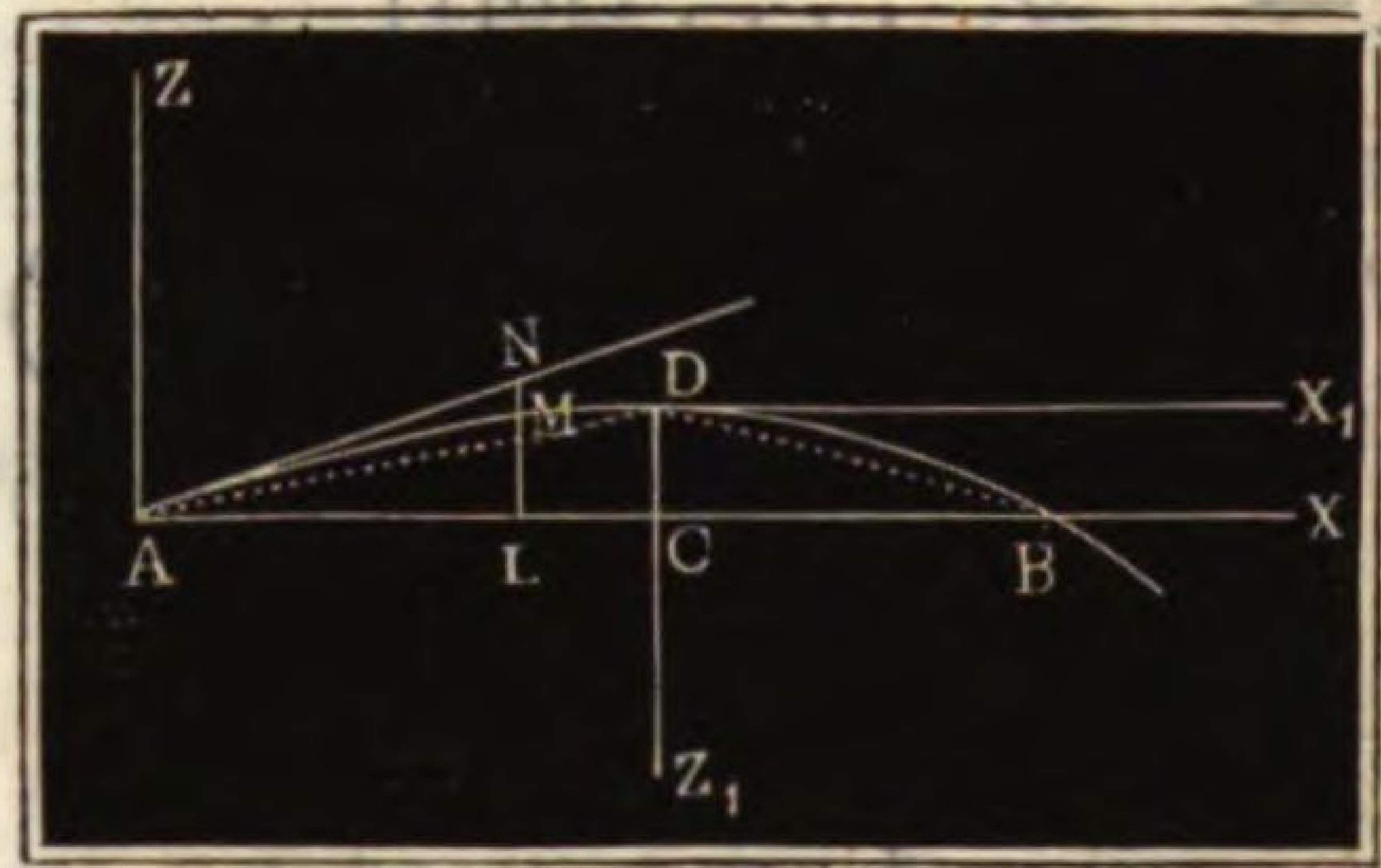
$$z = \frac{W \sin \alpha}{2 a g B} \log \left(\frac{\frac{aB}{W \sin \alpha} V^2 + 1}{\frac{aB}{W \sin \alpha} v^2 + 1} \right) \quad \ldots . (1013)$$

Aus diesen Gleichungen erhält man die Größen u, v, x, z, welche Ein und demselben Zeitmomente entsprechen; die Kenntniß der zusammengehörigen Koordinaten x und z Ein und desselben Punktes M der Wurflinie führt aber zu der Konstruktion dieser Linie selbst. Man könnte die Gleichung der fraglichen Kurve unmittelbar herstellen, wenn man die beiden Werthe von t aus den Gleichungen (1010) und (1012) einander gleich setzte und dann für u den aus Gl. (1011) sich ergebenden Werth in x und für v den aus Gl. (1013) sich ergebenden Werth in z substituirte.

Setzt man in Gl. (1013) $v = o$; so ergibt der entsprechende Werth von z die Höhe CD, bis zu welcher sich der Körper über den Horizont erhebt. Aus Gl. (1012) erhält man für $v = o$ die Zeit t, während welcher der Punkt D erreicht wird. Dieser Werth von t, in Gl. (1010) substituirt, läßt die Geschwindigkeit u erkennen, welche im Punkte D in horizontaler Richtung stattfindet. Setzt man den letzteren Werth von u in Gl. (1011); so ergibt sich die horizontale Abszisse $x = AC$ des höchsten Punktes D der Wurflinie.

Bezeichnen wir den solchergestalt aus Gl. (1010) gefundenen Werth für die im höchsten Punkte D der Wurflinie herrschende Geschwindigkeit mit U_1; so reduzirt sich die Bestimmung des absteigenden Theiles DB der Wurflinie auf die Bestimmung der Kurve, welche derselbe Körper beschreiben würde, wenn er mit einer horizontalen Anfangsgeschwindigkeit $= U_1$ fortgestoßen würde.

Rechnen wir demnach vom Punkte D aus die horizontalen



Abszissen x, wie vorhin, in der Richtung DX_1, die vertikalen Ordinaten z aber in der Richtung DZ_1 von oben nach unten. Bezeichnen wir ferner die Koordinaten BC und DC des tiefsten Punktes B, bis zu welchem die Bewegung des Körpers betrachtet werden soll, resp. mit X und Z und den Winkel DBC mit α, sodaß man

$$\frac{Z}{X} = \operatorname{tang} \alpha$$

hat. Setzt man alsdann in Gl. (1008)

$$B = 1 + \frac{\beta}{2 \cos \alpha}(U_1 + u)$$

und in Gl. (1009)

$$B = 1 \pm \frac{\beta}{2 \sin \alpha} v,$$

indem man gleichzeitig in der letzteren Gleichung das untere Zeichen — gelten läßt; so erhält man, da jetzt auch wieder $\frac{dx}{dt} = u$ und $\frac{dz}{dt} = v$ ist, aus der ersteren, wie vorhin,

$$t = \frac{W \cos \alpha}{a g B}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{U_1}\right), \quad \ldots \ldots (1014)$$

$$x = \frac{W \cos \alpha}{a g B} \log \frac{U_1}{u}, \quad \ldots \ldots (1015)$$

und aus der letzteren, wie im zweiten Falle des §s 209 für $V = o$,

$$t = \frac{1}{2g}\sqrt{\frac{W \sin \alpha}{aB}} \log \left(\frac{1 + v\sqrt{\frac{aB}{W \sin \alpha}}}{1 - v\sqrt{\frac{aB}{W \sin \alpha}}} \right) \quad \ldots \ldots (1016)$$

$$z = \frac{W}{2agB} \log\left(\frac{1}{1 - \frac{aB}{W \sin\alpha} v^2}\right) \quad \ldots . (1017)$$

Diese vier Gleichungen bestimmen den absteigenden Theil DB der Wurflinie in ähnlicher Weise, wie die vier Gleichungen (1010) bis (1013) den aufsteigenden Theil AD.

Würde der Körper mit der horizontalen Anfangsgeschwindigkeit U_1 im leeren Raume geworfen; so bildete die Kurve DB eine Parabel, deren Gleichung

$$x = U_1 \sqrt{\frac{2z}{g}}$$

wäre. Nimmt man nun zur näherungsweisen Bestimmung des in den letzteren Gleichungen vorkommenden Winkels $DBC = \alpha$ an, der Punkt B liege in der eben gedachten Parabel; so würde man, wenn $DC = Z$ und $CB = X$ gesetzt wird,

$$\tan g\,\alpha = \frac{Z}{X} = \frac{1}{U_1}\sqrt{\frac{gZ}{2}} \quad \ldots . (1018)$$

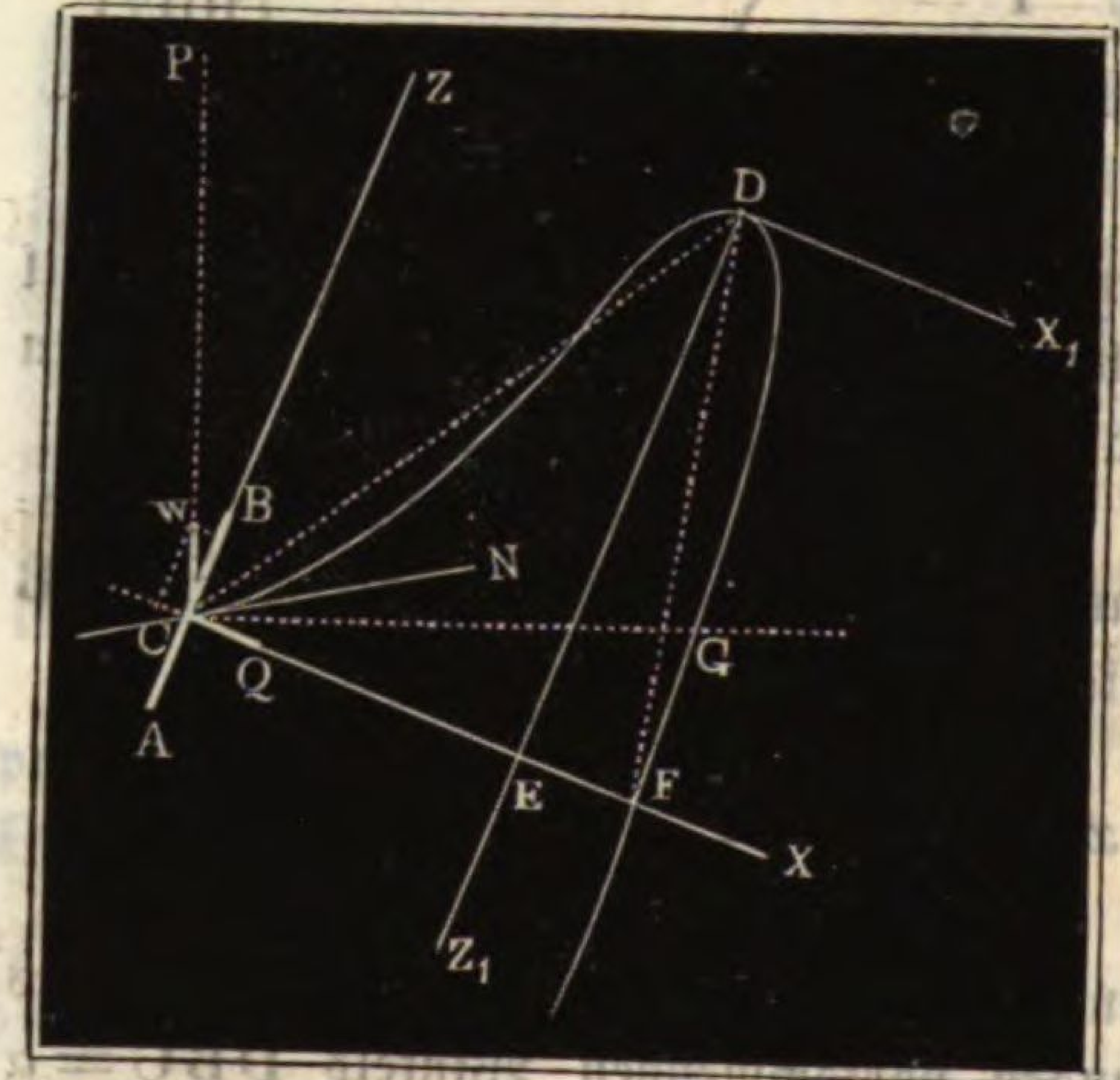
haben.

§. 211. Bewegung einer in der Luft geworfenen dünnen ebenen Scheibe.

In den vorstehenden Paragraphen haben wir die Bewegung eines schweren Körpers betrachtet, welcher seiner Form zufolge die Eigenschaft besaß, daß die Gesammtwirkung des widerstehenden Mittels gegen die Oberfläche dieses Körpers sich in eine Resultante zusammensetzte, welche nicht bloß zu allen Zeiten durch den Schwerpunkt des Körpers ging, sondern auch stets nach direkt entgegengesetzter Seite der Bewegung des Körpers gerichtet war.

Im Nachfolgenden wollen wir einen Körper von solcher Form voraussetzen, daß die Resultante der Widerstände des umgebenden Mediums zwar ebenfalls stets durch dessen Schwerpunkt geht, aber nicht mit der Richtung der Bewegung dieses Körpers zusammenfällt.

Der einfachste hierher gehörige Fall, auf welchen die Unter-



suchung auch beschränkt bleiben soll, ist der, wo der bewegte Körper in einer dünnen ebenen Scheibe AB besteht, welche nach einer beliebigen Richtung CN hin geworfen wird und dabei gleichzeitig der Einwirkung der Schwere und dem Widerstande der umgebenden Luft ausgesetzt ist. Der letztere Widerstand bildet alsdann immer eine Kraft Q, welche in normaler Richtung QC gegen die Vorderfläche der Scheibe gerichtet ist. Ihr Ausdruck ist nach Gl. (730) und §. 206

$$Q = \frac{2\sin\varphi}{1+\sin^2\varphi}\,\varrho\, w\, A\, \frac{c^2}{2g} = \frac{2\sin\varphi}{1+\sin^2\varphi}\,\varrho(1+\beta c)\, w'\, A\, \frac{c^2}{2g},$$

worin

A die Größe der Fläche AB,

φ den Neigungswinkel der Richtung der Bewegung gegen die Ebene AB zu irgend einer Zeit,

c die Geschwindigkeit der Scheibe zu derselben Zeit in der Richtung CN,

w' das Gewicht der Volumeinheit der äußeren Luft nach §. 206,

β den Koeffizienten $\frac{1}{\sqrt{2gk}}$ aus Gl. (973) und

ϱ den Widerstandskoeffizienten 1,254 nach §. 169

darstellt. Setzt man der Kürze wegen

$$\varrho\frac{A\, w'}{2g} = a;$$

so wird der vorstehende Ausdruck

$$Q = \frac{2\sin\varphi}{1+\sin^2\varphi}\, a(1+\beta c)c^2 \quad \ldots \quad (1019)$$

Außerdem wirkt auf die gegebene Scheibe die Schwere mit der Intensität des Gewichtes W dieser Scheibe in vertikaler Richtung WC abwärts.

Um die Bewegung dieser Scheibe zu bestimmen, sei die Koordinatenebene der xz diejenige Vertikalebene, welche zugleich durch die Normale CQ der Ebene AB geht, und es werde der Einfachheit wegen angenommen, die Richtung CN der anfänglichen Geschwindigkeit der Scheibe liege ebenfalls in dieser Vertikalebene. Die Normale CX sei die Axe der x, und die Durchschnittslinie CZ der eben gedachten Vertikalebene mit der Ebene der Scheibe AB sei die Axe der z.

Da die auf die Scheibe wirkenden Kräfte W und Q zu jeder Zeit durch den Schwerpunkt C derselben gehen; so folgt, daß keine Umdrehungsbewegung der Scheibe um ihren Schwerpunkt stattfinden kann, daß mithin diese Scheibe zu allen Zeiten ihrer ursprünglichen Lage parallel bleiben wird.

Bezeichnet demnach

γ den konstanten Neigungswinkel WCB der Vertikalen gegen die Scheibenfläche,

u, v die Komponenten der Geschwindigkeit c der Scheibe resp. in parallelen Richtungen zu CX und CZ am Ende irgend einer Zeit t,

U, V die anfänglichen Werthe dieser Komponenten für $t=o$, wofür auch $c=C$ sei,

φ_1 den anfänglichen Werth BCN des Winkels φ für $t=o$;

so erhält man mit Hülfe des d'Alembertschen Prinzipes, wenn man alle auf die Scheibe angebrachten Kräfte und auch die wirksame Kraft $\frac{W}{g}\frac{dc}{dt}$ in ihre Komponenten parallel zu den Axen CX und CZ zerlegt, und außerdem in Gl. (1019) $c=\frac{u}{\sin\varphi}$ substituirt, sodaß dadurch

$$Q=\frac{2}{\sin\varphi\,(1+\sin^2\varphi)}\,a\left(1+\frac{\beta}{\sin\varphi}u\right)u^2 \quad \ldots . (1020)$$

oder abgekürzt

$$Q=faBu^2 \quad \ldots . (1021)$$

wird, ähnlich wie in §. 210

$$\frac{W}{g}\frac{du}{dt}+faBu^2-W\sin\gamma=o \quad \ldots\ldots (1022)$$

$$\frac{W}{g}\frac{dv}{dt}\pm W\cos\gamma=o \quad \ldots\ldots (1023)$$

In der letzteren dieser beiden Gleichungen ist das obere Zeichen + zu nehmen, solange die Richtung CN der Geschwindigkeit c oberhalb der Normalen CX liegt oder $\angle BCN=\varphi$ spitz ist, dagegen hat man das untere Zeichen — zu nehmen, sobald die Richtung der Geschwindigkeit c in die der Normalen CX oder unterhalb derselben fällt, also sobald $\angle BCN=\varphi$ ein rechter oder ein stumpfer wird.

Wir nehmen jetzt an, für den mit der Zeit t veränderlichen Winkel $BCN=\varphi$ werde sowol in dem Ausdrucke von f, wie von B ein mittlerer Werth α substituirt, und außerdem werde für die Größe B ein arithmetisches Mittel zwischen den Gränzwerthen während irgend einer Zeit t gesetzt, welches bei den nachfolgenden Integrationen als konstante Größe zu behandeln wäre. Alsdann hat man

$$f=\frac{2}{\sin\alpha(1+\sin^2\alpha)}, \quad \ldots\ldots (1024)$$

$$B=1+\frac{\beta}{2\sin\alpha}(U+u), \quad \ldots\ldots (1025)$$

und eine Integration der Gleichungen (1022) und (1023) ergibt aus der ersteren

$$t=\frac{1}{2g\sin\gamma}\sqrt{\frac{W\sin\gamma}{faB}}\times$$

$$\log\left\{\left(\frac{U\sqrt{\frac{faB}{W\sin\gamma}}-1}{U\sqrt{\frac{faB}{W\sin\gamma}}+1}\right)\left(\frac{u\sqrt{\frac{faB}{W\sin\gamma}}+1}{u\sqrt{\frac{faB}{W\sin\gamma}}-1}\right)\right\} \ldots (1026)$$

$$x=\frac{W}{2gfaB}\log\left(\frac{\frac{faB}{W\sin\gamma}U^2-1}{\frac{faB}{W\sin\gamma}u^2-1}\right) \quad \ldots\ldots (1027)$$

und aus der letzteren

$$t = \mp \frac{(v - V)}{g \cos\gamma} \quad \ldots . (1028)$$

$$z = \mp \frac{(v^2 - V^2)}{2 g \cos\gamma} \quad \ldots . (1029)$$

In den letzten beiden Gleichungen gelten die oberen Zeichen —, solange die Scheibe in paralleler Richtung zur Linie CZ sich erhebt, also bis zum Punkte D, und die unteren Zeichen +, sobald die Scheibe vom Punkte D an in Beziehung zur Linie CZ herabsinkt, wobei dann gleichzeitig die positiven z in einer der früheren direkt entgegengesetzten Richtung DZ_1 gemessen werden müssen.

Aus Gl. (1026) ergeben sich ähnliche Konsequenzen, wie aus Gl. (997). Wenn

$$U < \sqrt{\frac{W \sin\gamma}{f a B}};$$

so wird u stets wachsen, aber nie den Werth $\sqrt{\frac{W \sin\gamma}{f a B}}$ überschreiten. Wenn dagegen

$$U > \sqrt{\frac{W \sin\gamma}{f a B}};$$

so wird u stets abnehmen, aber nie unter jenen Werth $\sqrt{\frac{W \sin\gamma}{f a B}}$ herabsinken. Demnach bleibt u und ebenso x stets positiv, und die Scheibe dringt in normaler Richtung CX zu ihrer Ebene immer weiter vor.

Aus den Gleichungen (1028) und (1029) kann man entnehmen, daß wenn V in Beziehung zur Linie CZ nach oben gerichtet ist, was geschieht, sobald ∠ BCN spitz ist, die Scheibe mit abnehmender Geschwindigkeit parallel zu CZ sich erheben wird, bis $v = o$ ist. Solches geschieht in der Zeit

$$t = \frac{V}{g \cos\gamma} \quad \ldots . (1030)$$

und bei der Höhe

$$Z = ED = \frac{V^2}{2g\cos\gamma} \quad \ldots . (1031)$$

Substituirt man den vorstehenden Werth von t in Gl. (1026); so ergibt eine Auflösung derselben für u den Werth der Geschwindigkeit $u = U_1$, mit welcher sich die Scheibe im Punkte D bloß in normaler Richtung DX_1 zu ihrer Ebene fortbewegt. Der eben genannte Werth von $u = U_1$ in Gl. (1027) gesetzt, ergibt endlich die Abszisse $X = CE$ für den Punkt D.

Man bemerkt, daß behuf Ausführung der vorstehenden Rechnungen die Größen f und B, welche von dem Winkel α abhängig sind, gegeben sein müßten. Kennte man die Lage des Punktes D durch dessen Koordinaten X und Z; so würde der Winkel DCZ $=$ CDE als mittlerer Werth für α angenommen werden können, und man fände alsdann den Werth von α aus der Beziehung

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{X}{Z} = \frac{2gX\cos\gamma}{V^2} \quad \ldots . (1032)$$

Leider ist der Werth von X a priori nicht genau zu ermitteln, und man wird daher, um für X einen angenäherten Werth zu erhalten, mittelst welches die vorstehende Gleichung für α aufgelös't werden kann, vorläufig in den Gleichungen (1026) und (1027), sowie in den Ausdrücken (1024) und (1025) statt des Winkels α den Werth $BCN = \varphi$, für den Anfangspunkt der Bewegung einführen müssen, um alsdann durch das vorhin angegebene Rechnungsverfahren zu einem Näherungswerthe von X für Gl. (1032) zu gelangen. Der hierdurch erhaltene Werth von α bestimmt alsdann die Größen f und B und somit die Gleichungen (1026) und (1027) genauer.

Wenn die Komponente V der anfänglichen Geschwindigkeit nach unten gerichtet ist, oder auch wenn dieselbe gleich null ist, wie Letzteres bei der Bewegung der Scheibe vom Punkte D aus sich ereignet; so gilt in den beiden Gleichungen (1028) und (1029) das untere Zeichen $+$, die Ordinaten z werden in der Richtung DZ von oben nach unten gerechnet, und man erkennt, daß die Geschwindigkeit v in dieser Richtung unaufhörlich wächst und jede Gränze überschreitet, während die Geschwindigkeit u in normaler Richtung zur Scheibe dem vorhin angedeuteten Gesetze

gehorcht und sich unablässig dem Gränzwerthe $\sqrt{\frac{W\sin\gamma}{faB}}$ nähert.

Was für einen solchen Fall oder für den absteigenden Theil **DF** der Wurflinie die Bestimmung eines mittleren Werthes α für den Winkel φ betrifft, unter welchem sich die Richtung der Bewegung gegen die Ebene der Scheibe neigt; so sei $DE = Z$ die Tiefe in paralleler Richtung zur Axe DZ_1, bis zu welcher die Wurflinie beobachtet werden soll, während $EF = X$ die Abszisse des tiefsten Punktes **F** sei. Beachtet man jetzt, daß die Kurve **DF** sich immer mehr dem Parallelismus mit der Axe DZ_1 zu nähern strebt, daß also für einen Punkt **F**, welcher sehr tief unter **D** läge, φ nahezu $= o$ sein würde; so kann man, wenn der ursprüngliche Werth von φ im Punkte **D** mit φ_1 bezeichnet wird, zuvörderst in den Gleichungen (1026) und (1027) $\alpha = \frac{\varphi_1}{2}$ einführen.

Nach Gl. (1029) würde man für den tiefsten Punkt **F**

$$v = \sqrt{V^2 + 2gZ\cos\gamma}$$

haben. Dieser Werth von v, in Gl. (1028) gesetzt, ergibt die Zeit t, während welcher der Punkt **F** erreicht wird. Substituirt man den letzteren Werth von t in Gl. (1026); so findet sich der zugehörige von u, und dieser liefert bei seiner Einführung in Gl. (1027) die Abszisse $x = X = EF$.

Betrachtet man hierauf den Winkel FDZ_1 als einen für die Praxis genügenden Näherungswerth für den Winkel α; so hat man

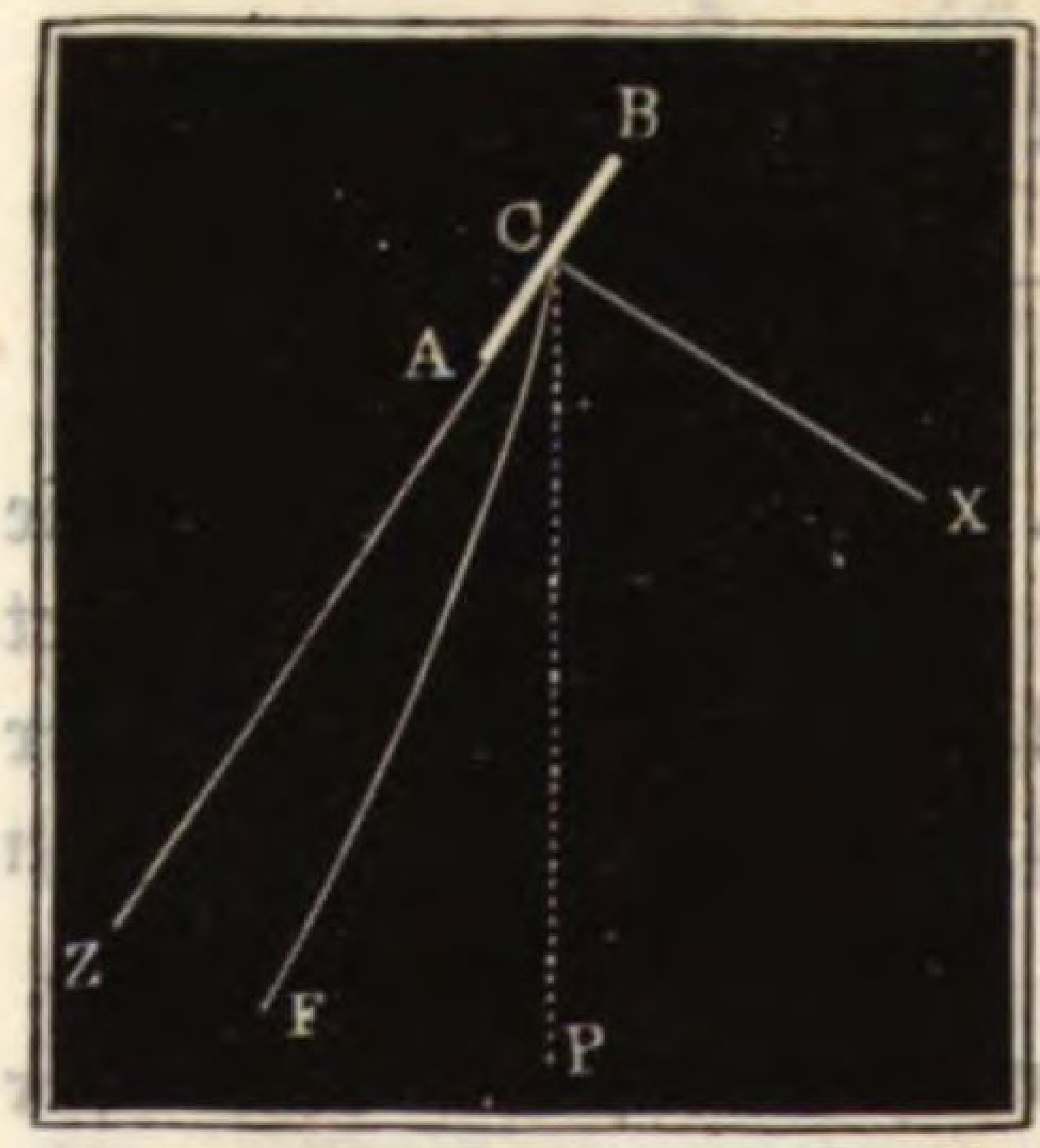
$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{X}{Z} \quad \ldots . \; (1033)$$

Nachdem diese Gleichung für α aufgelös't ist, können die Formeln (1026) und (1027) durch Berichtigung der Ausdrücke für f und **B** mittelst des neuen Werthes von α korrigirt werden.

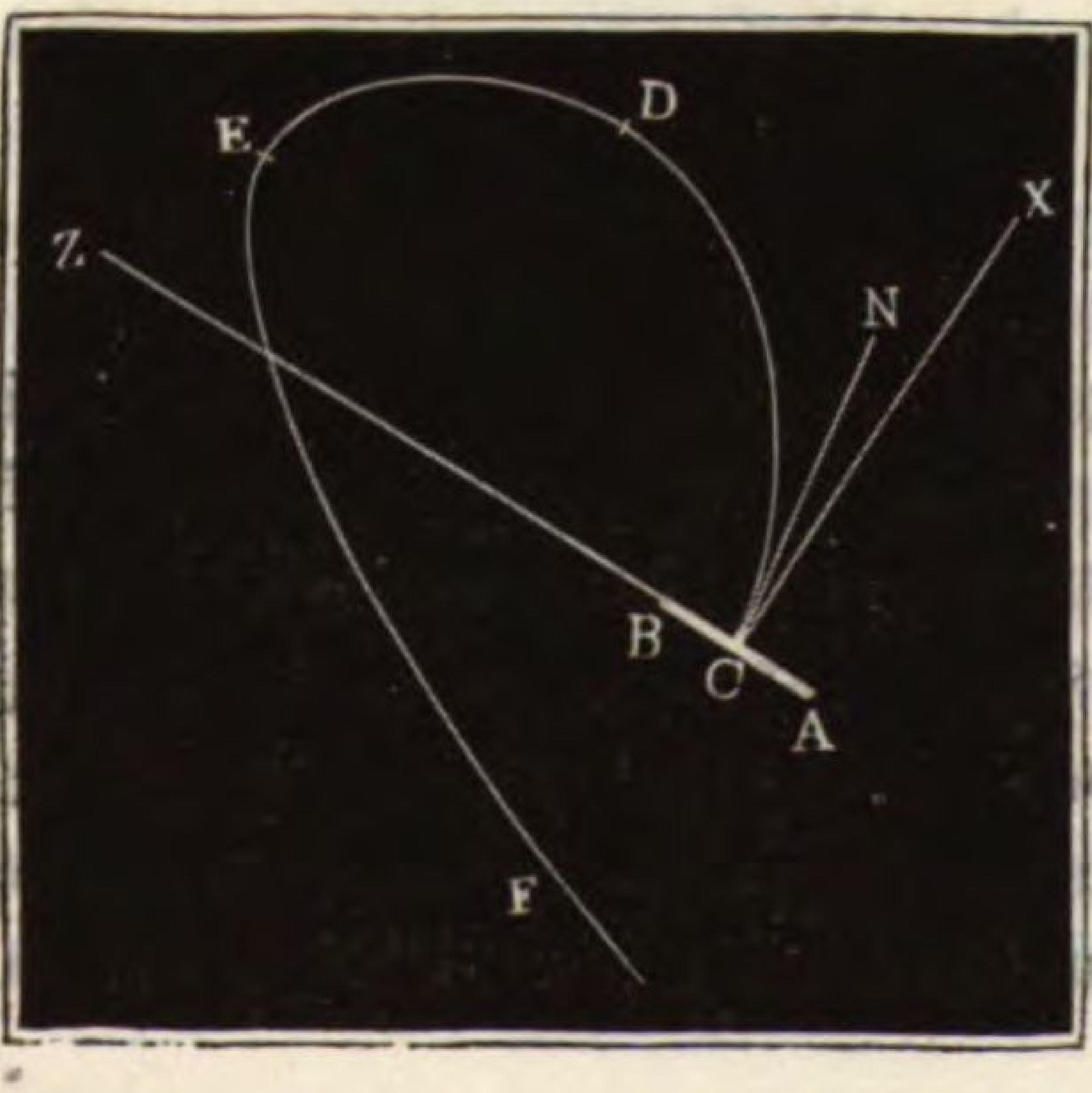
Aus den Formeln dieses Paragraphs erkennt man, daß sich die in der Richtung **CN** geworfene Scheibe sehr wol über das horizontale Niveau des Ausgangspunktes **C** erheben kann, selbst wenn die Linie **CN** eine Neigung nach *unten* besitzt. Es kommt

hierbei nur darauf an, daß die anfängliche Wurfgeschwindigkeit stark genug sei.

Nachdem die Scheibe bei D in Beziehung zur Axe CZ ihren höchsten Punkt erreicht hat, sinkt sie in einer Kurve DF herab, deren Richtung immer mehr der Axe ZC parallel zu werden strebt. Obwol sich die tieferen Punkte G, F dieses Schenkels immer weiter von der Axe ZC oder DZ_1 entfernen; so leuchtet doch ein, daß der Abstand CG des Punktes G, welcher mit C in derselben Horizontalebene liegt, von diesem letzteren Punkte kleiner sein kann, als der Abstand des höchsten Punktes der Kurve von der durch C gelegten Vertikalen CP, sodaß die Scheibe gewissermaaßen gegen ihren Ausgangspunkt C zurückzufallen scheint. Ja bei genugsamer Verlängerung der Kurve DF wird man sogar Punkte erhalten, welche links von der durch C gezogenen Vertikalen liegen.



Setzt man in den Gleichungen (1026) bis (1029), indem man in den letzten beiden das untere Zeichen + nimmt, $U = o$ und $V = o$; so erhält man die Gleichungen für den Fall, wo die Scheibe AB, aus dem Zustande der Ruhe heraustretend, in der Luft herabfällt. Es wird dadurch eine Kurve CF dargestellt, welche ganz auf der linken Seite der durch C gezogenen Vertikalen CP liegt.



Wenn die auf der Vorderfläche der Scheibe errichtete Normale CX nach oben ansteigt, und nicht, wie in den früheren Figuren, eine Neigung nach unten besitzt; so erhält man leicht statt der Gleichungen (1022) und (1023) die folgenden

$$\frac{W}{g}\frac{du}{dt}+f\alpha B u^2+W\sin\gamma=o, \quad \ldots (1034)$$

$$\frac{W}{g}\frac{dv}{dt}\pm W\cos\gamma=o, \quad \ldots (1035)$$

welche sich bloß darin von den früheren unterscheiden, daß $\sin\gamma$ das entgegengesetzte Zeichen erhalten hat. In der letzteren Gleichung gilt das obere Zeichen $+$, solange die Scheibe in Beziehung zur Axe CZ ansteigt, oder solange die Richtung CN der Bewegung mit CZ einen spitzen Winkel $ZCN=\varphi$ einschließt; dagegen gilt das untere Zeichen $-$ für denjenigen Theil der Wurflinie, in welchem die Scheibe in Beziehung zu derselben Axe CZ herabsinkt, wobei stets die dem Punkte X zugekehrte Seite der Scheibe die vordere sein muß, welche den Widerstand der Luft empfängt. In dem letzteren Falle sind dann auch die positiven Ordinaten z in der Richtung ZC zu rechnen.

Die Integrale der vorstehenden Gleichungen, welche die Wurflinie CDF darstellen und hinsichtlich der näherungsweisen Bestimmung des Winkels α in den Ausdrücken f und B ähnlich zu behandeln sind, wie die Integrale (1026) bis (1029), sind

$$t=\frac{1}{g\sin\gamma}\sqrt{\frac{W\sin\gamma}{f\alpha B}}\left(\text{arc tang}\, U\sqrt{\frac{f\alpha B}{W\sin\gamma}}-\text{arc tang}\, u\sqrt{\frac{f\alpha B}{W\sin\gamma}}\right) \quad \ldots (1036)$$

$$x=\frac{W}{2gf\alpha B}\log\left(\frac{\frac{f\alpha B}{W\sin\gamma}U^2+1}{\frac{f\alpha B}{W\sin\gamma}u^2+1}\right) \quad \ldots (1037)$$

$$t=\mp\frac{(v-V)}{g\cos\gamma} \quad \ldots (1038)$$

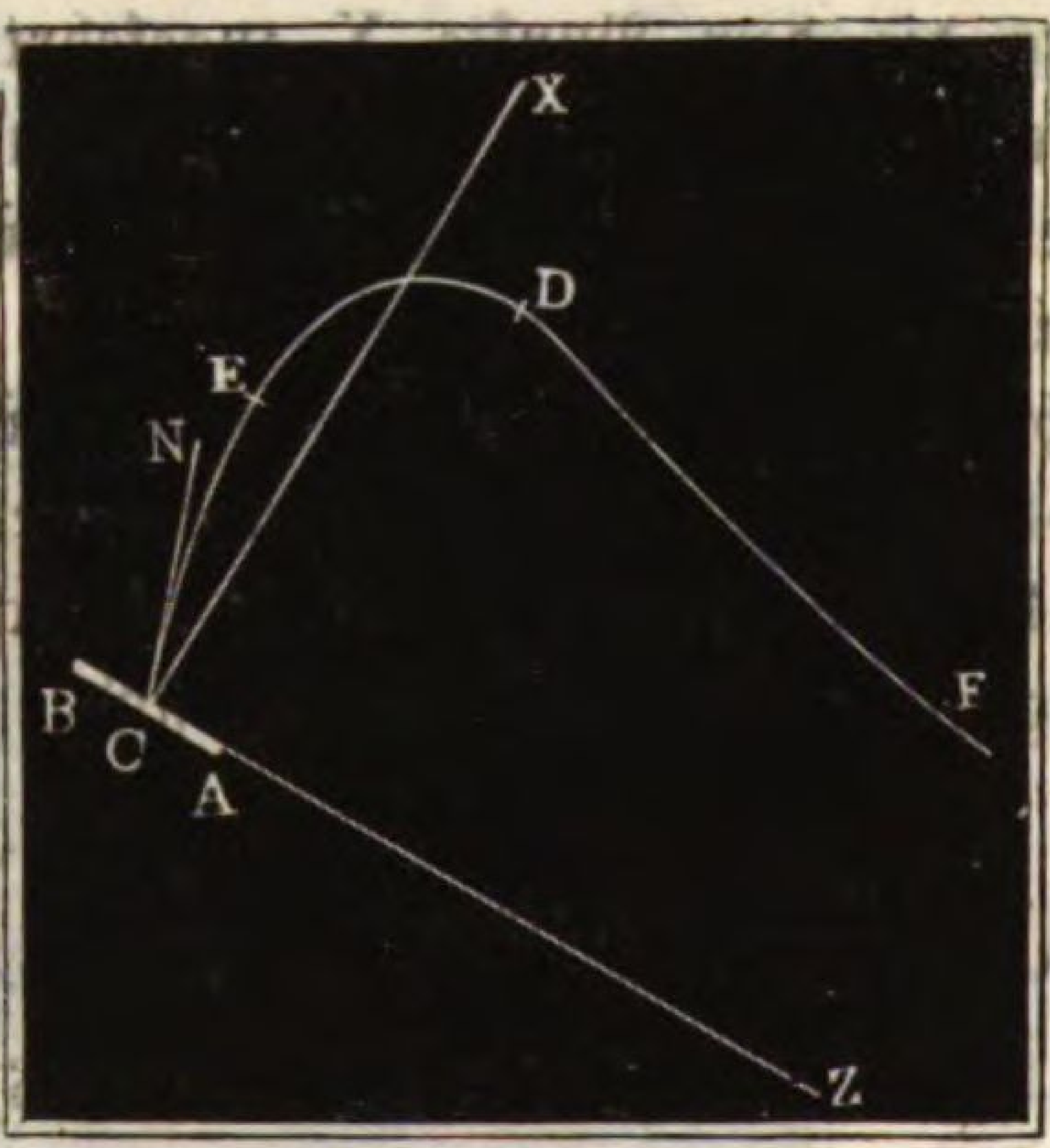
$$z=\mp\frac{(v^2-V^2)}{2g\cos\gamma} \quad \ldots (1039)$$

Aus Gl. (1036) geht hervor, daß die Komponente u der Geschwindigkeit c in normaler Richtung zur Scheibe am Ende einer gewissen Zeit durchaus gleich null werden muß. In diesem Momente wird die Tangente der Wurflinie, wie bei D, der Axe CZ parallel sein.

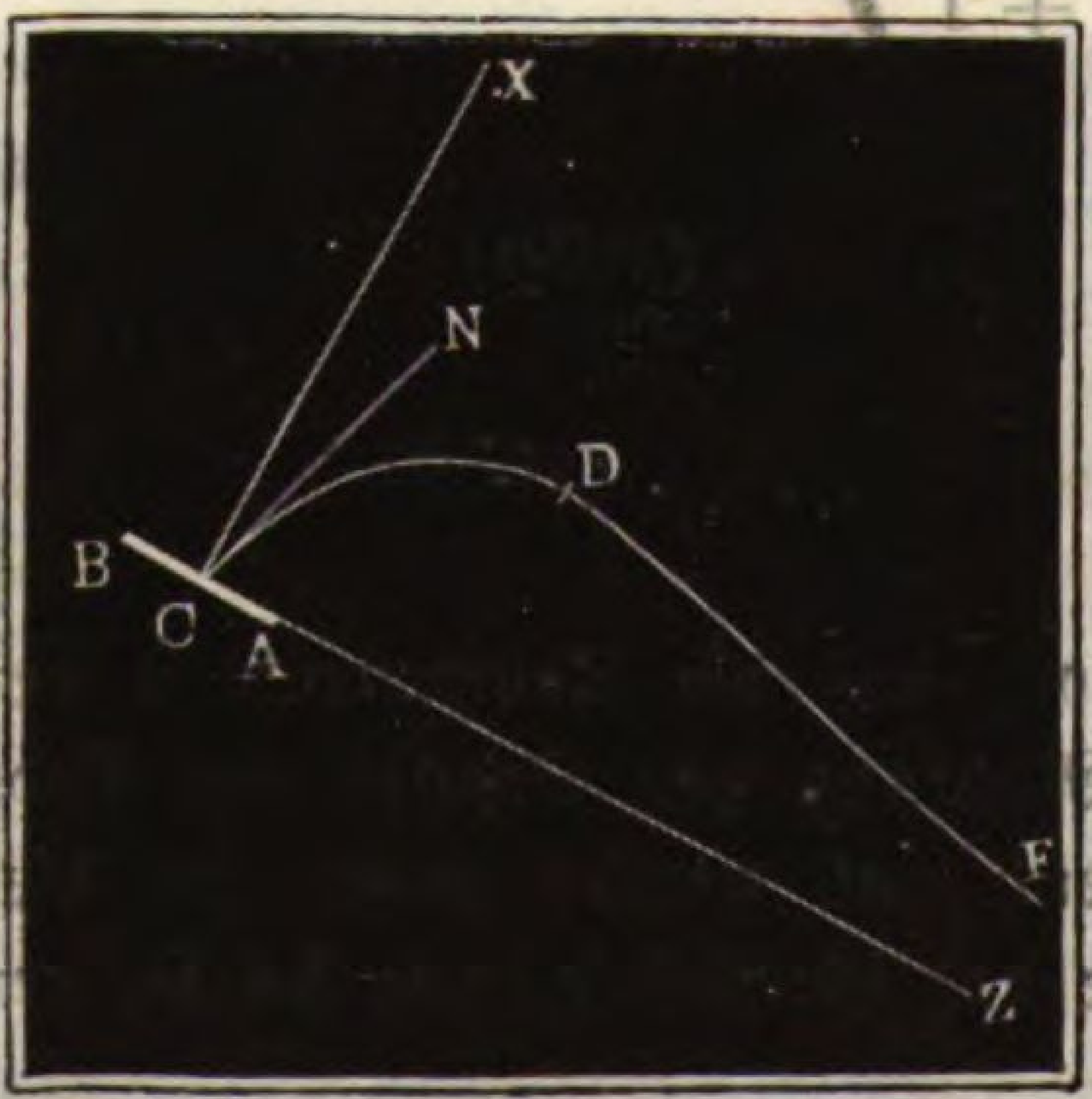
Ist nun gleichzeitig $\angle BCN < 90^o$, sodaß in den Gleichungen (1038) und (1039) das obere Zeichen — gilt; so wird auch v am Ende einer gewissen Zeit gleich null werden. Wo Solches sich ereignet, muß die Wurflinie der Axe cx parallel sein.

Würde nun eher $u = o$, als $v = o$; so würde die Scheibe offenbar die Linie CDEF in der obigen Figur beschreiben, welche von C bis D durch die vorstehenden Gleichungen, von D an aber, weil alsdann die entgegengesetzte Seite den Widerstand der Luft empfängt, durch die Gleichungen (1026) bis (1029) dargestellt wird.

Hätte man dagegen eher $v = o$, als $u = o$; so würde die Scheibe die Linie CEDF in der nebenstehenden Figur beschreiben, welche von C bis E durch die Gleichungen (1036), (1037) und die Gleichungen (1038) und (1039) mit dem oberen Zeichen, von E bis D durch die Gleichungen (1036), (1037) und die Gleichungen (1038) und (1039) mit dem unteren Zeichen, von D bis F jedoch durch die Gleichungen (1026) bis (1029) dargestellt wird.



Wenn der Winkel BCN stumpf ist, sodaß in den Gleichungen (1038) und (1039) das untere Zeichen gilt; so kann v nicht gleich null werden, sondern wächst unaufhörlich, während gleichwol u bei D gleich null wird. Die Wurflinie bildet demnach eine Kurve von der Form CDF, bei welcher jedoch der Theil DF durch die Gleichungen (1026) bis (1029) dargestellt wird.



§. 212. Vertikale Bewegung eines leichten kugelförmigen Körpers unter Berücksichtigung des Auftriebes der Flüssigkeit.

Aus dem ersten Abschnitte, in welchem die Prinzipien der Hydrostatik vorgetragen sind, (§. 22 und 43), ist bekannt, daß sich die Pressungen einer schweren Flüssigkeit gegen einen von derselben umschlossenen Körper zu einer vertikalen von unten nach oben wirkenden Kraft zusammensetzen, deren Stärke gleich dem Gewichte der von dem Körper verdrängten Flüssigkeitsmenge ist. Diese Kraft nennt man den **Auftrieb** der Flüssigkeit.

Es leuchtet ein, daß wenn man bei der Betrachtung der Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit streng verfahren will, man den Auftrieb der Flüssigkeit mit in Rechnung bringen muß. Ist jedoch das spezifische Gewicht des Körpers in Beziehung zu dem der Flüssigkeit sehr groß; so wird der Auftrieb der Letzteren nur einen unbedeutenden Einfluß auf die Bewegung des Körpers äußern, und man wird denselben, wie Dies in den früheren Paragraphen geschehen ist, vernachlässigen dürfen. Im Nachfolgenden wollen wir jedoch einen spezifisch leichten Körper voraussetzen, gegen dessen Gewicht der Auftrieb der Flüssigkeit nicht vernachlässigt werden darf.

Außerdem ist in §. 206 darauf aufmerksam gemacht, daß sich bei der Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit stets eine gewisse Quantität der Letzteren an den Ersteren hänge und bei dessen Bewegung mit fortgerissen werde. Auch diese Erscheinung, welche bei einem spezifisch sehr schweren Körper von gringem Belange ist, äußert einen merklichen Einfluß bei sehr leichten Körpern.

Außer den in §. 207 ff. angenommenen Bezeichnungen sei noch

K das Volum des vertikal bewegten und als kugelförmig angenommenen Körpers.

Da das Gewicht der Volumeinheit der Flüssigkeit $= w'$ ist; so hat man für den vertikal aufwärts wirkenden Auftrieb der Flüssigkeit gegen den Körper den Werth $w'K$.

Außerdem hängt sich an den kugelförmigen Körper eine Quantität der Flüssigkeit, deren Volum nach §. 206 etwa $= 0{,}6K$, deren Gewicht also $= 0{,}6w'K$ ist. Der Auftrieb der umgebenden Flüssigkeit gegen dieses an den Körper sich hängende Fluidum

ist dessen eigenem Gewichte gleich, also $= 0{,}6w'K$. Es folgt auch, daß das Gewicht der ganzen fortbewegten Masse, welches aus dem Körper und der mit fortgerissenen Flüssigkeit besteht, $= W + 0{,}6w'K$ ist, und daß man daher für diese Masse selbst den Ausdruck $\frac{W + 0{,}6w'K}{g}$ hat.

Die auf den Körper stetig einwirkende Kraft P ist hier die Resultante aus den Gewichten des Körpers und der sich anhängenden Flüssigkeit, sowie aus dem Auftriebe der umgebenden Flüssigkeit gegen diese beiden Massen; es ist also

$$P = W + 0{,}6w'K - w'K - 0{,}6w'K = W - w'K.$$

Betrachten wir nun zuvörderst den Fall, wo der Körper mit der anfänglichen Geschwindigkeit V vertikal **aufwärts** geworfen wird.

Unter der Voraussetzung, daß das Gewicht W des Körpers größer sei, als der gegen denselben wirkende Auftrieb $w'K$ der umgebenden Flüssigkeit, daß also $P = W - w'K$ eine positive Größe darstelle, welche einer der Bewegung des Körpers direkt entgegenwirkenden Kraft entspricht, hat man die Gleichungen (979) und (980) in Anwendung zu bringen, indem man darin $W + 0{,}6w'K$ für W, ferner $W - w'K$ für P substituirt, und in dem Doppelzeichen $\mp$ das untere Zeichen $+$ nimmt. Dies ergibt

$$dt = -\frac{W + 0{,}6w'K}{g} \cdot \frac{dv}{a(1+\beta v)v^2 + W - w'K},$$

$$ds = -\frac{W + 0{,}6w'K}{g} \cdot \frac{v\,dv}{a(1+\beta v)v^2 + W - w'K}.$$

Behandelt man jetzt den Faktor $1 + \beta v$ ebenso, wie Dies in den §§. 208, 209 ff. geschehen ist, indem man demselben für eine beliebige Zeitdauer t den bei der Integration als konstant anzusehenden mittleren Werth

$$B = 1 + \frac{\beta}{2}(V + v)$$

gibt; so kommt, ähnlich wie in §. 209,

$$t = \frac{W + 0{,}6w'K}{g(W - w'K)} \sqrt{\frac{W - w'K}{aB}} \times$$

$$\left(\operatorname{arc\,tang} V \sqrt{\frac{aB}{W - w'K}} - \operatorname{arc\,tang} v \sqrt{\frac{aB}{W - w'K}}\right) \quad \ldots\ldots (1040)$$

$$s = \frac{W + 0{,}6w'K}{2gaB} \log\left(\frac{aBV^2 + W - w'K}{aBv^2 + W - w'K}\right) \quad \ldots\ldots (1041)$$

Aus diesen Gleichungen folgt, daß der Körper in einer gewissen Zeit T, welche den Werth

$$T = \frac{W + 0{,}6w'K}{g(W - w'K)} \operatorname{arc\,tang} V \sqrt{\frac{aB'}{W - w'K}} \quad \ldots\ldots (1042)$$

hat, zur Ruhe kommt, indem derselbe in diesem Augenblicke bis zu einer vertikalen Höhe

$$S = \frac{W + 0{,}6w'K}{2gaB'} \log\left(\frac{aB'}{W - w'K} V^2 + 1\right) \quad \ldots\ldots (1043)$$

angestiegen sein wird. In den beiden letzteren Gleichungen (1042) und (1043) hat die Größe B' den Werth $1 + \frac{\beta}{2} V$.

Untersuchen wir nunmehr den zweiten Fall, wo der Körper vertikal **abwärts** geworfen wird, indem wir gleichfalls voraussetzen, daß $W > w'K$, also $P = W - w'K$ positiv sei; so hat man offenbar in den beiden Gleichungen (979) und (980) für W und P dieselben Substitutionen vorzunehmen, wie im Vorstehenden geschehen ist: da jedoch jetzt die Kraft P in direkter Richtung der Bewegung des Körpers wirkt; so ist von dem Doppelzeichen $\mp$ jener Gleichungen das obere Zeichen — beizubehalten. Hiernach erhält man

$$dt = -\frac{W + 0{,}6w'K}{g} \cdot \frac{dv}{a(1 + \beta v)v^2 - (W - w'K)},$$

$$ds = -\frac{W + 0{,}6w'K}{g} \cdot \frac{v\,dv}{a(1 + \beta v)v^2 - (W - w'K)}.$$

Eine Integration dieser Gleichungen, wie sie an ähnlichen Gleichungen in §. 209 bereits ausgeführt ist, liefert die Resultate

$$t = \frac{W + 0{,}6\,w'K}{2g(W - w'K)} \sqrt{\frac{W - w'K}{aB}} \times$$

$$\log \left\{ \left(\frac{V\sqrt{\frac{aB}{W - w'K}} - 1}{V\sqrt{\frac{aB}{W - w'K}} + 1} \right) \left(\frac{v\sqrt{\frac{aB}{W - w'K}} + 1}{v\sqrt{\frac{aB}{W - w'K}} - 1} \right) \right\} \quad .(1044)$$

$$s = \frac{W + 0{,}6\,w'K}{2g\,aB} \log \frac{aB\,V^2 - (W - w'K)}{aB\,v^2 - (W - w'K)} \quad \ldots\ldots (1045)$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man leicht, daß sich die Geschwindigkeit v des Körpers, welches auch die Anfangsgeschwindigkeit V gewesen sein möge, immer mehr und mehr einem Gränzwerthe nähert, welcher durch

$$v = \sqrt{\frac{W - w'K}{aB}} \quad \ldots\ldots (1046)$$

dargestellt ist.

Wofern der zuletzt betrachtete Körper bei seiner vertikal abwärts gerichteten Bewegung aus dem Zustande der Ruhe allmählig in Bewegung übergegangen wäre, würde man in den Gleichungen (1044) und (1045) nur $V = o$ zu setzen haben, wodurch sich dieselben auf

$$t = \frac{W + 0{,}6\,w'K}{2g\,(W - w'K)} \sqrt{\frac{W - w'K}{aB}} \log \left(\frac{1 + v\sqrt{\frac{aB}{W - w'K}}}{1 - v\sqrt{\frac{aB}{W - w'K}}} \right) \quad \ldots\ldots (1047)$$

$$s = \frac{W + 0{,}6\,w'K}{2g\,(W - w'K)} \log \left(\frac{1}{1 - \frac{aB}{W - w'K} v^2} \right) \quad \ldots\ldots (1048)$$

reduziren, indem man darin $B = 1 + \frac{\beta}{2} v$ hat.

Im Vorstehenden ist ausdrücklich angenommen, daß das Gewicht W des Körpers größer sei, als der Auftrieb $w'K$ des umgebenden Mediums, und nur unter dieser Bedingung entsprechen die entwickelten Formeln der Bewegung des Körpers in den näher bezeichneten Umständen. Wäre dagegen der Körper so

leicht, daß der Auftrieb $w'K$ das Gewicht W jenes Körpers überschritte; so würde der absolute Werth der auf den Körper stetig wirkenden Kraft

$$P = w'K - W$$

sein, und die Richtung dieser Kraft würde in die direkte Richtung der Bewegung fallen, sobald der Körper vertikal aufwärts stiege, und in die direkt entgegengesetzte Richtung jener Bewegung, sobald der Körper vertikal abwärts fiele.

Hiernach würde die Bewegung des vertikal aufwärts steigenden Körpers durch die Gleichungen (1044), (1045) und (1046) dargestellt werden, sobald man darin $w'K - W$ an die Stelle von $W - w'K$ setzte.

Wäre für diesen Fall die Anfangsgeschwindigkeit V gleich null; so würden die Gleichungen (1047) und (1048) gelten, sobald man ebenfalls $w'K - W$ für $W - w'K$ substituirte. Man erkennt, daß alsdann der Körper aus dem Zustande der Ruhe mit einer beschleunigten Geschwindigkeit aufwärts steigen wird, indem sich derselbe der Gränzgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{w'K - W}{aB}} \quad \ldots . (1049)$$

ins Unendliche nähert.

Ein solcher Fall würde z. B. der aufsteigenden Bewegung einer Gasblase in einer unpreßbaren Flüssigkeit entsprechen, wenn man mit w' das Gewicht der Volumeinheit dieser unpreßbaren Flüssigkeit bezeichnete, und die Größe B konstant $= 1$ setzte (vergl. §. 206). Auch die aufsteigende Bewegung eines Ballons in der Luft würde durch die letzteren Gleichungen dargestellt werden, sobald man hierbei von dem Umstande abstrahirte, daß die Luft in den höheren Regionen dünner wird, also, streng genommen, auf bedeutende Höhen die Größe w' nicht als eine Konstante angesehen werden dürfte.

Für einen vertikal abwärts geworfenen leichten Körper der vorstehenden Art würden dagegen die Gleichungen (1040) und (1041) das Gesetz der Bewegung ausdrücken, sobald man darin $w'K - W$ für $W - w'K$ einführt. Ein solcher Körper wird mit verzögerter Geschwindigkeit abwärts sinken und am

Ende der durch Gl. (1042) dargestellten Zeit T in einer durch Gl. (1043) gegebenen Tiefe S zur Ruhe kommen, um sich alsdann vermöge des überwiegenden Auftriebes der umgebenden Flüssigkeit nach den Gleichungen (1047) und (1048) wieder aufwärts zu bewegen.

§. 213. Vertikale Bewegung eines Körpers in der atmosphärischen Luft unter Berücksichtigung der veränderlichen Dichtigkeit der Letzteren.

Wenn ein in der atmosphärischen Luft sich bewegender Körper sehr bedeutende vertikale Höhen durchläuft; so ist es erforderlich, auf die Variationen Rücksicht zu nehmen, welche die Dichtigkeit der Luft in den verschiedenen Abständen von der Oberfläche der Erde erleidet.

Wir setzen voraus, die Temperatur und hygroskopische Beschaffenheit der Luft sei in allen Punkten dieselbe; außerdem sei die atmosphärische Flüssigkeit vollkommen elastisch, sodaß die Gleichungen des §s 43 darauf Anwendung finden.

Wenn wir im Nachstehenden die Untersuchung auf die vertikal aufwärts gerichtete Bewegung eines sehr leichten kugelförmigen Körpers beschränken, welcher anfangs in Ruhe war und durch den überwiegenden Auftrieb der Luft emporgehoben wird, wie Dies bei einem Ballon stattfindet; so sei

w' das Gewicht der Volumeinheit der Luft im Anfangspunkte der Bewegung,

p' der daselbst herrschende atmosphärische Druck auf die Flächeneinheit,

w das Gewicht der Volumeinheit der Luft in der Höhe s über dem Anfangspunkte, welche der Ballon in der Zeit t erreicht,

p der daselbst herrschende atmosphärische Druck,

k der konstante Koeffizient aus Gl. (972), mit Hülfe dessen man $p = kw$ hat.

Nach Gl. (206) hat man, da hier die vertikalen Höhen s von dem Punkte aus gemessen werden, für welchen $p = p'$ und $w = w'$ ist,

$$p = p' e^{-\frac{s}{k}},$$

worin e die Basis des natürlichen Logarithmensystemes darstellt. Setzt man hierin $p = kw$ und $p' = kw'$; so erhält man

$$w = w' e^{-\frac{s}{k}} \quad \ldots . (1050)$$

Am Ende einer beliebigen Zeit t wirkt auf den im Steigen begriffenen Ballon außer dem Widerstande der Luft noch der Auftrieb wK derselben vertikal aufwärts und das Gewicht W des Ballons vertikal abwärts. Man hat also in der Gl. (980) $P = wK - W$ zu setzen. Außerdem hat man statt W in jener Gleichung die Summe $W + 0{,}6 wK$ zu substituiren, indem man das Gewicht $0{,}6 wK$ der Luftmasse mit berücksichtigt, welche sich bei der Bewegung des Ballons an denselben hängt. Auch ist von dem Doppelzeichen $\mp$ nur das obere — beizubehalten, solange der Ballon im Aufsteigen begriffen ist, und demnach die Kraft $P = wK - W$ in direkter Richtung der Bewegung des Körpers wirkt. Endlich darf man nicht unbeachtet lassen, daß der Ausdruck für den Widerstand Q der Luft nach Gl. (977) in dem Faktor a, welcher bei kugelförmigen Körpern $= 0{,}512 \frac{Aw}{2g}$ ist, die veränderliche Größe w enthält. Setzen wir demnach

$$0{,}512 \frac{A}{2g} = \alpha, \text{ mithin}$$

$$a = \alpha w;$$

vernachlässigen wir ferner in der Größe $B = 1 + \beta v$ das Glied βv, welches bei den mäßigen Geschwindigkeiten eines Ballons sehr klein ausfallen wird, gegen die Einheit, indem wir

$$Q = av^2 = \alpha w v^2$$

annehmen; so ergibt die Gl. (980)

$$ds = -\frac{W + 0{,}6 wK}{g} \cdot \frac{v\,dv}{\alpha w v^2 - wK + W} \quad \ldots . (1051)$$

Ehe wir zur weiteren Behandelung dieser Gleichung schreiten, bemerken wir noch, daß sich der Ballon mit beschleunigter Geschwindigkeit vom Boden erheben wird, solange die Resultante der von unten nach oben auf ihn wirkenden Kräfte, nämlich

$wK - W - \alpha w v^2$ positiv ist. Befände sich der Ballon gleich von vorn herein in einer Höhe über dem Erdboden, für welche $wK - W = o$ oder

$$w = \frac{W}{K}$$

wäre; so würde derselbe kein Bestreben zur Bewegung haben, und in Ruhe bleiben. Diese letztere Höhe wird gefunden, wenn man in Gl. (1050) $w = \frac{W}{K}$ setzt, und dieselbe für s auflös't. Man erhält hierdurch

$$s = k \log \frac{Kw'}{W} \quad \ldots \quad (1052)$$

Da jedoch der Ballon diese Höhe erst im Laufe seiner Bewegung, also mit einer gewissen Geschwindigkeit erreicht; so wird bei der Durchschreitung dieser Höhe nicht bloß die Kraft $wK - W = o$, sondern auch noch der Widerstand $\alpha w v^2$ der Luft von oben nach unten auf ihn einwirken, und derselbe wird daher schon mit abnehmender Geschwindigkeit die obige Höhe s passiren, indem das Maximum seiner Geschwindigkeit unterhalb der Höhe s liegt. Gleichwol erhellet, daß der Ballon jene Höhe bis zu einem gewissen Punkte überschreiten, heirauf zurücksinken und alsdann fortwährend in immer enger werdenden Exkursionen um die gedachte Höhe oszilliren wird.

Wir wollen die aufsteigende Bewegung des Ballons nur bis zu dem eben besprochenen Höhenpunkte betrachten. Setzen wir dabei voraus, daß die Geschwindigkeit v des Ballons zu allen Zeiten nur mäßig sei; so wird der Widerstand $\alpha w v^2$ der Luft gegen das Gewicht wK der von dem Ballon verdrängten Luft gering sein. Da außerdem die Geschwindigkeit v sehr bald einen mittleren Werth anzunehmen strebt, und alsdann bei fortschreitender Bewegung des Ballons nur wenig variirt; so wird man in der Größe $\alpha w v^2 - wK = (\alpha v^2 - K) w$ des Nenners auf der rechten Seite von Gl. (1051) bei der späteren Integration ohne merklichen Fehler, besonders wenn man die Bewegung des Ballons in den größeren Höhen betrachtet, das Glied αv^2 als Konstante behandeln können, indem man demselben denjenigen Werth gibt, welchen dasselbe im Endpunkte der Zeit t besitzt. (In den

unteren Stadien der Bewegung würde man mit größerer Annäherung für αv^2 den mittleren Werth $\frac{1}{2}\alpha v^2$ einführen können.)
Hierdurch wird Gl. (1051) nach gehöriger Reduktion

$$-\frac{g[(\alpha v^2 - K)w + W]ds}{W + 0{,}6wK} = v\,dv.$$

Da nach der Beziehung (1050)

$$s = k \log \frac{w'}{w},$$

also wenn man s als Funktion von w ansieht,

$$ds = -k\frac{dw}{w}$$

ist; so ergibt eine Substitution dieses Werthes von ds in die vorhergehende Gleichung

$$v\,dv = \frac{gk[(\alpha v^2 - K)w + W]\,dw}{w(W + 0{,}6wK)} \quad \ldots . \; (1053)$$

Um diese Gleichung zwischen den korrespondirenden Gränzen o und v für v, sowie w' und w für w zu integriren, kann man dieselbe zuvörderst in die Form

$$\int_o^v v\,dv = \frac{gk}{0{,}6K}\int_{w'}^{w} \frac{(\alpha v^2 - K)w + W}{w\left(w + \frac{W}{0{,}6K}\right)}.dw$$

bringen. Zerlegt man hierauf die gebrochene Funktion unter dem Integralzeichen auf der rechten Seite in die Glieder

$$\frac{0{,}6K}{w} + \frac{\alpha v^2 - K - 0{,}6K}{w + \frac{W}{0{,}6K}},$$

und führt alsdann die Integration aus; so ergibt sich nach gehöriger Reduktion

$$v^2 = 2gk\left\{\frac{1{,}6K - \alpha v^2}{0{,}6K}\log\frac{0{,}6w'K + W}{0{,}6wK + W} - \log\frac{w'}{w}\right\},$$

oder wenn man diese Gleichung für v^2 auflös't,

$$v^2 = 2gk \cdot \frac{\frac{8}{3}\log\frac{0{,}6w'\mathrm{K}+\mathrm{W}}{0{,}6w\mathrm{K}+\mathrm{W}} - \log\frac{w'}{w}}{\frac{10}{3}\frac{gk\alpha}{\mathrm{K}}\log\frac{0{,}6w'\mathrm{K}+\mathrm{W}}{0{,}6w\mathrm{K}+\mathrm{W}}+1} \quad \ldots \text{(1054)}$$

Diese Gleichung ergibt v^2 und mithin auch v als Funktion der Größe w oder des Gewichtes der Volumeinheit der Luft in der Höhe s. Will man daher die Geschwindigkeit des Ballons in der Höhe s über dem Boden erfahren; so hat man zuvörderst den in dieser Höhe herrschenden Werth von w aus Gl. (1050) zu berechnen und in Gl. (1054) zu substituiren. Dabei bemerkt man, daß die Größe $\log\frac{w'}{w}$ im Zähler der letzteren Gleichung immer $=\frac{s}{k}$ ist.

Um die Höhe s, in welcher sich der Ballon am Ende der Zeit t befinden wird, durch diese Zeit selbst auszudrücken, hat man die Beziehung

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ oder } dt = \frac{ds}{v},$$

woraus

$$t = \int_0^s \frac{ds}{v}$$

folgt. Da man nun nach dem eben angegebenen Verfahren für beliebige Werthe von s die zugehörigen Werthe von v aus Gl. (1054) finden kann; so erhellet, wie zur Bestimmung des entsprechenden Werthes der Zeit t auf das vorstehende Integral die in §. 185 angegebene Näherungsformel (799) angewandt werden kann.

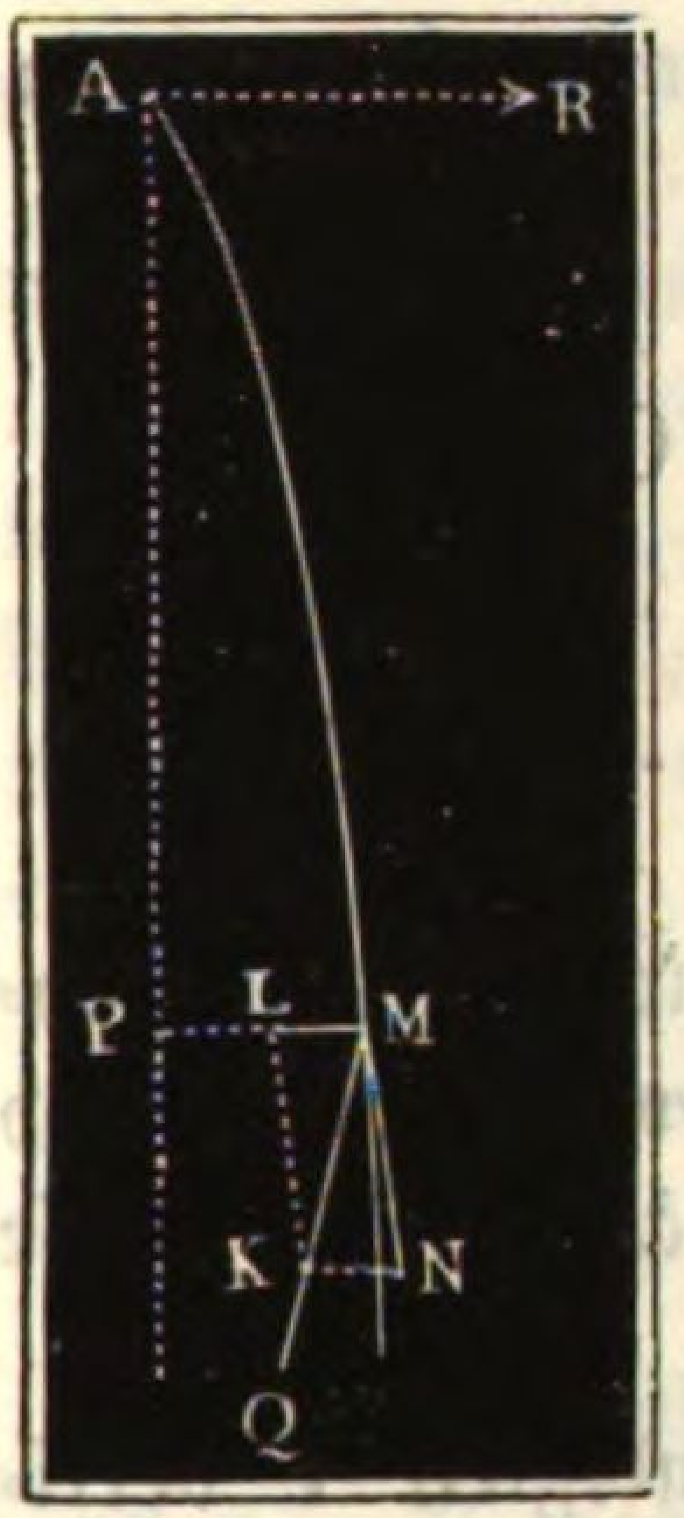
§. 214. Modifikation der vertikalen Bewegung eines Körpers in einem bewegten Medium.

Wenn das flüssige Medium, in welchem sich ein Körper bewegt, selbst in Bewegung begriffen ist, wie Dies z. B. bei atmosphärischer Luft eintritt, sobald in derselben ein Wind herrscht;

so erleiden die in den früheren Paragraphen entwickelten Formeln einige Abänderungen.

Um die Untersuchung jedoch nicht zu sehr zu verwickeln, nehmen wir an, der geworfene Körper habe die Gestalt einer Kugel und besitze im Vergleich zu dem äußeren Medium ein sehr großes spezifisches Gewicht. Außerdem sei die Strömung dieses Mediums, welches überall dieselbe Dichtigkeit besitze, gleichförmig und perpendikular gegen diejenige Bahn des Körpers gerichtet, welche der Letztere einschlagen würde, wenn das Medium in Ruhe wäre.

Betrachten wir vorzugsweise den Fall, wo der Körper sich in vertikaler Richtung AP zu bewegen strebt, wo aber die umgebende Luft eine horizontale Bewegung in der Richtung des Pfeiles AR besitzt, deren Geschwindigkeit allenthalben gleich U_1 sei.



In Folge dieses Seitenstoßes der Luft wird der Körper von der Vertikalen AP abweichen und am Ende irgend einer Zeit t eine Geschwindigkeit MN annehmen, welche eine vertikale Komponente v in der Richtung AP und eine horizontale Komponente u in der Richtung AR besitzt. Ist nun LM die Geschwindigkeit U_1 der Luft in der Richtung AR, und man vollendet das Parallelogramm LMNK; so wird die Diagonale MK die relative Geschwindigkeit des Körpers in Beziehung zu der der Luft darstellen, wenn nämlich die Letztere als ruhend gedacht wird. Es ist leicht zu erkennen, daß die Geschwindigkeit MK, welche wir mit c bezeichnen wollen, eine vertikale Komponente $= v$ in der Rchtung AP und eine horizontale Komponente $= U_1 - u$ in der Richtung RA besitzt.

Nehmen wir jetzt an, der Widerstand der bewegten Luft auf den in der Richtung MN bewegten Körper äußere sich ebenso, wie der Widerstand der ruhenden Luft gegen denselben in der Richtung MK mit der Geschwindigkeit c bewegten Körper sich äußern würde; so hat man für den gedachten Widerstand Q in der Richtung QM den Ausdruck

$$Q = aBc^2,$$

worin $B = 1 + \beta c$ ist. Die vertikale Komponente dieses Widerstandes ist, wenn man $\angle KML = \varphi$ setzt, $= aBc^2 \sin\varphi$ oder $aBcv$, da man $c \sin\varphi = v$ hat, und die horizontale Komponente desselben Widerstandes ist $aBc\cos\varphi = aBc(U_1 - u)$, da man $c\cos\varphi = U_1 - u$ hat.

Will man die Bewegung des Körpers nur auf eine solche Länge betrachten, wo sich die Richtung seiner Bahn AM noch nicht erheblich von der vertikalen Richtung entfernt; so kann man in den vorstehenden beiden Komponenten des Widerstandes Q für c die Größe v setzen, sodaß man für die vertikale Komponente von Q den Ausdruck aBv^2 und für die horizontale Komponente den Ausdruck $aBv(U_1 - u)$ erhält.

Hierdurch ergeben sich vermittelst des d'Alembertschen Prinzipes folgende beide Gleichungen

$$\frac{W}{g}\frac{dv}{dt} + aBv^2 \pm W = o, \quad \ldots . (1055)$$

$$\frac{W}{g}\frac{du}{dt} + aBv(U_1 - u) = o \quad \ldots . (1056)$$

In der ersteren Gleichung ist das obere Zeichen + zu nehmen, wenn der Körper vertikal aufwärts geworfen wird, und das untere Zeichen —, wenn der Körper abwärts fällt, wie in der obigen Figur.

Wenn der Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit V vertikal aufwärts geworfen wird; so ergibt eine Auflösung der Gl. (1055) ein ähnliches Resultat, wie bereits durch Gl. (1012) und (1013 dargestellt ist. Man hat nämlich

$$t = \frac{1}{g}\sqrt{\frac{W}{aB}}\left(\operatorname{arc\,tang} V\sqrt{\frac{aB}{W}} - \operatorname{arc\,tang} v\sqrt{\frac{aB}{W}}\right) \quad \ldots . (1057)$$

$$z = \frac{W}{2agB}\log\left(\frac{\frac{aB}{W}V^2 + 1}{\frac{aB}{W}v^2 + 1}\right) \quad \ldots . (1058)$$

worin $B = 1 + \frac{\beta}{2}(V + v)$ zu nehmen ist, und die vertikale Ordinate z von unten nach oben gerechnet wird.

Fällt der Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit null vertikal herab; so ergibt eine Auflößsung der Gl. (1055) ein ähnliches Resultat, wie die Gleichungen (1016) und (1017), indem man hat

$$t = \frac{1}{2g}\sqrt{\frac{W}{aB}}\log\left(\frac{1+v\sqrt{\frac{aB}{W}}}{1-v\sqrt{\frac{aB}{W}}}\right) \quad \ldots\ldots (1059)$$

$$z = \frac{W}{2agB}\log\left(\frac{1}{1-\frac{aB}{W}v^2}\right) \quad \ldots\ldots (1060)$$

worin $B = 1 + \frac{\beta}{2}v$ ist, und die vertikale Ordinate z von oben nach unten gerechnet wird.

Zur Bestimmung der horizontalen Komponente u der Geschwindigkeit c des Körpers am Ende der Zeit t hat man für den Einen oder anderen der beiden eben betrachteten Fälle, wenn man aus den Gleichungen (1055) und (1056) die Größe dt eliminirt,

$$\frac{du}{U_1 - u} = \frac{v\,dv}{v^2 \pm \frac{W}{aB}}.$$

Hieraus folgt durch Integration, wenn für $t = o$, $u = U$ und $v = V$ war,

$$\log\frac{U_1 - U}{U_1 - u} = \frac{1}{2}\log\frac{v^2 \pm \frac{W}{aB}}{V^2 \pm \frac{W}{aB}};$$

mithin

$$\frac{U_1 - U}{U_1 - u} = \sqrt{\frac{v^2 \pm \frac{W}{aB}}{V^2 \pm \frac{W}{aB}}}$$

und hieraus

$$u = U_1 - (U_1 - U)\sqrt{\frac{\frac{aB}{W}V^2 \pm 1}{\frac{aB}{W}v^2 \pm 1}} \quad \ldots\ldots (1061)$$

Bei der **aufwärts** gerichteten Bewegung des Körpers, für welche Gl. (1057) und (1058) gilt, würde man, wenn U=o wäre,

$$u = U_1 - U_1 \sqrt{\frac{\frac{aB}{W}V^2+1}{\frac{aB}{W}v^2+1}} \quad \ldots . (1062)$$

haben.

In dem Augenblicke, wo dieser Körper seine größte Höhe erreicht, wo man also $v = o$ hat, würde seine horizontale Geschwindigkeit

$$u = U_1 - U_1 \sqrt{\frac{aB}{W}V^2+1} \quad \ldots . (1063)$$

sein. Dies geschieht nach Gl. (1058) in der Höhe

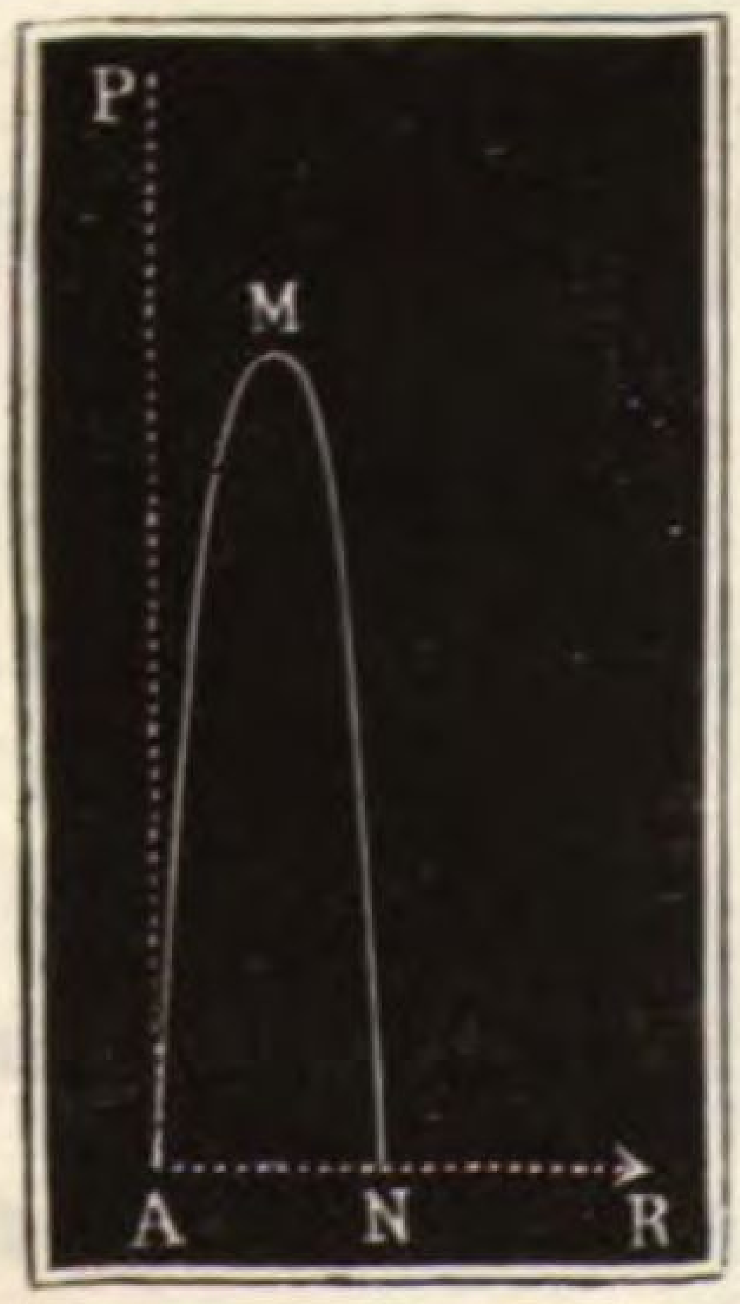
$$z = \frac{W}{2agB}\log\left(\frac{aB}{W}V^2+1\right) \quad \ldots . (1064)$$

Bewegte sich der Körper **abwärts**, indem die vertikale Komponente seiner Anfangsgeschwindigkeit gleich null, die horizontale Komponente derselben aber = U wäre, ein Zustand, für welchen auch die Gleichungen (1059) und (1060) gelten; so würde man nach Gl. (1061)

$$u = U_1 - \frac{U_1 - U}{\sqrt{1-\frac{aB}{W}v^2}} \quad \ldots . (1065)$$

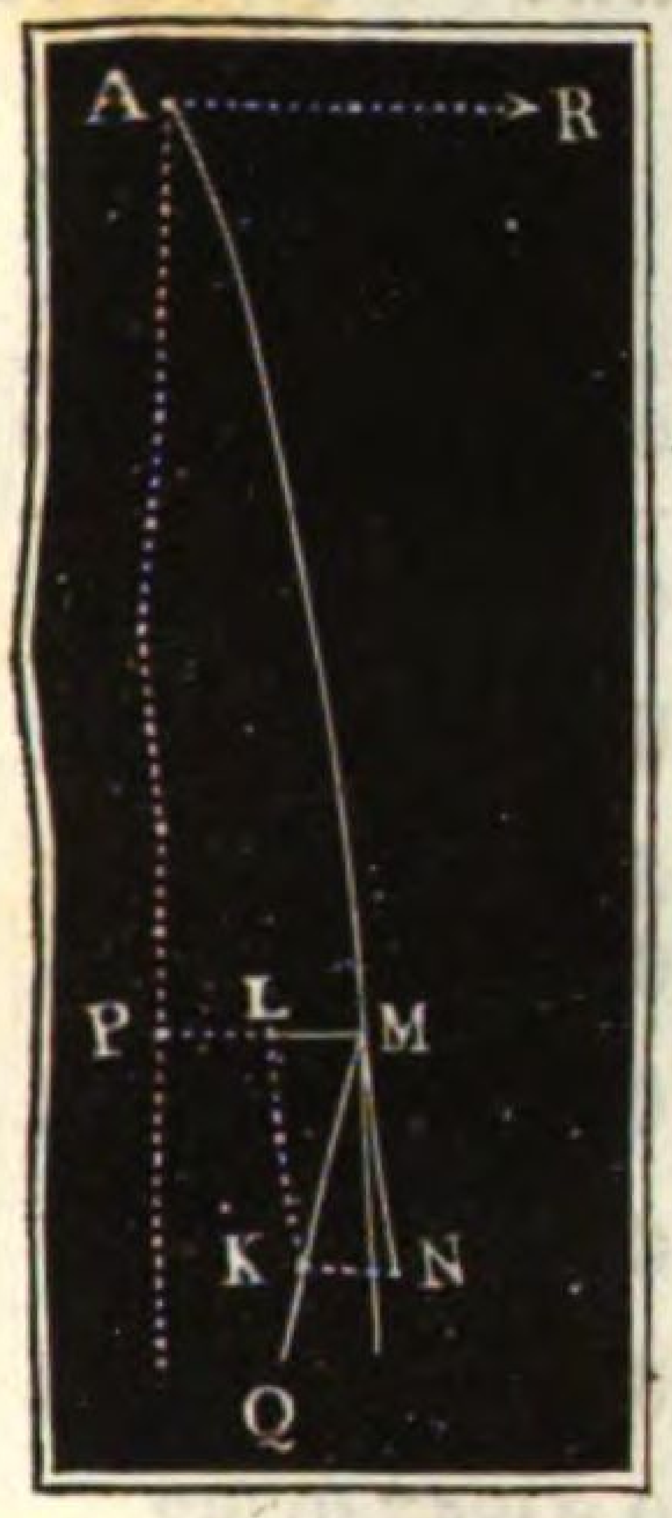
haben.

Sollte diese absteigende Bewegung des Körpers diejenige sein, welche derselbe annehmen würde, wenn er zuvor vertikal emporgeschleudert wäre und die durch Gl. (1064) dargestellte Höhe erreicht hätte; so müßte man in die vorstehende Gl. (1065) statt U den Werth von u aus Gl. (1063) substituiren, wodurch man



$$u = U_1 - U_1 \sqrt{\frac{1+\frac{aB}{W}V^2}{1-\frac{aB}{W}v^2}} \quad \ldots . (1066)$$

erhielte.



Ginge jedoch der Körper aus dem Zustande der vollkommenen Ruhe in die abwärts gerichtete Bewegung über; so hätte man $U = o$ und demnach

$$u = U_1 - \frac{U_1}{\sqrt{1 - \frac{aB}{W} v^2}} \quad \ldots . \; (1067)$$

In den Gleichungen (1061) bis (1067) ist die Komponente u als eine Funktion der Komponente v gegeben. Vermittelst der Gl. (1057) oder (1059) kann man also auch die Zeit t berechnen, für welche gleichzeitig die horizontale Komponente u stattfindet. Löst man die eben genannten beiden Gleichungen für v auf; so findet man auch v als Funktion von t, und wenn man diesen Werth von v in Gl. (1061) ff. substituirt; so kommt auch u als Funktion von t.

Um die horizontale Abszisse x zu bestimmen, welche den Abstand des Körpers von der durch den Nullpunkt gelegten Vertikalen am Ende der Zeit t mißt; so hat man wegen der Beziehung $u = \frac{dx}{dt}$ oder $dx = udt$

$$x = \int_o^t udt,$$

eine Gleichung, auf welche die in §. 185 mitgetheile Näherungsformel (799) angewandt werden kann, da man nach dem Vorstehenden im Stande ist, für beliebige Werthe von t den Werth der horizontalen Seitengeschwindigkeit u zu ermitteln.

Anhang.

§. 215. Werthe einiger wichtigen Zahlen und Größen, sowie Zusammenstellung der Maaßen und Gewichte verschiedener Länder.

I. Tabelle einiger in den Rechnungen häufig vorkommender Zahlen.

	Zahlwerth	Gemeiner Logarithmus
$\sqrt{2}$	1,4142136	0,1505150
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0,7071068	0,8494850—1
π	3,1415927	0,4971498727
log. nat. π	1,1447299	0,0587030
$\frac{1}{\pi}$	0,3183099	0,5028501273—1
π^2	9,8696044	0,9942997454
$\frac{1}{\pi^2}$	0,1013212	0,0057002546—1
$\sqrt{\pi}$	1,7724538	0,2485749363
$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$	0,5641896	0,7514250637—1
Länge des Bogens von 1^0, dessen Halbmesser = 1 ist,	0,017453293	0,2418774—2
Länge des Bogens von 1′, dessen Halbmesser = 1 ist,	0,000290888	0,4637261—4
Länge des Bogens von 1″, dessen Halbmesser = 1 ist,	0,000004848	0,6855748—6
Anzahl der Grade eines Bogens, dessen Länge gleich dem Halbmesser 1 ist,	57,295780	1,7581226
Basis *e* der natürlichen Logarithmen	2,7182818	0,4342945
log. vulg. n = log. vulg. e × log. nat. n = ...	0,4342945 log. nat. n	—
log. nat. 10	2,3025851	0,3622157
log. nat. n = log. nat. 10 × log. vulg. n = ...	2,3025851 log. vulg. n	—
g für Berlin unter 52° 30′ 16″ nördlicher Breite in rheinländischen Fußen . .	31,2649	1,4950568
$\sqrt{g}$	5,59150	0,7475284
$\sqrt{2g}$	7,90758	0,8980434
$\frac{1}{g}$	0,0319848	0,5049432—2
$\frac{1}{\sqrt{g}}$	0,178843	0,2524716—1
$\frac{1}{\sqrt{2g}}$	0,126461	0,1019566—1
g^2	977,493	2,9901136
$\frac{1}{g^2}$	0,00102303	0,0098864—3

II. Ausdehnung
des Wassers, des Quecksilbers und der Luft bei verschiedenen Temperaturen.

Wasser. — Das Wasser besitzt seine größte Dichtigkeit bei einer mittleren Temperatur von 4° C = 3,2° R. (Hallström, Despretz.)

1 Volum von 4° C. wird zu 1,00010825 Volumen von 0° (Hallström.)

1 Volum von 4° C. wird zu 1,00152 Volumen von 18,75° C. = 15° R. (Despretz.)

1 Volum von 4° C. wird zu 1,04315 Volumen von 100° C. = 80° R. (Despretz.)

1 Volum von 0° wird zu 0,99989176 Volumen von 4° C. (Hallström.)

1 Volum von 0° wird zu 1,00141160 Volumen von 18,75° C. = 15° R. (Hallström, Despretz.)

1 Volum von 0° wird zu 1,04303709 Volumen von 100° C. = 80° R. (Hallström, Despretz.)

Quecksilber. —

1 Volum von 0° wird zu (1 + 0,00018018018. t) Volumen von t° C. (Dulong und Petit.)

1 Volum von 0° wird zu (1 + 0,000225225. t) Volumen von t° R. (Dulong und Petit.)

1 Volum von 0° wird zu 1,018018018 Volumen von 100° C. = 80° R. (Dulong und Petit.)

Luft. — Bei einem Barometerstande von 0,76 Meter oder 2,421511 Fuß rheinl.

1 Volum von 0° wird zu (1 + 0,003665. t) Volumen von t° C. (Magnus, Regnault.)

1 Volum von 0° wird zu (1 + 0,00458125. t) Volumen von t° R. (Magnus, Regnault.)

1 Volum von 0° wird zu 1,3665 Volumen von 100° C. = 80° R. (Magnus, Regnault.)

Wenn das spezifische Gewicht des Wassers im luftleeren Raume bei 0° gleich 1 gesetzt wird; so ist

das spezifische Gewicht des Quecksilbers im luftleeren Raume und bei 0° gleich 13,598207, (Biot.)

das spezifische Gewicht der Luft unter einem Barometerstande von 0,76 Meter oder 2,421511 Fuß rheinl. und bei 0° gleich 0,0012991719. (Biot.)

Nach den vorstehenden Beobachtungen ist die folgende Tabelle berechnet worden.

Verhältniß der spezifischen Gewichte des Wassers, des Quecksilbers und der Luft bei verschiedenen Temperaturen.

Wasser im luftleeren Raume und bei einer Temperatur von			Quecksilber im luftleeren Raume und bei einer Temperatur von			Luft unter einem Barometerstande von 0,76 Meter =2,421511 Fuß rheinl. u. bei einer Temperatur von		
0°	4° C. = 3,2° R.	18,75° C. = 15° R.	0°	4° C. = 3,2° R.	18,75° C. = 15° R.	0°	4° C. = 3,2° R.	18,75° C. = 15° R.
1	1,00010825	0,99859	13,598207	13,58841	13,55242	0,00129917	0,00128040	0,00121563
0,99989	1	0,99848	13,5967	13,5869	13,5509	0,00129902	0,00128026	0,00121550
1,00141	1,00152	1	13,6174	13,6075	13,5715	0,00130100	0,00128220	0,00121735
0,073539	0,073547	0,073435	1	0,999280	0,996633	0,0000955402	0,0000941598	0,0000893969
0,073592	0,073600	0,073488	1,000720721	1	0,997351	0,0000956090	0,0000942276	0,0000894613
0,073788	0,073796	0,073683	1,003378378	1,002655	1	0,0000958629	0,0000944779	0,0000896999
769,721	769,804	768,636	10466,8	10459,3	10131,6	1	0,985551	0,93570
781,007	781,092	779,906	10620,2	10612,6	10584,5	1,01466	1	0,94947
822,616	822,705	821,456	11186,1	11178,0	11148,4	1,068719	1,053278	1

III. Vergleichung der Maaßen und Gewichte verschiedener Länder, nebst Angabe der Werthe für die Fallgeschwindigkeit g am Ende der ersten Sekunde, welche der geographischen Lage der Hauptstädte dieser Länder entspricht.

Bei der Berechnung der nachstehenden Tabellen sind folgende Data zu Grunde gelegt.

Frankreich. — Zufolge einer gesetzlichen Bestimmung soll die Länge des französischen Meters den 10000000ten Theil des Erdquadranten für den Meridian von Paris betragen, dessen Länge auf 30784438,8 Pariser Fuß des älteren Maaßes nach der Toise du Pérou festgestellt ist, sodaß also 1 Meter = 3,07844388 Pariser Fuß oder = 443,29591872 Pariser Linien ist.

Ein Gramme soll das Gewicht eines Kubikdezimeters reinen Wassers im Zustande seiner größten Dichtigkeit (etwa bei 4° C. = 3,2° R.) und im luftleeren Raume sein, sodaß also 1 Kilogramme den 1000sten Theil von dem Gewichte eines Kubikmeters Wasser ausmacht.

1 altes Pariser Pfund hält 489,50585 Gramme.

Preußen. — 1 preußischer oder rheinländischer Fuß soll genau = 139,13 Pariser Linien sein.

1 preußisches oder kölnisches Pfund soll das Gewicht des 66sten Theiles eines Kubikfußes Wasser bei 15° R. oder 18,75° C. im luftleeren Raume sein. Demnach ist 1 preußisches Pfund = 0,467711012733 Kilogramme.

Schweiz. — 1 neuer schweizerischer Fuß soll = 0,3 Meter und 1 neues schweizerisches Pfund = 0,5 Kilogramme sein.

Braunschweig. — 1 Fuß soll = 126,5 Pariser Linien und das Pfund soll dem preußischen oder kölnischen gleich sein.

Hessen-Darmstadt. — 1 Fuß soll = 0,25 Meter und 1 Pfund = 0,5 Kilogramme sein.

Sachsen. — Nach einer bevorstehenden neuen Maaß- und Gewichtsordnung soll 1 Fuß = 0,3 Meter und 1 Pfund = 0,5 Kilogramme werden.

Hannover. — 1 Fuß soll $11\frac{1}{2}$ Duodezimalzoll des englischen Fußes halten, und das Pfund soll dem preußischen gleich sein.

Baden. — 1 Fuß soll = 0,3 Meter und 1 Pfund = 0,5 Kilogramme sein.

Hessen-Kassel. — 1 Fuß soll 11 Duodezimal des preußischen Fußes halten, und das Pfund soll gleich dem preußischen Pfunde sein.

England. — Die Yard von 3 Fußen soll = 405,3425 Pariser Linien, also 1 Fuß = 135,114166667 Pariser Linien sein. 1 Pfund Avoirdupois-Gewicht hält 453,5976 Gramme.

Baiern. — 1 Fuß soll = 129,38 Pariser Linien und 1 Pfund = 0,56 Kilogramme sein.

Rußland. — 1 Fuß soll dem englischen gleich sein. 1 Pfund soll das Gewicht von 25,018935 Kubikzoll Wasser bei $13\frac{1}{3}$° R. = $16\frac{2}{3}$° C. im luftleeren Raume sein, sodaß also 1 russisches Pfund = 409,496 Gramme oder = 0,875532 preußische Pfund ist.

Württemberg. — 1 Fuß soll = 127 Pariser Linien sein. Das Pfund soll dem alten kölnischen Pfunde gleich sein und hält demnach 467,728 Gramme.

Österreich. — 102764 Wiener Fuß sollen = 100000 Pariser Fuß sein, sodaß 1 Wiener Fuß 140,12689 Pariser Linien hält. 1 Pfund soll = 560,012 Gramme sein.

Die Werthe der Fallgeschwindigkeit g am Ende der ersten Sekunde für die Örter Berlin, London, Paris und Petersburg sind nach folgenden beobachteten Pendellängen berechnet worden:

für Berlin	994,2239	Millimeter	(Bessel)
„ London	994,1234	„	(Kater)
„ Paris	993,8606	„	(Sabine, Kater)
„ Petersburg	994,9100	„	(Lütke).

Für die übrigen weiter unten folgenden Örter sind die entsprechenden Fallgeschwindigkeiten nach Pendellängen berechnet, welche zuvor durch Interpolation aus der in Gehlers Physikalischem Wörterbuche, Band VII, S. 380 und auch in Schubarths Physikalischen Tabellen S. 32 mitgetheilten Tabelle gewonnen sind.

Ort	1 Fuß gleich		1 Quadratfuß gleich	1 Kubikfuß gleich	1 Pfund gleich		1 Arbeitseinheit oder 1 Pfund × Fuß gleich
	alte pariser Linien	Meter	preußische Fuß	preußische Quadratfuß	preußische Kubikfuß	Kilogramme	preußische Pfund	preußische Pfund × Fuß
Berlin	139,13	0,3138535	1	1	1	0,4677110	1	1
Bern	132,98878	0,3	0,9558598	0,913668	0,873338	0,5	1,0690362	1,021848
Braunschweig	126,5	0,2853625	0,9092216	0,826684	0,751639	0,4677110	1	0,909222
Darmstadt	110,82398	0,25	0,7965499	0,634491	0,505404	0,5	1,0690362	0,851541
Dresden	132,98878	0,3	0,9558598	0,913668	0,873338	0,5	1,0690362	1,021848
Hannover	129,48441	0,2920947	0,9306721	0,866150	0,806102	0,4677110	1	0,930672
Karlsruhe	132,98878	0,3	0,9558598	0,913668	0,873338	0,5	1,0690362	1,021848
Kassel	127,53583	0,2876991	0,9166667	0,840277	0,770254	0,4677110	1	0,916667
London	135,11417	0,3047945	0,9711361	0,943105	0,915883	0,4535976	0,9698245	0,941831
München	129,38	0,2918592	0,9299214	0,864754	0,804153	0,56	1,1973187	1,113412
Paris (altes Gemäß)	144	0,3248394	1,0350032	1,071231	1,108725	0,4895058	1,0465989	1,083233
» (Metermaaß u. Kilogrammgewicht) . . .	443,29592	1	3,1861994	10,15187	32,34586	1	2,1380724	6,812323
Petersburg	135,11417	0,3047945	0,9711361	0,943105	0,915883	0,409496	0,875532	0,850261
Stuttgart	127	0,2864903	0,9128152	0,833232	0,760587	0,467728	1,000036	0,912848
Wien	140,12689	0,3161024	1,0071652	1,014382	1,021650	0,560012	1,197344	1,205924

Ort	1 Fuß preußisch gleich	1 Quadratfuß preußisch gleich	1 Kubikfuß preußisch gleich	1 Pfund preußisch gleich	1 Arbeitseinheit oder 1 Pfund × Fuß preußisch gleich	Nördliche Breite	Werth von g nach der besonderen geographischen Lage des Ortes		Der Werth von $g =$ 31,2649 Fuß preuß. für Berlin ist gleich	Der Werth von $g =$ 9,80901 Meter für Paris ist gleich
	dortige Fuß	dortige Quadratfuß	dortige Kubikfuß	dortige Pfund	dortige Pfd. × Fuß		in preuß. Fußen	in dortigen Fußen	dortige Fuß	dortige Fuß
Berlin	1	1	1	1	1	52°30′16″	31,2649	31,2649	31,2649	31,2535
Bern	1,046178	1,094489	1,145031	0,935422	0,978618	46°57′ 6″	31,2481	32,6911	32,7086	32,6967
Braunschweig . .	1,099842	1,209652	1,330426	1	1,099842	52°16′11″	31,2641	34,3856	34,3864	34,3739
Darmstadt . . .	1,255414	1,576064	1,978613	0,935422	1,174342	49°52′21″	31,2569	39,2403	39,2504	39,2360
Dresden	1,046178	1,094489	1,145031	0,935422	0,978618	51° 3′22″	31,2604	32,7040	32,7086	32,6967
Hannover . . .	1,074492	1,154534	1,240538	1	1,074492	52°22′25″	31,2645	33,5934	33,5939	33,5816
Karlruhe	1,046178	1,094489	1,145031	0,935422	0,978618	49° 0′50″	31,2540	32,6973	32,7086	32,6967
Kassel	1,090909	1,190082	1,298272	1	1,090909	51°19′ 7″	31,2612	34,1031	34,1071	34,0947
London	1,029722	1,060327	1,091842	1,031114	1,061761	51°31′ 8″	31,2617	32,1909	32,1941	32,1824
München . . .	1,075360	1,156398	1,243543	0,835199	0,898140	48° 8′45″	31,2515	33,6066	33,6210	33,6087
Paris (altes Gemäß)	0,9661806	0,933504	0,901934	0,955476	0,923162	48°50′14″	31,2535	30,1965	30,2075	30,1965
» (Metermaaß und Kilogrammgewicht)	0,3138535	0,098504	0,030916	0,467711	0,146793	48°50′14″	31,2535	9,80901	9,81259	9,80901
Petersburg . . .	1,029722	1,060327	1,091842	1,142162	1,176110	59°56′21″	31,2865	32,2164	32,1941	32,1824
Stuttgart . . .	1,095512	1,200146	1,314774	0,999964	1,095472	48°46′36″	31,2533	34,2383	34,2510	34,2385
Wien	0,992886	0,985822	0,978809	0,835182	0,829240	48°12′36″	31,2517	31,0293	31,0425	31,0311
						45°	31,2425			

Ort	1 Kubikfuß **Wasser** wiegt bei einer Temperatur von			1 Kubikfuß **Quecksilber** wiegt bei einer Temperatur von			1 Kubikfuß **Luft** wiegt bei einem auf 0° reduzirten Barometerstande von 0,76 Meter = 2,421511 Fuß preußisch und bei einer Temperatur von			Der mittlere atmosphärische Druck entspricht einer auf 0° reduzirten		
	0°	4° C. =3,2°R.	18,75°C. = 15°R.	0°	4° C. =3,2°R.	18,75°C. = 15°R.	0°	4° C. = 3,2° R.	18,75° C. = 15° R.	Quecksilbersäule von	Wassersäule von	u. einem Drucke pro Quadratfuß von
	Pfund	Pfund	Pfund	Pfund	Pfund	Pfund	Pfund	Pfund	Pfund	Fuß	Fuß	Pfund
Berlin	66,0931	66,1003	66	898,748	898,095	895,719	0,085866	0,084625	0,080345	2,421511	32,92821	2176,33
Bern	53,9941	54,0000	53,9180	734,223	733,695	731,752	0,070148	0,069134	0,065637	2,533333	34,44879	1860,03
Braunschweig . .	49,6782	49,6836	49,6082	675,534	675,048	673,260	0,064541	0,063608	0,060391	2,663279	36,21582	1799,14
Darmstadt . . .	31,2466	31,2500	31,2026	424,898	424,592	423,467	0,040595	0,040008	0,037984	3,04	41,33853	1291,69
Dresden	53,9941	54,0000	53,9180	734,223	733,695	731,752	0,070148	0,069134	0,065637	2,533333	34,44879	1860,03
Hannover . . .	53,2778	53,2836	53,2027	724,483	723,961	722,044	0,069217	0,068217	0,064766	2,601896	35,38112	1885,03
Karlsruhe . . .	53,9941	54,0000	53,9180	734,223	733,695	731,752	0,070148	0,069134	0,065637	2,533333	34,44879	1860,03
Kassel	50,9085	50,9141	50,8368	692,265	691,766	689,934	0,066139	0,065183	0,061886	2,641649	35,92168	1828,72
London	62,4171	62,4240	62,3291	848,760	848,149	845,903	0,081090	0,079919	0,075876	2,493483	33,90690	2116,37
München . . .	44,3901	44,3949	44,3275	603,625	603,190	601,593	0,057670	0,056837	0,053962	2,603995	35,40967	1571,84
Paris (altes Gemäß)	70,0166	70,0242	69,9179	952,101	951,415	948,895	0,090964	0,089649	0,085115	2,339617	31,81460	2227,55
» (Metermaaß und Kilogrammgewicht)	999,890	1000	998,480	13596,7	13586,9	13550,9	1,299020	1,280260	1,215500	0,76	10,33464	10333,5
Petersburg . . .	69,1392	69,1467	69,0418	940,169	939,492	937,004	0,089824	0,088526	0,084048	2,493483	33,90690	2344,30
Stuttgart . . .	50,2678	50,2732	50,1969	683,551	683,059	681,250	0,065306	0,064363	0,061107	2,652794	36,07324	1813,32
Wien	56,3949	56,4010	56,3154	766,869	766,317	764,287	0,073267	0,072208	0,068556	2,404284	32,69396	1843,78

IV. Verfahren behuf Reduktion einer Formel, welche für Maaßeinheiten des Landes X aufgestellt ist, in eine Formel, welche alsdann in entsprechender Weise für die Maaßeinheiten eines anderen Landes Y gültig wird.

In der Formel

$$F(a, b, c, \ldots) = \Phi(d, e, f, \ldots) \qquad \ldots (1068)$$

seien $a, b, c, \ldots, d, e, f, \ldots$ die veränderlichen Größen, von denen ausdrücklich bestimmt ist, daß sie durch die Maaßeinheiten eines gewissen Landes X gemessen werden sollen. F und Φ stellen beliebige Funktionen dar, in welchen neben den genannten veränderlichen Größen noch andere als konstant anzusehende Zahlen vorkommen, deren Werthe in der Regel von dem Maaßsysteme des Landes X abhängen. Es kommt darauf an, die vorstehende Gleichung dergestalt umzuformen, oder unter Beibehaltung ihrer allgemeinen Gestalt die darin vorkommenden konstanten Zahlen dergestalt zu bestimmen, daß die Größen $a, b, c, \ldots, d, e, f, \ldots$ nunmehr nach den Maaßeinheiten eines anderen Landes Y gemessen werden können.

Ist nun

von dem	Maaße	der	Größe	a	1	Einheit	des	Landes	Y	$= \alpha$	Einheiten	des	Landes	X,
„	„	„	„	b	1	„	„	„	„	$= \beta$	„	„	„	„
„	„	„	„	c	1	„	„	„	„	$= \gamma$	„	„	„	„
„	„	„	„	d	1	„	„	„	„	$= \delta$	„	„	„	„
„	„	„	„	e	1	„	„	„	„	$= \varepsilon$	„	„	„	„
„	„	„	„	f	1	„	„	„	„	$= \varphi$	„	„	„	„

u. s. w.

und ergibt eine Messung der Größen $a, b, c, \ldots d, e, f, \ldots$ durch Einheiten des Landes Y die Werthe $a', b', c', \ldots d', e', f' \ldots$; so hat man

a'	Einheiten	des	Landes Y	$= \alpha a'$	oder	a	Einheiten	des	Landes	X
b'	„	„	„	$= \beta b'$	oder	b	„	„	„	„
c'	„	„	„	$= \gamma c'$	oder	c	„	„	„	„
d'	„	„	„	$= \delta d'$	oder	d	„	„	„	„
e'	„	„	„	$= \varepsilon e'$	oder	e	„	„	„	„
f'	„	„	„	$= \varphi f'$	oder	f	„	„	„	„

u. s. w.

Substituirt man demnach in der obigen Gleichung die Größen $\alpha a'$, $\beta b'$, $\gamma c'$, . . ., $\delta d'$, $\varepsilon e'$, $\varphi f'$, . . . für a, b, c, . . ., d,e,f, . . .; so ergibt sich die neue Formel

$$F(\alpha a', \beta b', \gamma c', \ldots) = \Phi(\delta d', \varepsilon e', \varphi f', \ldots), \qquad \ldots(1069)$$

welche nunmehr für die Maaßen des Landes Y gültig ist, sodaß die Größen a', b' c', . . ., d', e', f', . . . nach den Maaßeinheiten des letzteren Landes gemessen werden müssen. Eine gehörige Verschmelzung der Koeffizienten α, β, γ, . . . δ, ε, φ, . . . mit den übrigen Konstanten der fraglichen Formel läßt die Veränderungen erkennen, welche diese Konstanten durch die beabsichtigte Reduktion erleiden.

Nach Gl. (636) und (627) hat man z. B. für preußisches Maaß

$$\frac{0{,}00371}{g} V^2 + \frac{0{,}000691}{g} V = \frac{i\Omega}{\Psi},$$

worin die Größen V, Ψ, wie auch die Größe g, nach preußischen Fußen, und Ω nach preußischen Quadratfußen zu messen ist, während das Gefälle i durch eine absolute Zahl dargestellt wird.

Wollte man diese Formel so verwandeln, daß V, Ψ, g nach braunschweigischen Fußen und Ω nach braunschweigischen Quadratfußen gemessen würde; so hätte man

1 braunschweigischen Fuß $= \alpha = 0{,}909222$ preußische Fuß,
1 braunschw. Quadratfuß $= \alpha^2 = 826684$ preuß. Quadratfuß.

Demnach wegen Gl. (1069)

$$\frac{0{,}00371}{\alpha . g'} \alpha^2 V'^2 + \frac{0{,}000691}{\alpha . g'} \alpha V' = \frac{i\alpha^2 \Omega'}{\alpha \Psi'}$$

oder nach gehöriger Vereinfachung

$$\frac{0{,}00371}{g'} V'^2 + \frac{0{,}000691}{\alpha g'} V' = \frac{i\Omega'}{\Psi'}$$

d. i., weil $\alpha = 0{,}909222$ ist,

$$\frac{0{,}00371}{g'} V'^2 + \frac{0{,}000760}{g'} V' = \frac{i\Omega'}{\Psi'},$$

worin jetzt die Größen V′, Ψ', g', Ω' nach braunschweigischen Maaßen zu messen sind, und worin auch, wenn die Versuche nach dieser Formel in Braunschweig selbst angestellt werden sollten, für die Fallgeschwindigkeit g' am Ende der ersten Sekunde derjenige Werth zu substituiren sein würde, welcher der geographischen Lage von Braunschweig entspricht.

Wenn die Formel, auf welche man das vorstehende Reduktionsverfahren anwenden will, nicht allgemein gefaßt ist, sondern den Werth einer gewissen Größe nur für einen speziellen, genau bestimmten Fall angibt, wenn dieselbe z. B. das Gewicht Eines preußischen Kubikfußes von irgend einer Substanz darstellte; so würde man dafür Sorge tragen müssen, die gegebene Formel zuvörderst in ihre allgemeine Gestalt zu bringen, in welcher dieselbe das Gewicht eines beliebigen Volums der fraglichen Substanz ausdrückte. Denn sonst würde die reduzirte Formel immer nur das Gewicht desselben preußischen Kubikfußes, ausgedrückt in Gewichtseinheiten eines andern, z. B. des braunschweigischen Landes darstellen, man würde aber nicht das Gewicht eines braunschweigischen Kubikfußes in braunschweigischen Gewichtseinheiten erhalten. Das Letztere kann nur in der eben bezeichneten Weise geleistet werden, indem man die ursprüngliche Formel zuerst verallgemeinert und in eine solche Form bringt, in welcher dieselbe nicht bloß das Gewicht eines preußischen Kubikfußes, sondern einer jeden beliebigen Menge, mithin auch eines braunschweigischen Kubikfußes der fraglichen Substanz darzustellen fähig ist.

Wie sich z. B. aus den Gleichungen des §s 42 leicht ergibt, ist das Gewicht eines preußischen Kubikfußes atmosphärischer Luft von der Temperatur t^0 C. und bei einem Barometerstande von h Fuß, wenn das Gewicht eines Kubikfußes Quecksilber von 0 Grad in preußischen Pfunden mit W bezeichnet wird,

$$\frac{\mathrm{W}h}{25343{,}5(1+0{,}00366t)}$$

oder da W = 898,748 Pfund ist,

$$0{,}0354627\,\frac{h}{(1+0{,}00366t)}\text{ Pfund.}$$

Bezeichnet man jetzt das Gewicht irgend einer Menge von a Kubikfußen derartiger Luft mit w; so hat man

$$w = 0{,}0354627 \frac{h}{(1+0{,}00366\,t)} \cdot a.$$

Will man diese Formel für braunschweigische Maaße und Gewichte umformen, auch die Temperatur t nach Graden der Réaumürschen Skale messen; so hat man

1 braunschweiger Fuß $= \alpha = 0{,}909222$ preußische Fuß,
1 „ Kubikfuß $= \alpha^3 = 0{,}751639$ preußische Kubikfuß,
1 „ Pfund $= \beta = 1$ preußisches Pfund,
1 Grad Reaumür $= \gamma = \frac{5}{4}$ Grad Celsius.

Dies ergibt nach Anleitung der Formel (1069) für den gegenwartigen Fall

$$\beta w' = 0{,}0354627 \frac{a h'}{(1+0{,}00366 . \gamma t')} \cdot \alpha^3 a'$$

oder nach gehöriger Vereinfachung

$$w' = \frac{\alpha^4}{\beta} \cdot 0{,}0354627 \frac{h'}{(1+0{,}00366 . \gamma t')} \cdot a',$$

d. i., wenn man für α, β, und γ die obigen Zahlenwerthe einführt,

$$w' = 0{,}0242354 \frac{h'}{(1+0{,}00458\,t')}\, a',$$

worin jetzt die Größen h', a', w' in braunschweigischen Maaßen und t' nach Graden der Reaumürschen Skale zu messen sind. Für $a' = 1$ ergibt diese Formel als Gewicht Eines braunschw. Kubikfußes Luft von t'^0 R. und bei einem Barometerstande von h' braunschw. Fußen den Werth

$$0{,}0242354 \frac{h'}{(1+0{,}00458\,t')} \text{ braunschw. Pfund.}$$

Das vorstehende Reduktionsverfahren, nach welchem die Formel (1069) aus der Formel (1068) hervorgeht, gründet sich auf die ausdrückliche Voraussetzung, daß sowol in der zu reduzirenden, wie in der reduzirten Formel die mit denselben Buchstaben a und a', b und b', c und c' etc. bezeichneten Größen in der Wirklichkeit genau dieselben seien und nur in beiden Formeln durch

verschiedene Maaßeinheiten gemessen seien, sodaß also immer die durch a Einheiten des Landes X gemessene Größe identisch ist mit der durch a' Einheiten des Landes Y gemessenen Größe, oder daß a Einheiten des Landes X dem wirklichen Werthe nach gleich a' Einheiten des Landes Y sind.

Der letzteren Bedingung würde aber offenbar kein Genüge geleistet werden, wenn a in Formel (1068) eine andere Größe darstellen sollte, als a' in Formel (1069), wie sich Dies z. B. ereignete, wenn a in preußischen Pfunden das Gewicht eines preußischen Kubikfußes irgend einer Substanz und dagegen a' in braunschweigischen Pfunden das Gewicht des braunschweigischen Kubikfußes derselben Substanz zu bezeichnen hätte; denn das Gewicht eines preuß. und eines braunschw. Kubikfußes sind zwei ganz verschiedene Größen, und wenn man nach den obigen Regeln die für preußische Maaße gültige Formel (1068) in die für braunschweigische Maaße gültige Formel (1069) reduzirt hätte; so würde in der letzteren die Größe a' stets das nach braunschweigischen Pfunden ausgedrückte Gewicht eines preußischen Kubikfußes bedeuten. Hielte man es jedoch für wünschenswerth, statt a' eine Größe a'' einzuführen, welche in braunschweigischen Pfunden das Gewicht eines braunschweigischen Kubikfußes darstellte; so würde eine Elimination von a' vermittelst der zwischen a' und a'' obwaltenden Beziehung gerade keine Schwierigkeiten haben.

Ließe man z. B. in dem zuletzt angeführten Beispiele W als das Gewicht eines preußischen Kubikfußes Quecksilber stehen, ohne hierfür die Zahlgröße 898,748 Pfund zu substituiren; so würde in der auf braunschweigisches Gemäß reduzirten Formel

$$\beta w' = \frac{\beta W'.\alpha h'}{25343{,}5(1+0{,}00366.\gamma t')} \cdot \alpha^3 a'$$

oder

$$w' = \frac{\alpha^4.W'h'}{25343{,}5(1+0{,}00366.\gamma t')} \cdot a'$$

d. i. bei Einführung der Werthe für α und γ

$$w' = \frac{W'h'}{37084{,}1(1+0{,}00458t')} \cdot a',$$

worin w', W', h', a' nach braunschweigischen Gemäßen zu bestimmen wären, die Größe W' doch nur das in braunschweigischen Pfunden ausgedrückte Gewicht eines preußischen Kubikfußes Quecksilber darstellen können. Sollte nun hierfür die Größe W'' eingeführt werden, welche in braunschweigischen Pfunden das Gewicht eines braunschweigischen Kubikfußes Quecksilber bezeichnet; so hätte man, da offenbar

$$W'' = \alpha^3 W', \text{ also } W' = \frac{W''}{\alpha^3}$$

sein würde,

$$w' = \frac{\alpha . W'' h'}{25343{,}5\,(1 + 0{,}00366 . \gamma t')} . a'$$

d. i. wegen der Werthe von α und γ

$$w' = \frac{W'' h'}{27873{,}8\,(1 + 0{,}00458\, t')} . a',$$

mithin für das Gewicht Eines braunschweigischen Kubikfußes Luft von t'^0 R. und bei einem Barometerstande von h' Fuß, indem man $a' = 1$ setzt

$$\frac{W'' h'}{27873{,}8\,(1 + 0{,}00458\, t')} \text{ braunschweigische Pfund.}$$

Braunschweig. *Februar 1847.*

PROSPEKTUS.

Im Verlage der Hofbuchhandlung (Ed. Leibrock) in Braunschweig erscheint:

Die Prinzipien
der
Hydrostatik und Hydraulik
von
H. Scheffler.

Mit über 200 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Zwei Bände von circa 30 Bogen, groß Octav. Feines Velinpapier.
In 6 Lieferungen à 8—9 Bogen. Subscriptions-Preis für jede Lieferung 16 Ggr. = 20 Sgr. = 1 fl. 12 Xr. Rh. = 1 fl. C. Mze. = 90 Kop. Silber.

Von allen durch die technischen Bedürfnisse der Menschen hervorgerufenen Wissenschaften, in welchen die Aufgabe zu lösen war, systematisch die Gesetze zu entwickeln, unter deren Herrschaft eine gewisse Klasse natürlicher Erscheinungen nach Zahl, Raum und Zeit stehen, ist keine, welche der strengen Anwendung der mathematischen Theorie eine größere Schwierigkeit entgegengesetzt, als die Hydrotechnik. In diesem Zweige des Wissens bilden die tropfbaren und gasförmigen Flüssigkeiten, sowol im ruhenden, wie im Zustande der mannichfaltigsten Bewegungen, das wesentliche Element, über welchem sich das Gebäude der Wissenschaft erhebt. Das Ziel ist hier, die mechanischen Wirkungen darzulegen, welche die Flüssigkeiten unter den verschiedensten äußeren Verhältnissen und unter der Sollizitation der bekannten Naturkräfte hervorbringen, und der praktische Zweck dieser Bestrebungen, abgesehen von der rein wissenschaftlichen Bedeutung des Gegenstandes auf das Studium eines integrirenden Theiles des Organismus der Natur, ist, aus jenen Betrach-

tungen Regeln herzuleiten, vermittelst welcher es möglich wird, ein rationelles Urtheil über die Zweckmäßigkeit irgend eines hydrostatischen oder hydraulischen Apparates zu gewinnen.

So wichtig eine strenge Begründung und Entwickelung der vorstehend angedeuteten Lehren sowol in theoretischer, wie in praktischer Beziehung ist, und wie sehr auch der Gegenstand das Interesse der tüchtigsten mathematischen Talente aller Zeiten auf sich gezogen hat; so ist es doch bis jetzt noch nicht gelungen, die Mechanik der flüssigen Körper auf dieselbe Stufe der Vollkommenheit zu erheben, auf welche die Mechanik der starren Körper unter dem Beistande einer aufs geistreichste ausgebildeten mathematischen Analysis emporgeschwungen ist.

Diese Schwierigkeiten erwachsen besonders daraus, daß eine flüssige Masse wie ein System zahlloser Körpertheilchen zu betrachten ist, welche sich ungehindert nach beliebigen Richtungen nebeneinander verschieben können, ohne gezwungen zu sein, wie die Theilchen eines starren Körpers, stets in fest bestimmten gegenseitigen Lagen zu verharren. Bei einer streng mathematischen Betrachtung eines derartigen Systemes scheitert die Auflösung selbst bei den leichtesten hydrodynamischen Problemen an der Verwickelung der sich ergebenden Formeln. Demnach hat man sich genöthigt gesehen, um den vorliegenden Zweig der Naturerkenntniß nicht ganz unkultivirt zu lassen, gewisse auf Vereinfachung abzweckende Hypothesen einzuführen, nach welchen dem wahren Systeme einer flüssigen Masse ein anderes, minder komplizirtes System untergeschoben und der Rechnung unterworfen wird. Bei einer solchen Substitution kommt es denn besonders darauf an, daß das fingirte System in denjenigen Haupteigenschaften, welche soeben den Gegenstand der Untersuchung unter gegebenen Umständen ausmachen, mit dem wahren Systeme der Flüssigkeit übereinstimme und von demselben nur in untergeordneten Punkten, deren Einfluß auf das gesuchte Resultat nur unbedeutend sein kann, abweiche.

Es darf nicht befremden, daß eben hierin, bei der Beurtheilung des Einflusses, welchen die Eine oder andere Modifikation des Systemes

einer flüssigen Masse auf das Endresultat einer anzustellenden Untersuchung hat, manche irrthümliche Schätzung begangen und hinundwieder eine ungenügende Formel in die Hydraulik eingeführt ist. Ebenso erklärlich ist es aber auch, daß die theoretischen Formeln der Hydraulik, welche auf solche Weise gewonnen sind, einer Korrektion durch die Erfahrung bedürfen, und daß das vereinte Wirken vieler Männer und Zeiten dazugehört, um dieser Wissenschaft den Grad von Vollkommenheit zu verleihen, in welchem sie den Anforderungen einer vorgeschrittenen Technik ein Genüge leisten kann.

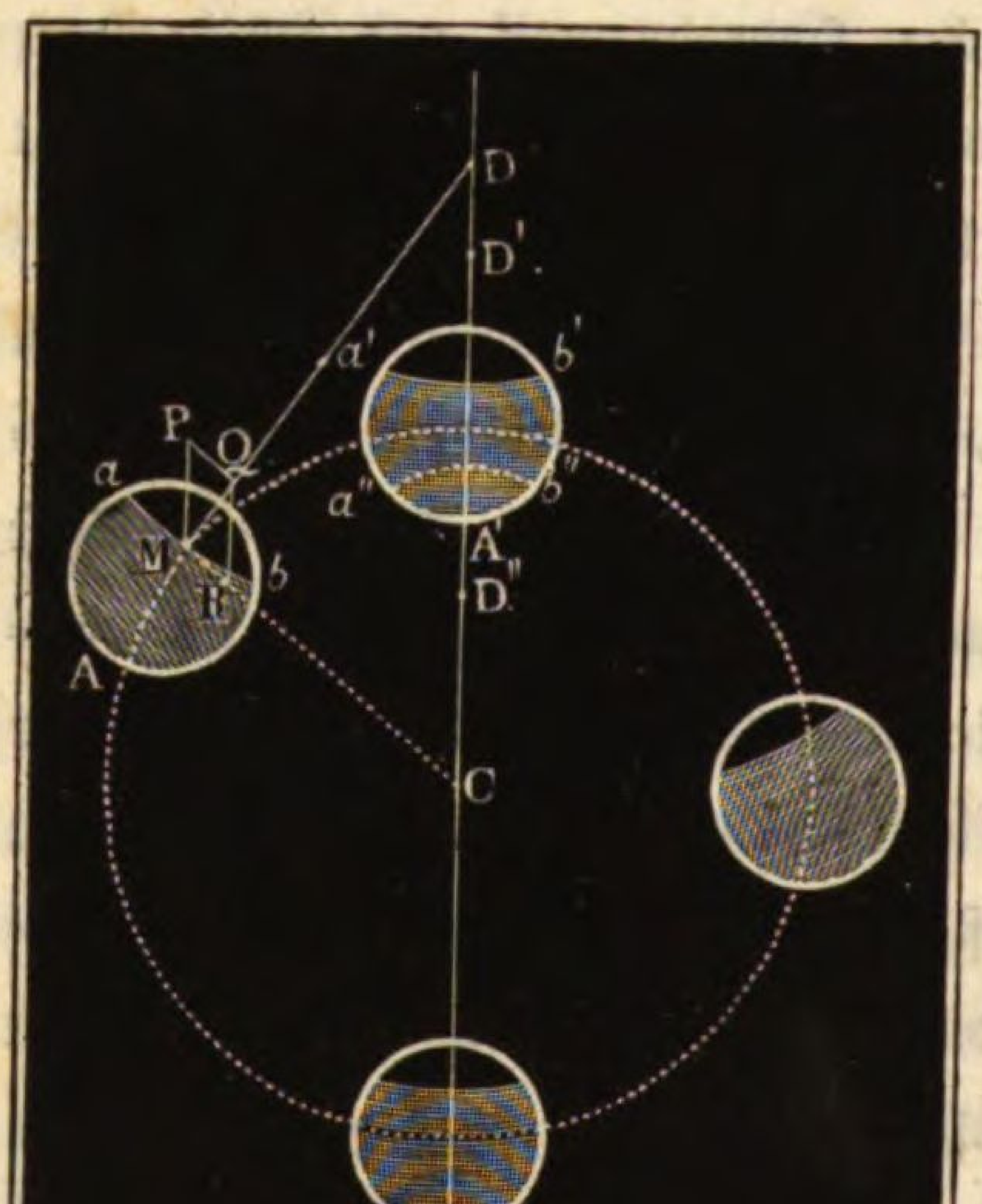
In diesem Betracht möchte jedes Streben nach möglichst gründlicher Darlegung der Prinzipien der Hydrodynamik und Ausbreitung der durch die Beobachtung gewonnenen praktischen Resultate, und somit die Tendenz des vorliegenden Werkes gerechtfertigt erscheinen. Der Verfasser hat es sich dabei angelegen sein lassen, im Geiste der lichtvollen Vorträge Naviers fortzuarbeiten, die einzelnen Branchen jener Wissenschaft, wie sie für die Technik vom vorzüglichsten Interesse sind, möglichst allgemein und ausführlich zu behandeln, bei den theoretischen Entwickelungen die auf Vereinfachung abzielenden Hypothesen in der Natur der Flüssigkeiten möglichst streng zu begründen und behuf der praktischen Anwendung die Erfahrungen der fleißigsten und genauesten Experimentatoren zu Rathe zu ziehen, wodurch denn gleichzeitig den Ansprüchen des wissenschaftlichen, wie des empirischen Technikers entgegengekommen sein wird.

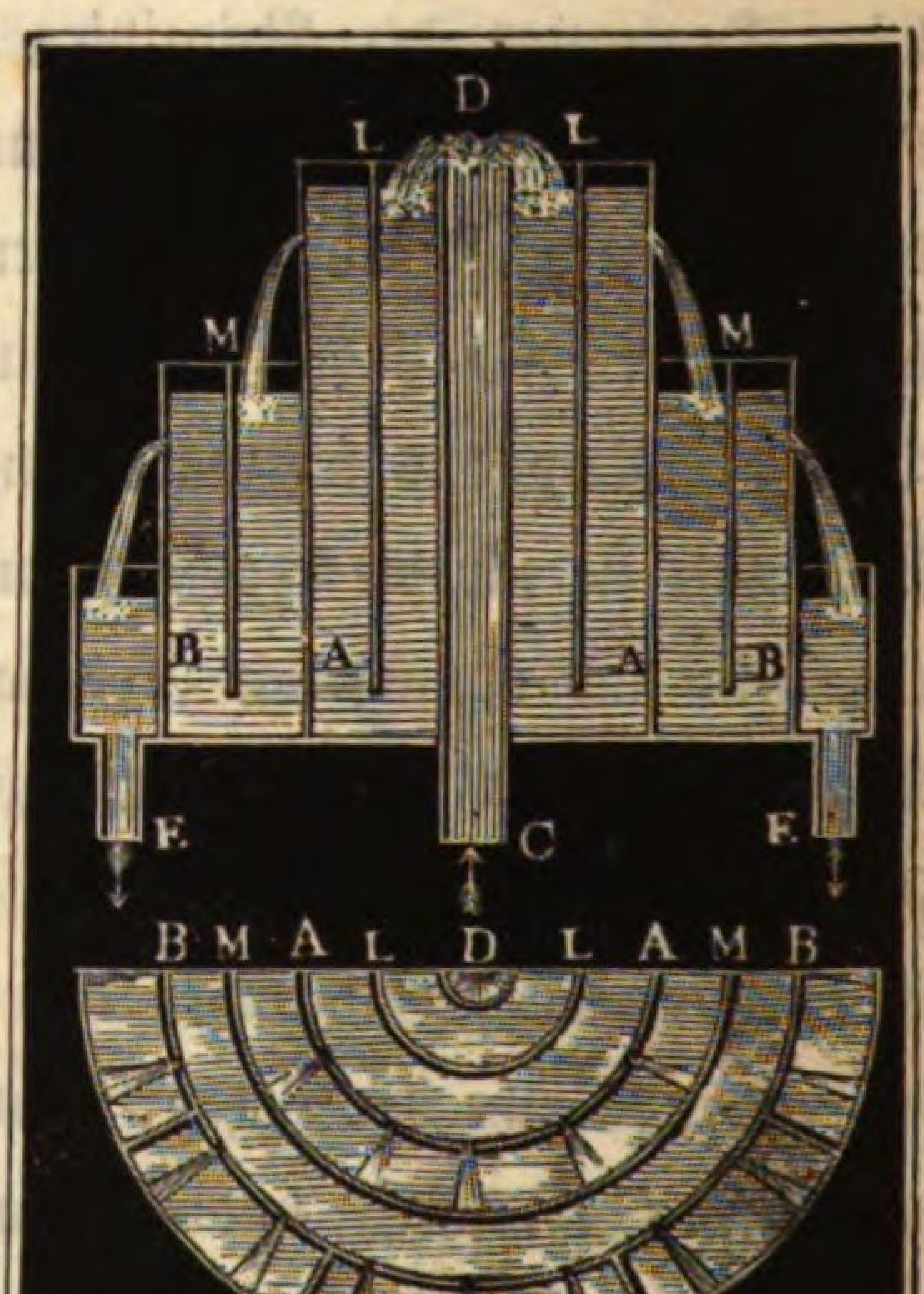
Die äußere Ausstattung des Werks wird sich genau derjenigen anschließen, welche durch das ebenfalls in unserem Verlage erschienene von dem Herrn Verfasser bearbeiteten Werk „Die mechanischen Prinzipien der Ingenieurkunst und Architektur, von H. Moseley. 2 Bände mit über 500 Holzschnitten“ bekannt ist. Druck und Papier dieses Prospektus, denen wir auch eine Probe der zahlreichen in den Text eingedruckten Holzschnitte beifügen, möge als Probe davon dienen.

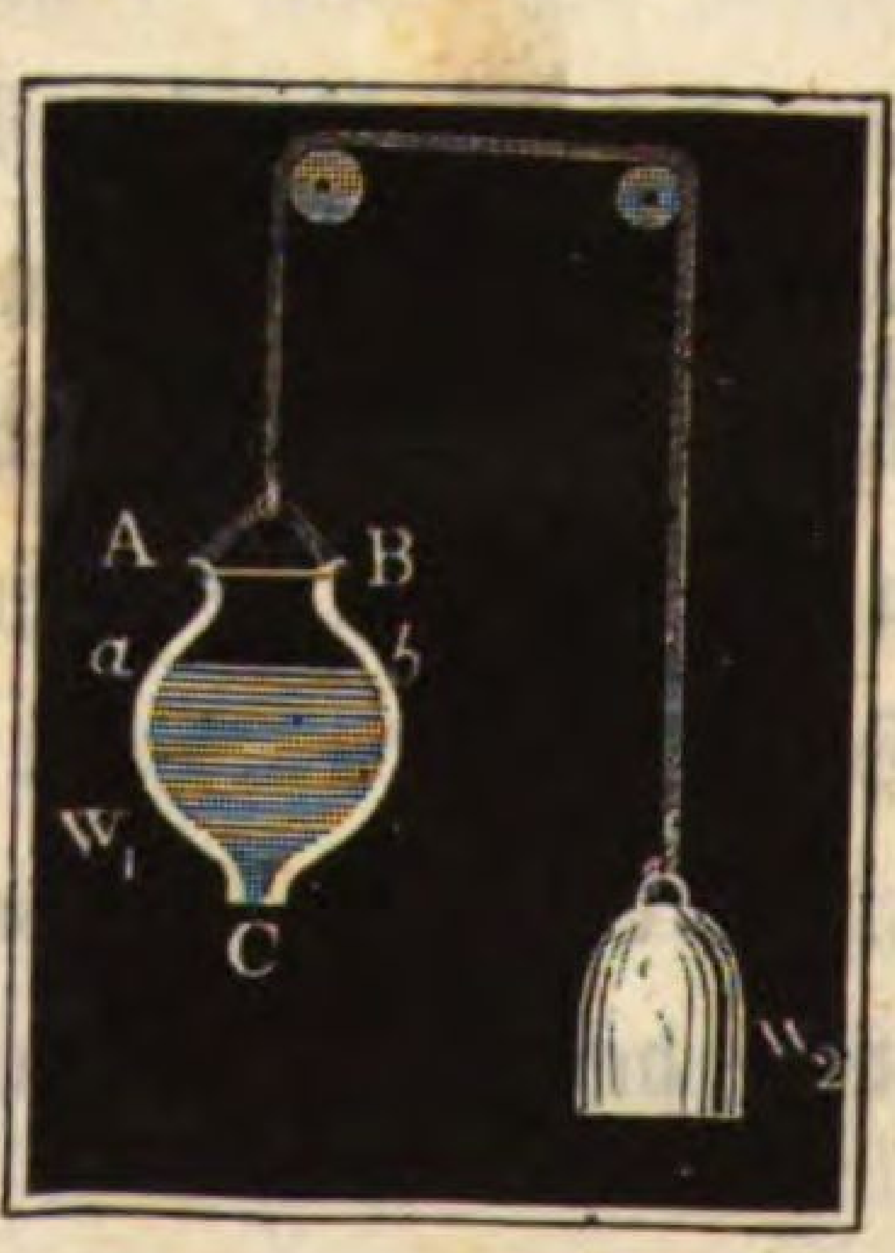
Der Preis ist — bei so sorgfältiger Ausstattung — sehr niedrig gestellt um dem Werke die größte Verbreitung zu sichern. Es erscheint in 6 Lieferungen á 8 — 9 Bogen. Sollte der Umfang 6 Lieferungen übersteigen; so verpflichtet sich die Verlagshandlung das Übrige den resp. Subscribenten gratis zu liefern. Jede Lieferung kostet im Subscriptionspreise 16 Ggr. = 20 Sgr. = 1 fl. 12 Xr. Rh. = 1 fl. Conv. Mze. = 90 Kop. Silber.

Braunschweig, den 1. Febr. 1847.

Die Verlagsbuchhandlung.







Fr

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Scheffler, Hermann,

Die Prinzipien der Hydrostatik u. Hydraulik

Bd.: 2

Braunschweig 1847

A.hydr. 69 s-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10059980-2